TD 3. Mathematica 1

Connectez vous sur `https://mon.upmc.fr`. Dans le menu `Outils`, choisissez le sous-menu `Logiciels`, puis cliquez sur le bouton `Mathematica`.
Vous arrivez sur une page du domaine `logiciels.upmc.fr`. Cherchez la section *Processus de téléchargement pour les étudiants de l'UPMC.*
Il faut créer un compte sur `https://user.wolfram.com` avec votre adresse email de l'UPMC `prenom.nom@etu.upmc.fr`, puis demander une license en utilisant l'adresse

`https://user.wolfram.com/portal/requestAK/b579951aa87e946412d42f68d1986cabdc2a5679`

1 Éléments de syntaxe

Le système d'aide de Mathematica est assez complet et permet, à partir d'exemples et de tutoriaux, de trouver les bonnes commandes et leurs syntaxes. Il faut retenir que Mathematica utilise des crochets pour passer des arguments aux fonctions.
On peut regarder les fonctions suivantes :

- `D` (dérivation), `Integrate` (intégration),
- `Expand`, `Factor`, `Collect`, `Simplify`, `FullSimplify` (manipulation d'expressions)
- `TrigExpand`, `TrigFactor`, ... (manipulations d'expressions trigonométriques)
- `Log`, `Exp`, `Cos`, `Sin`, `Tan`, `Sqrt` (fonctions usuelles)
- `Plot`, `ContourPlot`, `Plot3D`, `ListPlot` (graphes de fonctions)
- `Solve`, `NSolve`, `Reduce` (résolution d'équations)

2 Calcul de développement en séries et résidus

Exercice 3.1. Calculer le coefficient de x^5 dans le développement en séries de $\exp(cos(x))$ au voisinage de 0. Celui de x^{20} dans le développement en séries de $\sqrt{1+\log(2-x)}$ au voisinage de $x = 1$.

Exercice 3.2. Soit $a = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$, et f la fonction méromorphe définie par

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}.$$

Vérifier que f a un pôle en $\frac{a}{2}$ et calculer son résidu.

Exercice 3.3. Soit n un entier et $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes de modules distincts. Soit $P(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_i)$. Dessiner en fonction de $R > 0$ l'intégrale de $1/P(z)$ et de $P'(z)/P(z)$ le long d'un cercle de centre 0 et de rayon R.
On pose $f(z) = \frac{P'(1/z)}{z^2 P(1/z)}$. Calculer le résidu de f en 0. Expliquer ce résultat.

3 Fonction Gamma

Exercice 3.4. Dessiner le graphe de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$. Dessiner les contours de la partie réelle, puis la partie imaginaire de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3.5. Trouver une valeur approchée des extrema locaux x_n de la fonction Γ sur $J_n =]-n, -n+1[$, pour $n = 1, \ldots, 20$. Tracer les valeurs de $x_n + n$ en fonction n. Essayer de conjecturer un équivalent de $x_n + n$ lorsque n tend vers l'infini.

4 Nombres et polynômes de Bernoulli

Exercice 3.6. Soit $G(t,x) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} B_k(x)$, où les $B_k(x)$ sont les polynômes de Bernoulli. En évaluant $B_k(0)$, on obtient le k^{e}nombre de Bernoulli b_k

a) Calculer les 20 premiers polynômes de Bernoulli.

b) Calculer les 20 premiers nombres de Bernoulli

c) Vérifier les propriétés des polynômes de Bernoulli :

$$\begin{aligned}
&\forall\, k \geq 1, \quad B_k' = kB_{k-1}, \int_0^1 B_k(x)\mathrm{d}x, \\
&\forall\, k \geq 1, \quad B_k(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \\
&\forall\, k \geq 2, \quad B_k(1) = B_k(0).
\end{aligned}$$

d) Vérifier que pour $k \geq 1$, le coefficient de x^{2k} dans le développement en série entière de $x \cot x$ au voisinage de 0 est donné par $|b_{2k}| \frac{2^{2k}}{(2k)!}$ et que celui de x^{2k-1} dans le développement de tan au voisinage de 0 est $|b_{2k}| \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{2k(2k-1)!}$.