Examen LM346 "Processus et simulations", 1ère session 2018–2019, sans document, ni calculatrice.

Rappels.

La loi de Bernoulli de paramètre p est à valeurs $1, 0$, dont la valeur 1 est prise avec probabilité p et la valeur 0 est prise avec probabilité $1 - p$.

La loi Binomiale (n, p) est à valeurs $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ qui sont prises avec probabilités $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

La loi Géomètrique de paramètre a est à valeurs $k \in \{1, 2, \dots\}$ qui sont prises avec probabilités $(1-a)^{k-1}a$.

La loi de Poisson de paramètre λ est à valeurs $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ qui sont prises avec proabbilités $\exp(-\lambda)\lambda^k (k!)^{-1}$

La loi Gaussienne centrée réduite (c'est-à-dire son espérance est 0 et sa variance est 1) est de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$.

La loi exponentielle de paramètre λ est de densité $\lambda \exp(-\lambda t) 1_{[0,\infty[}(t)$.

1. Les variables aléatoires U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 sont indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose $U_1(\omega) = 1/2, U_2(\omega) = 2/3, U_3(\omega) = 1/12, U_4(\omega) = 1/7, U_5(\omega) = 7/8$.

   Simuler les valeurs de 5 variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$.

   Ensuite simuler la valeur d'une variable aléatoire de loi Binomiale de paramètres $(5, 1/3)$.

   Simuler une variable aléatoire de loi géomètrique de paramètre $a = 1/3$ (voir la définition de cette loi ci-dessus).

2. Présenter une méthode de simulation de la loi Gaussienne centrée réduite (on demande de présenter mais ne pas justifier).

3. Présenter une autre méthode de simulation de la loi Gaussienne centrée réduite si vous la connaissez (on demande de présenter et ne pas justifier).

4. Comment simuler alors une variable aléatoire Gaussienne dont l'espérance est m et la variance est σ^2 ?

5. On simule un point aléatoire A de coordonnées (X, Y) dans $\mathbf{R}^2$ où X et Y sont indépendantes, Gaussiennes, de variance 1 et d'espérance m. Soit le point $M = (m, m)$. Alors $Z = \|\vec{MA}\|^2$ est une variable aléatoire non-négative. Quelle est la loi de V ?

6. Calculer la densité de la variable aléatoire V. (On pourrait penser à la méthode de la fonction muette, c'est-à-dire calculer $Ef(V)$ avec f mesurable bornée. On pourrait passer par les coordonnées polaires (r, ϕ), notamment $Ef(V) = \int_{\dots} \int_{\dots} f(r^2) \cdots dr d\phi$ sans oublier le Jacobien! ensuite poser $r^2 = t$ etc). Comment s'appelle alors autrement la loi de V ?

   Quelle conclusion en faites-vous sur la loi χ^2 à 2 degrés de liberté ?

7. Donner la fonction de répartition de V. Trouver x tel que $P(V > x) = \exp(-5)$.

8. Comment pourrait-on simuler alors la loi de V a partir de U – une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$? (Penser à la méthode d'inversion...)

9. Les variables aléatoires $V_1, V_2, V_3, \dots$ sont indépendantes et de même loi que V. Soit $a \in \mathbf{R}$ un paramètre et $N = \max\{i \geq 1 : V_1 + \dots + V_i \leq a\}$. Donner $P(N = k)$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$.

10. On simule les valeurs de variables aléatoires indépendantes V_1, V_2, V_3, V_4 de même loi que V. On obtient $V_1 = 1, V_2 = 1/3, V_3 = 1/6, V_4 = 2/3$. Simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 1.

11. On émet une hypothèse sur l'avenir des étudiants en mathématiques : on suppose qu'après leurs études 50% se dirigent vers le secteur de travail A, 20% vers le secteur de travail B et 30% vers le secteur C. On fait un sondage de 1000 étudiants qui ont fini les études. Il s'avère que 550 travaillent dans le secteur A, 170 dans le secteur B et 280 dans le secteur C. Tester cette hypothèse par le test de χ^2 au seuil $\alpha = \exp(-5)$. (Ceci ne demande pas de calculatrice si on se souvient de la question 7).

