# TD 6. La fonction $\zeta$

**Exercice 6.1.** On appelle *série de Dirichlet* toute série de fonctions de la variable $z$ de la forme

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^z}$$

pour une suite $(a_n)_{n\geq 1}$. Le but de cet exercice est de montrer que de même qu'une série entière a un disque de convergence, une série de Dirichlet a un demi-plan de convergence.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n n^{-z_0}$ soit convergente.

b) Il exite un réel $\alpha$ tel que $a_n = O(n^\alpha)$ pour $n \to \infty$.

c) Il existe un réel positif $\rho$ tel que la série $\sum_n a_n n^{-z}$ converge normalement sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \rho\}$.

**Exercice 6.2.** Soit $\sum a_n n^{-z}$ une série de Dirichlet. On définit alors les abscisses de convergence :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \inf\{\operatorname{Re} z \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum a_n n^{-z} \text{ converge}\},\\
\sigma_{\text{abs}} &= \inf\{\operatorname{Re} z \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum a_n n^{-z} \text{ converge absolument}\},\\
\tau &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid a_n = O(n^\alpha)\}.
\end{aligned}$$

Montrer que $\tau \leq \sigma \leq \sigma_{\text{abs}} \leq \tau + 1$. Montrer que $\tau = \limsup \frac{\ln |a_n|}{\ln n}$.

**Exercice 6.3.** Soient $\sum a_n n^{-z}$ et $\sum b_n n^{-z}$ deux séries de Dirichlet d'abscisse de convergence $\sigma_a$ et $\sigma_b$ respectivement. Montrer que le produit est aussi une série de Dirichlet, dont on exprimera la suite $(c_n)$ en fonction de $(a_n)$ et $(b_n)$ et dont on donnera un majorant de l'abscisse de convergence $\sigma_c$.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

- $\mu(n) = (-1)^k$ si $n$ a $k$ facteurs premiers distincts de multiplicité 1 ($\mu(1) = 1$ et $\mu(n) = 0$ si $p^2|n$) (fonction de Möbius)
- $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n$
- $\phi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à $n$ premiers avec $n$ (indicatrice d'Euler)
- $\nu(n)$ le nombre de facteurs premiers de $n$

**Exercice 6.4.** Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes, et $(b_n)$ la suite définie par

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \sum_{d|n} a_d,$$

a) Montrer qu'alors pour tout $n \geq 1$, $a_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) b_d$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{n,1}$.

**Exercice 6.5.** Soit $z$ un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à 1. Démontrer les formules suivantes

$$(a)\quad \zeta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z}, \qquad (b)\quad \frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^z}$$

$$(c)\quad \frac{\zeta^2(z)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^z}, \qquad (d)\quad \frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^z},\ \operatorname{Re} z > 2.$$

**Exercice 6.6.** Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}^2$. On dit que $A$ a une densité si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Card}(A \cap \{1, \cdots, N\}^2)}{N^2}.$$

Soit $Q = \{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid \operatorname{pgcd}(m,n) = 1\}$. Montrer que $Q$ a une densité et la calculer. Indication : montrer que le numérateur pour la densité de $Q$ est

$$\sum_{n=1}^{N} \phi(n) = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left( \lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2 + \lfloor \frac{n}{d} \rfloor \right).$$

**Exercice 6.7.** La factorisation de la fonction $\zeta$ en produit sur les nombres premiers est la version analytique du théorème de factorisation des nombres entiers. En utilisant cette formule, donner une version analytique du théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers.

**Exercice 6.8.** Soit $z$ un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à 1. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \zeta(z) \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t} \mathrm{d}t.$$

Soit $I(z)$ l'intégrale de $\frac{t^{z-1}}{e^t-1}$ sur le contour suivant :

— de $+\infty$ à $\rho \in ]0, 2\pi[$ le long de l'axe horizontal,

— autour de 0 le long du cercle centré en l'origine de rayon $\rho$,

— de $\rho$ à $+\infty$ le long de l'axe horizontal

(très similaire au contour de la représentation de Hankel pour la fonction $\Gamma$).
Montrer en prenant la limite $\rho \to 0$ que $I(z) = (e^{2i\pi z} - 1)\Gamma(z)\zeta(z)$.
Par un calcul de résidu, en déduire la valeur de la fonction $\zeta$ sur $-\mathbb{N}$.

**Exercice 6.9.** Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$. Montrer par une transformation d'Abel que pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\log \zeta(s) = s \int_0^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} \mathrm{d}x.$$

Indication : on remarquera que la dérivée de $\log(1 - x^{-s})$ est $\frac{s}{x(x^s-1)}$.