# TD 2. Fonction Gamma

**Exercice 2.1.** Soit $B_n(r)$ la boule de rayon $r$ dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et soit $v_n(r)$ son volume. Montrer que $v_n(r) = r^n v_n(1)$ et que

$$v_n(1) = 2v_{n-1}(1)\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

**Exercice 2.2.** Pour tout $n$, on définit $J_n = ]-(n+1), -n[$. On sait d'après le cours que la fonction $\Gamma$ admet un unique extremum sur $J_n$, noté $x_n$. Montrer que la suite $(x_n + n)$ est monotone. On pourra utiliser le fait que la dérivée logarithmique $\psi = \Gamma'/\Gamma$ de la fonction $\Gamma$ est strictement croissante sur chaque $J_n$ et que $\psi$ vérifie une certaine équation fonctionnelle découlant de celle satisfaite par $\Gamma$ (voir ($\star$) plus bas).

**Exercice 2.3.** On pose $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$

a) Calculer $a^2$ et montrer que $g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}$.

b) Montrer que les pôles de $g$ sont les nombres de la forme $(k+\frac{1}{2})a$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et calculer le résidu de $g$ en $\frac{a}{2}$.

c) Pour $r > 0$, on note $C_r$ le bord du parallélogramme de sommets $-r, r, r+a, -r+a$, parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\oint_{C_r} g(z)\mathrm{d}z$$

d) Montrer que l'intégrale de $g$ sur les côtés non horizontaux du parallégramme tend vers 0 lorsque $r$ tend vers l'infini.

e) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

puis celle de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

**Exercice 2.4.**

a) Soit $T = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Démontrer que

$$(\star) \qquad \forall\, z \in T, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

b) Montrer que si $g$ est une fonction holomorphe (méromorphe) non-constante et 1-périodique sur $\mathbb{C}$, alors $g\Gamma$ vérifie la même équation fonctionnelle. Construisez une telle fonction $g$. Cela montre que l'équation fonctionnelle ($\star$) ne caractérise pas la fonction $\Gamma$.

c) Soit $S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \mathrm{Re}\, z < 2\}$. Montrer que $\Gamma$ est bornée sur $S$.

d) Soit une fonction holomorphe $F$ sur $T$ qui est bornée sur $S$ et vérifie ($\star$). Montrer que $v = F - a\Gamma$ avec $a = F(1)$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$.

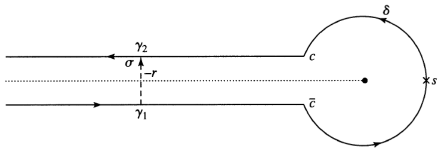


FIGURE 1 – Contour d'intégration pour l'intégrale de Hankel

e) Montrer que $q : z \mapsto v(z)v(1-z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ 2-périodique et que $q(z+1) = -q(z)$.

f) Montrer que $v$ est bornée sur $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

g) En déduire que $q$ est identiquement nulle, puis que $F = a\Gamma$.

**Exercice 2.5.** (*Hankel's loop integral*) Le but de cet exercice est de donner une représentation intégrale de la fonction $\Gamma$ qui soit valable sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$. Cette formule est appelée *intégrale de boucle de Hankel.*

a) Montrer que pour tout $z = x + iy$ et $w \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$,

$$|w^{-z}e^w| \leq e^{\pi|y|}|w|^{-x}e^{\operatorname{Re} w}.$$

b) On fixe un nombre $s > 0$ et $c \in \partial B_s(0)\setminus\{s, -s\}$. Soit $S$ une bande verticale $[a,b]+i\mathbb{R}$. Soit $\gamma = \gamma_1+\delta+\gamma_2$ le contour orienté représenté sur la figure 1. Montrer que $\lim_{t\to\infty} |t-c|^q e^{-\frac{t}{2}} = 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $t_0\mathbb{R}$ tel que

$$\forall z = x+iy \in S, \forall w = \gamma_2(t) = c - t, t \geq t_0, \quad |w^{-z}e^w| \leq e^{\pi|y|}e^{-\frac{t}{2}}.$$

c) Déduire de la question précédente que l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma w^{-z}e^w \mathrm{d}w$ converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ et donc définit une fonction holomorphe $h$ sur $\mathbb{C}$.

d) Montrer que h vérifie $h(1) = 1$ et $h(-n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Montrer que $z \mapsto h(z)e^{-\pi|\operatorname{Im} z|}$ est bornée sur $S$.

f) On introduit la fonction $F$ définie par $F(z) = \pi\frac{h(1-z)}{\sin(\pi z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$. Montrer que $F$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

g) Montrer que $F$ satisfait $(\star)$ de l'exercice précédent.

h) Montrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|2\sin z| \geq e^{|y|} - e^{-|y|}$. En déduire qu'il existe une constante $A$ telle que pour $z = x+iy$, $1 \leq x < 2$ et $y \neq 0$,

$$|F(z)| \leq \frac{A}{1-e^{-2\pi|y|}}.$$

i) Conclure que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\sin\pi z}\oint_\gamma w^{z-1}e^w \mathrm{d}w.$$