TD 5. Produits infinis, développements eulériens

1 Produits infinis

Exercice 5.1. Dire si les produits suivants sont strictement convergents ou non. S'ils sont convergent, calculer si possible leur valeur.

$$\prod_{k\geq 2}\frac{k^3-1}{k^3+1},\quad \prod_{k\geq 1}\frac{k+(-1)^{k+1}}{k},\quad \prod_{k\geq 2}\cos\frac{\pi}{2^k}.$$

Exercice 5.2. Montrer que pour z dans le disque unité, les produits suivants convergent vers une fonction holomorphe que l'on précisera :

$$\prod_{k\geq 0}(1+z^{2^k}),\quad \prod_{k\geq 1}\left((1+z^k)(1-z^{2k-1})\right).$$

2 Lemmes de Herglotz, duplication et formule d'Euler

Exercice 5.3.
Soit un domaine simplement connexe Ω contenant un intervalle $[0,r[$, avec $r>1$.

a) Soit h une fonction holomorphe sur Ω satisfaisant la relation

$$2h(2z)=h(z)+h(z+\frac{1}{2})$$

dès que z, $z+\frac{1}{2}$ et $2z$ sont dans l'intervalle $[0,r[$. Soit $t\in]1,r[$ et $M=\max_{z\in[0,t[}|h'(z)|$. Montrer en dérivant la relation vérifiée par h que $M=0$. En déduire que h est constante sur Ω.

b) Soit g une fonction g holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas sur $[0,r[$ et qui vérifie pour un certain $c\in\mathbb{C}^*$:

$$g(2z)=cg(z)g(z+\frac{1}{2})$$

dès que z, $z+\frac{1}{2}$ et $2z$ sont dans l'intervalle $[0,r[$. Montrer que g est de la forme $g(z)=ae^{bz}$ avec $ace^{b/2}=1$.

c) Soit f une fonction impaire, entière (*i.e.* holomorphe sur $\mathbb{C}$) qui s'annule sur $[0,1]$ uniquement en 0 et en 1 avec un zéro simple, et qui vérifie la formule de duplication :

$$\exists\ c\in\mathbb{C}^*,\ \forall\ z\in\mathbb{C},\quad f(2z)=cf(z)f(z+\frac{1}{2})$$

Montrer qu'alors pour tout z complexe, $f(z)=2c^{-1}\sin\pi z$.

d) Soit $s(z) := z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$. Montrer que s est entière et impaire, avec des zéros simples sur $\mathbb{Z}$. Calculer $s'(0)$.

e) Vérifier que

$$s(2z) = 2s(z)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right).$$

f) Montrer que pour tout $k>0$,

$$\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1+\frac{2z}{2k-1}}{1+\frac{2z}{2k+1}}\left(1-\frac{(2z+1)^2}{4k^2}\right).$$

En déduire que

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right) = Cs(z+\frac{1}{2})$$

avec une constante C que l'on précisera.

g) En déduire que $s(z) = \sin(\pi z)/\pi$.

3 Autour de la fonction Γ

Exercice 5.4. Fonction Beta

On définit la fonction « Beta » notée B, pour a, b complexes de parties réelles strictement positives par :

$$B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $B(a,b)$ est bien définie et qu'elle est symétrique : $B(a,b) = B(b,a)$.

b) En calculant l'intégrale de

$$(x,t) \mapsto e^{-x}t^{a-1}(x-t)^{b-1}$$

sur le domaine $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 < t < x\}$ de deux manières différentes, montrer que

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

On pourra considérer les deux changements de variables : $\phi : (x,t) \mapsto (x, s = t/x)$ et $\psi : (x,t) \mapsto (u = x-t, t)$ sur des domaines que l'on précisera.

Exercice 5.5. Intégrales de Wallis

Pour $\mathrm{Re}\, z > -1$, on pose

$$W_z := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^z \mathrm{d}z.$$

a) Montrer à l'aide de l'exercice précédent que :

$$W_z = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{z+1}{2})}{\Gamma(\frac{z+2}{2})}.$$

b) Rappeler les valeurs de $\Gamma(x)$ pour $x \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$.

c) Donner une expression comme une fraction de W_n pour $n \geq 1$. On distinguera les cas $n = 2p$, $p \geq 1$ et $n = 2p+1$, $p \geq 0$. Les quantités W_n s'appellent *les intégrales de Wallis.*

Exercice 5.6. On rappelle la formule de Gauss pour la fonction Γ : pour tout $z \in \mathbb{C} \smallsetminus (-\mathbb{N})$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

a) Vérifier que pour $x > 0$,

$$\ln \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x \ln n - \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{x+j}{j} \right) - \ln x.$$

Soit $G : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $G(1) = 1$, G soit log-convexe et vérifie $G(x+1) = xG(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Soit $g = \ln G$, $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$g(x+n) - g(x) - g(n) = \ln(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{x+j}{j}.$$

ou encore

$$g(x) + \ln(x) - x \ln n + \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{x+j}{j} = g(x+n) - g(n) - x \ln n.$$

c) Soit k entier plus grand que x. Comparer les pentes des cordes de g sur les intervalles $[n-1, n]$, $[n, n+x]$ et $[n, n+k]$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+n)-g(n)-x\ln n}{x} = 0$.

d) Montrer qu'alors

$$g(x) = -\ln(x) + \lim_{n} \left(x \ln n - \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{x+j}{j} \right).$$

En déduire que $G = \Gamma$.