12. On considère une Chaine de Markov de 5 états de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} (1/2)\beta & (1/2)\beta & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici β est un paramètre, $\beta \in [0,1]$.

Donner les classes d'états de cette Chaine de Markov. Les caractériser (fermées/non, récurrentes/transientes, apériodiques/non). (La réponse dépend de paramètre $\beta \in [0,1]$. *Suggestion : regardez séparement les cas* $\beta = 1$, $\beta \in]0,1[$ *et* $\beta = 0$. *Dans deux de ces cas il n'y aura aucune différence de réponse, or dans le troixième cas la structure de classes sera notablement différente.* Dans la suite de l'exercice vous analyserez dans chaque question séparement ces deux domaines de paramètre β avec les structures de classes différentes.)

13. Soit $V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{2\}}(X_n)$. Donner les valeurs de paramètre $\beta \in [0,1]$ (si existent) telles que $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 2) = 0$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 2) = 1/4$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 2) = 3/4$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 2) = 1$.

14. Donner les valeurs de paramètre β (si existent) telles que $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 4) = 0$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 4) = 1/4$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 4) = 3/4$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 4) = 1$.

15. Donner toutes les mesures de probabilité invariantes de cette chaine de Markov en fonction du paramètre $\beta \in [0,1]$.

16. Soit $T^2 = \min\{n > 0 : X_n = 2\}$. Donner $E(T^2 \mid X_0 = 2)$ en fonction du paramètre $\beta \in [0,1]$.

17. Donner $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 2)$ pour $i = 1,2,3,4,5$ (la réponse dépend du paramètre β).

18. Donner $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 4)$ pour $i = 1,2,3,4,5$ (la réponse dépend du paramètre β).

19. Soit $X_0 = 1$. Donner $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1_{\{2\}}(X_k)}{n}$ en fonction du paramètre β. Préciser le sens de la limite. (en loi, en probabilité, en L^2, p.s.)

20. Soit $T^5 = \min\{n > 0 : X_n = 5\}$. Donner $E(T^5 \mid X_0 = 4)$ pour $\beta = 0$ et $\beta = 1$ uniquement (Si vous n'arrivez pas à terminer le calcul dans cette dernière question – ce n'est pas grave!).

Correction

1. Les valeurs des v.a. de loi de Bernoulli de paramètre 1/3 sont $1_{\{U_i<1/3\}}$, $i = 1,2,3,4,5$. Donc $0,0,1,1,0$.

   La loi Binomiale (n,p) étant la somme de n lois de Bernoulli indépendantes de paramètre p, la valeur simulée est 2.

   La v.a. $\nu = \min\{k \geq 1 : U_k \in [0,a]\}$ est de loi géomètrique de paramètre a, donc c'est 3.

2. La loi du couple $((-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2), (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2))$ est celle de deux Gaussiennes indépendantes (U_1, U_2 sont indép., de loi uniforme sur [0,1]).

   C'est une méthode expliquée dans la feuille d'exercices N1.

3. On pourrait simuler $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \ldots$ des v.a. indép. de loi exponentielle sur $\mathbf{R}_+^2$ (par la méthode d'inversion). On cherche $\nu = \min\{n \geq 1 : Y_n > 1/2(1-X_n)^2\}$. On prend $X_\nu \times \eta$, où η est à valeurs ± 1 avec probabilités 1/2, indépendante de $X_1, Y_1, \ldots$. Alors $X_\nu \times \eta$ est de loi Gaussienne centrée réduite.

   Cette méthode est présentée dans le poly à la fin du Ch1.

4. Poser $\sigma X + m$ avec X Gaussienne centrée réduite. Une transformation linéaire d'une v.a. Gaussienne est Gaussienne, $Var(\sigma X + m) = \sigma^2$, $E(\sigma X + m) = m$.

   Le facteur est σ devant X et non σ^2 !

5. $V^2 = (X-m)^2 + (Y-m)^2$ est de loi de χ^2 à 2 degrés de liberté (les v.a. $(X-m)$ et $(Y-m)$ étant Gaussiennes centrées, réduites, indépdendantes).

   Il fallait donner le nom de la loi et le nombre de degrés de liberté.

