TD 4. Nombres et polynômes de Bernoulli et formule d'Euler–Maclaurin

On rappelle que les polynômes de Bernoulli B_k sont définis par le développement en séries de la fonction génératrice

$$G(t,x) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k(x),$$

et que leur valeur en $x = 0$ donnent les nombres de Bernoulli $b_k = B_k(0)$.
On rappelle aussi la formule d'Euler-Maclaurin pour une fonction f de classe $C^{2m+1}([x_0, +\infty[)$, et pour $x \geq x_0$, et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = \int_x^{x+n} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(x) - f(x+n)) \\ + \sum_{1\leq l\leq m} \frac{b_{2l}}{(2l)!}\left(f^{(2l-1)}(x+n) - f^{(2l-1)}(x)\right) \\ + \frac{1}{(2m+1)!}\int_0^n \tilde{B}_{2m+1}(\theta) f^{(2m+1)}(x+\theta)\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

où $\tilde{B}_{2m+1}$ est la fonction 1-périodique coïncidant avec B_{2m+1} sur $[0, 1[$.

Exercice 4.1. Montrer que pour tout t suffisamment proche de 0, l'identité suivante est vérifiée :

$$t = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} b_j \right) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!},$$

où les b_j sont les nombres de Bernoulli. En déduire une infinité de relations linéraires satisfaites par les b_j, puis recalculer à partir des premières relations les valeurs de b_j pour $j = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 4.2. Appliquer directement la formule d'Euler–Maclaurin à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ pour obtenir un développement asymptotique de la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 4.3. Appliquer la formule d'Euler–Maclaurin à la fonction $x \mapsto \log x$ pour $m = 1$. En déduire une version faible de la formule de Stirling : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n! = C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(\frac{1}{n})\right).$$

Exercice 4.4. Exprimer comme un polynôme en n les sommes

$$S_j(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^j$$

pour $j = 1, 2, 3, \ldots$.