TD 1. Fonctions holomorphes

1 Fonctions exponentielle et trigonométriques

Exercice 1.1. Montrer que la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et vérifie $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.2. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω et b un nombre complexe. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

— Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = a\exp(bz)$ pour tout $z \in \Omega$,
— $f'(z) = bf(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 1.3. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant 0 et f une fonction différentiable en 0, au sens complexe, telle que $f(0) \neq 0$ et telle qeu l'équation fonctionnelle $f(w+z) = f(w)f(z)$ est satisfaite pour tous les $z, w \in \Omega$ tels que $w + z \in \Omega$. Montrer alors que $f(z) = \exp(bz)$ pour tout $z \in \Omega$, où $b = f'(0)$.

Exercice 1.4. Montrer que $|\exp w| = 1 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}i$.

Exercice 1.5. Démonter les formules trigonométriques suivantes :

$$\sin p - \sin q = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2}) \qquad \sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2}) \qquad \cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$$

Exercice 1.6. Démontrer les formules suivantes :

$$\tan a \tan b \tan c = \tan a + \tan b + \tan c \quad \text{pour } a+b+c = 0 \mod \pi$$
$$\cot a \cot b + \cot b \cot c + \cot c \cot a = 1 \quad \text{pour } a+b+c = 0 \mod \pi$$

Exercice 1.7. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z/2) \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \cdots + \cos nz = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

Exercice 1.8. Déterminer l'image par la fonction exponentielle du carré

$$C_{a,b} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x-a| \leq b \text{ et } |y| \leq b\}.$$

Exercice 1.9. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la quantité $\cos z$ est-elle réelle ? dans $[-1, 1]$?

Exercice 1.10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux polynômes T_n et U_n tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos(nz) = T_n(\cos(z)), \qquad \sin((n+1)z) = \sin(z)U_n(\cos(z)).$$

2 Fonctions holomorphes

Exercice 1.11. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

a) f est holomorphe sur Ω,

b) f est continûment différentiable en tout point de Ω et la différentielle en tout point est $\mathbb{C}$-linéaire,

c) $f = u + iv$ est continûment différentiable en tout point de Ω et satisfait les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

Exercice 1.12. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer qu'une fonction f sur Ω est constante si et seulement si elle est holomorphe et que sa dérivée est nulle.
En déduire les énoncés suivants :

a) Toute fonction f holomorphe sur Ω qui ne prend que des valeurs réelles (resp. imaginaires pures) est constante.

b) Toute fonction f holomorphe sur Ω de module constant est constante.

Exercice 1.13. Déterminer toutes les fonctions holomorphes f d'un ouvert simplement connexe de Ω tel que $(\operatorname{Re} f)^2 + i(\operatorname{Im} f)^2$ est aussi holomorphe.

Exercice 1.14. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $au + bv$ est constante. Montrer qu'alors f est elle-même constante sur Ω.

3 Séries entières

Exercice 1.15. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} z^{2n-1}.$$

Exercice 1.16. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^4 + 2n^3}{5n^4 + 23n^3} \right)^n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n (2n)!} (z-1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + a^n) z^n, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\sin n) z^n.$$

Exercice 1.17. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que f est holomorphe sur $B_R(c)$, la boule ouverte de rayon R centrée en c, et que pour tout $z \in B_R(c)$, et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} a_k \frac{n!}{(n-k)!} (z-c)^{n-k}.$$

Exercice 1.18. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine D. À partir de la formule de Cauchy :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

où γ est un contour simple fermé inclus dans D entourant une fois z dans le sens positif (par exemple le bord de $B_r(z)$, une boule centrée en z de rayon r, incluse dans D), montrer que f est développable en série enti ère en tout point de D, et exprimer les coefficients du développement sous forme d'une intégrale.

Exercice 1.19. Développer en série entière les fonctions suivantes aux points indiqués, et préciser les rayons de convergences correspondants :

a) $\dfrac{1}{z^3 - iz^2 - z + i}$ au voisinage de 0, et au voisinage de 2,

b) $\frac{z^4-z^3-8z^2+14z-3}{z^3-4z^2+5z-2}$ au voisinage de 0, et au voisinage de i.

c) $\sin(z)^2/z$ au voisinage de 0,

d) $\frac{2z+1}{(z_1^2)(z+1)^2}$ au voisinage de 0,

e) $\cos(z^2 - 1)$ au voisinage de 0.

Exercice 1.20. Soit la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ définie récursivement par $c_0 = c_1 = 1$, et $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ pour tout $n \geq 0$. Exprimer c_n explicitement en fonction de n.

Exercice 1.21. Déterminer toutes les fonctions entières f telles que $f'' + f = 0$.

Exercice 1.22. Pour chacune des propriétés suivantes, construire une fonction f holomorphe au voisinage de 0 satisfaisant cette propriété ou démontrer qu'il n'en existe pas :

a) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$ pour presque tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $f(\frac{1}{n}) = (n^2 - 1)^{-1}$ pour presque tout $n \geq 2$.

c) $|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $|f(\frac{1}{n})| \leq e^{-n}$ pour presque tout $n \geq 1$ et f a un ordre d'annulation fini en 0.

4 Convergence

Exercice 1.23.

a) Soit X un espace métrique, (f_n) une suite de fonctions continues sur X convergeant uniformément sur tout compact vers f. Montrer qu'alors $(\exp \circ f_n)$ converge uniformément sur tout compact vers $\exp \circ f$.

b) Montrer que la suite d'Euler $\left((1 + \frac{z}{n})^n\right)_{n\geq 1}$ converge localement sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une limite que l'on précisera.

5 Logarithme

Exercice 1.24. Soit h la fonction définie sur $B_1(0)$ par
$$h(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$
Montrer que l'image par h de $B_1(0)$ est $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrer que la fonction $H = \log h$ est bien définie et holomorphe sur $B_1(0)$. Montrer que $H(iz) = 2 \arctan z$. En déduire que pour tout $z \in B_1(0)$,
$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Exercice 1.25. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ étoilé. Montrer que toute fonction holomorphe g qui ne s'annule pas sur Ω admet un *logarithme holomorphe*, c'est à dire une fonction f holomorphe sur Ω telle que $g = \exp(f)$.

Exercice 1.26. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur Ω. Soit $c \in \Omega$. Montrer que
$$f(z) = f(c) \exp \int_\gamma \frac{f'(u)}{f(u)} \mathrm{d}u$$
pour tout chemin γ reliant c à z dans Ω.
En déduire que pour tout chemin fermé γ,
$$\oint_\gamma \frac{f'(u)}{f(u)} \mathrm{d}u \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Exercice 1.27. Soit D un voisinage ouvert de 0, et f une fonction holomorphe sur D telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout m, il existe un voisinage $U \subset D$ de 0 et une fonction holomorphe g sur U qui vérifie $g(z)^m = f(z^m)$ pour tout $z \in U$.

6 Théorème de Liouville, principe du maximum

Exercice 1.28.

a) Montrer que toute fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) bornée est constante.

b) En déduire qu'il n'existe pas de bijection biholomorphe entre $D(0,1)$ et $\mathbb{C}$, ou entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}$.

c) Montrer qu'un polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

d) Soit f une fonction entière. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $R, M > 0$ tels que $|f(z)| \leq M|z|^n$ pour tout $|z| \geq R$, montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

e) Si f est une fonction entière telle que $\operatorname{Re} f$ est bornée sur $\mathbb{C}$, alors montrer que f est constante.

Exercice 1.29. Montrer qu'une fonction holomorphe sur un ouvert Ω ne peut pas atteindre son maximum (en module) à l'intérieur de Ω.