6. $$Ef(V^2) = (1/2\pi)\int\int f(x^2+y^2)\exp(-x^2/2 - y^2/2)dxdy$$
   $$= (1/(2\pi))\int_0^\infty f(r^2)\exp(-r^2/2)rdr\int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^\infty f(r^2)\exp(-r^2/2)rdr = \int_0^\infty f(t)\exp(-t/2)(1/2)dt.$$

   La loi de V est exponentielle de paramètre 1/2. La loi χ^2 à deux degrés de liberté est donc la loi exponentielle de paramètre 1/2.

7. La fonction de répartition de V est bien $1 - \exp(-(1/2)x))$ pour $x \geq 0$ et 0 sinon. Pour que $\exp(-(1/2)x)) = \exp(-5)$ on prend $x = 10$.

8. Par la méthode d'inversion ($F_V(x) = 1 - \exp(-(1/2)x) = U$, donc $F_V^{-1}(U) = -2\ln(1-U)$) elle est de même loi que $(-2)\ln(1-U) = \ln(1-U)^{-2}$.

9. N est de loi de Poisson de paramètre $a/2$. $P(N=k) = \exp(-a/2)(a/2)^k/k!$.

10. Les v.a. $V_1, V_2, \ldots$ sont indép., de loi exp. de paramètre 1/2. Comme $V_1+V_2+V_3 < 2, V_1+V_2+V_3+V_4 > 2$, la valeur de la loi de Poisson de paramètre $1/2 \times 2 = 1$ qu'on souhaite simuler est 3.

11. La statistique du test est $T = 50^2/500 + 30^2/200 + 20^2/300 = 5 + 9/2 + 4/3 =$. Elle converge vers la loi de χ^2 à deux degrés de liberté, dont la quantile pour $\alpha = \exp(-5)$ a été calculée dans la question 7. On a $T > 10$, donc l'hypothèse est rejetée au seuil $\exp(-5)$.

12. Pour $\beta \neq 1$, il y a DEUX classes: la classe $\{1,2,3,4\}$ est transiente (non fermée), classe $\{5\}$ est récurrente (fermée). On remarque $p_{22} > 0$ ce qui implique que 2 est apériodiqe et donc chaque état de sa classe l'est aussi. On a aussi $p_{55} > 0$. Les deux classes sont apériodiques.

    Il n'y avait aucune différence de réponse entre $\beta \in]0,1[$ et $\beta = 0$.

    Pour $\beta = 1$, les classes $\{1,2,3\}$, $\{5\}$ sont récurrentes (fermées), la classe $\{4\}$ est transiente. Comme $p_{22} > 0$, $p_{44} > 0$ et $p_{55} > 0$, les trois classes sont apériodiques.

13. $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 2) = 0$ pour $\beta \in [0, 1[$ (dans ce cas 2 est transient), $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 2) = 1$ pour $\beta = 1$ (dans ce cas 2 est récurrent).

14. $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 4) = 0$ pour $\beta \in [0, 1[$ (dans ce cas 2 est transient).

    Il reste le cas $\beta = 1$. Dans ce cas, calculons la probabilité $h_4^{\{1,2,3\}} = h$ d'absorption dans la classe $\{1, 2, 3\}$ à partir de l'état 4. Elle vérifie $h = 1/5 \times 1 + 1/5 \times 1 + 1/5 \times 1 + 1/5h + 1/5 \times 0$, donc $h = 3/4$. Comme dans une classe récurrente, chaque état est visité, et il est visité une infinité de fois p.s. on a donc pour $\beta = 1$ $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 4) = 3/4$. Donc les valeurs $1/4, 1, 0$ sont impossibles.

15. Pour $\beta \in [0, 1[$ c'est immédiatement δ_5, car les autres états sont transients (et la mesure invariante d'un état transient pour une CM est finie est 0)

    Pour $\beta = 1$, calculons la mesure invariante de la classe fermée $\{1, 2, 3\}$. On a $\pi_2 = (3/4)\pi_1, \pi_3 = 2\pi_1$. Donc c'est $(\pi_1, (3/4)\pi_1, 2\pi_1)$ avec toute constante $\pi_1 > 0$. On peut la normaliser pour la rendre mesure de probabilité. Ceci est $(4/15, 3/15, 8/15)$. Donc la mesure de probabilité de la CM de 5 états se présente comme $(4c/15, 3c/15, 8c/15, 0, 1 - c)$ avec $c \in [0, 1]$.

16. On a $E(T^2 \mid X_0 = 2) = 15/3$ pour $\beta = 1$ (c'est l'inverse de la mesure invariante de l'état 2 DANS LA CLASSE $\{1, 2, 3\}$, car lorsque $X_0 = 2$, la CM reste toujours dans la classe fermée $\{1, 2, 3\}$ comme une CM irréductible finie)

    Pour $\beta \in [0, 1[$, $P(T^2 = \infty \mid X_0 = 2) > 0$ (car l'état 2 est transient), alors $E(T^2 \mid X_0 = 2) = \infty$

17. Pour $\beta = 1$, si $X_0 = 2$, la CM reste TOUJOURS dans la classe fermée $\{1, 2, 3\}$, on peut donc considérer la CM RESTREINTE sur $\{1, 2, 3\}$. Elle est apériodique(!) (il fallait l''ecrire!), irréductible, finie. Alors par le Thm du cours $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 2)$ vaut la mesure de probabilité invariante de l'état i pour CETTE CM RESTREINTE de TROIS états. C'est donc $4/15$ pour $i = 1$, $3/15$ pour $i = 2$ et $8/15$ pour $i = 3$.

    La limite vaut 0 pour $i = 4, 5$ car ces états ne sont jamais visités à partir de $X_0 = 2$.

    Pour $\beta \in [0, 1[$, les états $1, 2, 3, 4$ étant transients, la limite vaut 0 pour $i = 1, 2, 3, 4$. La limite vaut 1 pour $i = 5$, car $\{5\}$ est le seul état récurrent.

18. Pour $\beta = 1$ la CM RESTREINTE sur $\{1, 2, 3\}$ est apériodique, irréductible, finie, l'état initial $\{4\}$ est transient, et $h_4^{\{1,2,3\}} = 3/4$ (voir le calcul précédent). Alors $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i \mid X_0 = 4)$ vaut $4/15 \times 3/4$ pour $i = 1$, $3/15 \times 3/4$ pour $i = 2$ et $8/15 \times 3/4$ pour $i = 3$. La limite vaut 0 pour $i = 4$ car cet état est transient. Elle vaut $1/4$ pour $i = 5$ car $h_4^{\{5\}} = 1 - h_4^{\{1,2,3\}} = 1 - 3/4 = 1/4$.

    Pour $\beta \in [0, 1[$, les états $1, 2, 3, 4$ étant transients, la limite vaut 0 pour $i = 1, 2, 3, 4$. La limite vaut 1 pour $i = 5$, car $\{5\}$ est la seule classe récurrente.

19. Soit $\beta \in [0, 1[$. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1_{\{2\}}(X_k)}{n} = 0$ p.s. car l'état 2 est transient.

    Soit $\beta = 1$. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 1_{\{2\}}(X_k)}{n} = 3/15$ p.s. par le Thm ergodique. C'est la mesure de probabilité invariante de létat 2 de la CM restreinte à la classe $\{1, 2, 3\}$.

20. Soit $T^5 = \min\{n > 0 : X_n = 5\}$. Donner $E(T^5 \mid X_0 = 4)$ pour $\beta = 0$ et $\beta = 1$ uniquement.

    Pour $\beta = 1$, comme $P(T^5 = \infty \mid X_0 = 4) = h_4^{\{1,2,3\}} = 3/4 > 0$, alors $E(T^5 \mid X_0 = 4) = \infty$.

    Pour $\beta = 0$. on doit résoudre le système suivant. On note $k_i = E(T^5 \mid X_0 = i)$. On a $k_4 = 1 + 1/5(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$, $k_1 = 1 + k_4$, $k_2 = 1 + (1/3)k_2 + (2/3)k_3$, $k_3 = 1 + (1/4)k_1 + (3/4)k_3$. On obtient $k_3 = k_1 + 4 = k_4 + 5$, $k_2 = 3/2 + k_3 = 3/2 + k_4 + 5$, donc $k_4 = 1 + 1/5(1 + k_4 + 3/2 + k_4 + 5 + k_4 + 5 + k_4)$, d'où $k_4 = 17, 5$.