TD 7. Développements asymptotiques, théorèmes taubériens, méthode de Laplace

Exercice 7.1. Soit li le logarithme intégral défini pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$$

a) Montrer que même si l'intégrale définissant li pour $x > 1$ n'est pas absolument convergente, elle a un sens en tant que valeur principale (comme la limite de l'intégrale sur $[0,x]\setminus[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ lorsque ε tend vers 0).

b) On pose $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2)$. En faisant le changement de variable $v = \log(t)$ dans l'intégrale définissant Li, montrer que

$$\mathrm{Li}(e^u) = \int_{\log(2)}^u \frac{e^v}{v}\mathrm{d}v.$$

c) En découpant l'intégrale en deux au point $v = u/2$, montrer que $\mathrm{Li}\, e^u = O(\frac{e^u}{u})$ lorsque u tend vers $+\infty$. En déduire que $\mathrm{li}(x) = O(\frac{x}{\ln x})$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) À l'aide d'intégrations par parties montrer que li a le développement asymptotique suivant :

$$\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\ln x)^k}$$

Notez ici que la somme du membre de droite n'est pas convergente et que le sens du symbole $\sim$ est de dire que la différence entre $\mathrm{li}(x)$ et la somme partielle jusqu'à $n-1$ est un grand O du terme pour $k = n$.

Exercice 7.2. Soit (a_n) une suite de nombre complexe. On suppose que la série entière $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, et que $f(x)$ admet une limite lorsque $x \in [0,1[$ tend vers 1^-. Appelons ℓ cette limite. On dit alors que (a_n) est *Abel-sommable*, et ℓ est sa *somme d'Abel*.

a) Supposons que $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge vers $s \in \mathbb{C}$. Si on appelle $s_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_n$, montrer que

$$f(z) = s - (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+1} z^k.$$

b) (Abel) Montrer qu'alors, lorsque z tend vers 1 en restant dans un secteur de Stolz ($|1-z| \leq M(1-|z|)$ pour un certain $M > 1$), $f(z)$ tend vers s. En particulier, montrer que (a_n) est Abel-sommable. Exprimer alors sa somme d'Abel.

c) Montrer que les suites $((-1)^k(k+1))_{k\geq 0}$ et $((-1)^k)_{k\geq 0}$ ne sont pas convergentes, mais sont Abel-sommables, et donner leurs sommes d'Abel.

d) (Tauber) Supposons maintenant que (a_n) est Abel-sommable et $a_n = o(\frac{1}{n})$. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, et $x \in]0,1[$,

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{N} n(1-x)|a_n| + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N}|na_n|.$$

e) Montrer qu'en prenant $x = 1 - \frac{1}{N}$, la suite des sommes partielles de (a_n) converge vers la somme d'Abel

f) Il est à noter que Hardy et Littlewood ont donné un énoncé de ce résultat où l'hypothèse que (na_n) tend vers 0 est remplacée par le fait que cette suite est bornée.

Exercice 7.3. Cet exercice se propose d'appliquer la méthode de Laplace pour obtenir l'asymptotique des intégrales de Wallis.

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $\cos^n(\frac{w}{\sqrt{n}}) = \exp\left(-\frac{w^2}{2} + O(n^{-1}w^4)\right)$. uniformément pour $w = O(n^{-1/4})$.

b) On pose $\kappa_n = n^{1/10}$.

c) (Élimination des queues) Montrer que la contribution à I_n du domaine d'intégration $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus [-\frac{\kappa_n}{\sqrt{n}}, \frac{\kappa_n}{\sqrt{n}}]$ est dominée par $\exp(-Cn^{1/5})$ pour un $C > 0$.

d) (Estimation de la partie centrale par une gaussienne) Montrer que l'intégrale sur $[-\kappa_n, \kappa_n]$ est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\kappa_n}^{\kappa_n} e^{-w^2/2}\mathrm{d}w(1 + O(n^{-3/5})).$$

e) (Complétion des queues gaussiennes) Montrer que $\int_{\kappa_n}^{\infty} e^{-w^2/2}\mathrm{d}w = O(\exp(-\kappa_n^2/2))$.

f) En déduire que $I_n = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}(1 + O(n^{-3/5}))$.

Exercice 7.4. Cet exercice propose de démontrer la formule de Stirling pour des entiers, en appliquant la méthode du col sur une intégrale de contour donnant $\frac{1}{n!}$: l'intégrale de Cauchy pour la fonction exp.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$K_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} e^z \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}},$$

où r est un réel strictement positif.

a) Montrer que la fonction $z \mapsto e^z z^{-n-1}$ a un point selle (où la dérivée s'annule) en $\xi = n+1$, qui correspond à un maximum (directionel) local du module lorsqu'on approche ξ dans la direction verticale. On va voir alors que l'estimation de l'intégrale est obtenue en appliquant la méthode de Laplace sur un contour passant par ce point.

b) Réécrire l'intégrale K_n en prenant $r = n$ et en paramétrant le contour en coordonnées polaires $z = ne^{i\theta}$ pour obtenir :

$$K_n = \frac{e^n}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{i\theta}-1-i\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

c) On pose $h(\theta) = e^{i\theta} - 1 - i\theta$. La fonction $|e^{nh(\theta)}|$ est unimodale, et a un pic à $\theta = 0$. On découpe l'intégrale en deux parties :

$$K_n^{(0)} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} e^{nh(\theta)}\mathrm{d}\theta, \qquad K_n^{(1)} = \int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0} e^{nh(\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

où θ_0, comme on va le voir devra être tel que $n\theta_0^2 \to \infty$ mais $n\theta_0^3 \to 0$. On prendra $\theta_0 = n^{-2/5}$.

d) (Élimination des queues) Montrer en utilisant l'unimodalité de cos, que l'intégrale $K_n^{(1)}$ vérifie :

$$\left|K_n^{(1)}\right| = O\left(e^{n(\cos\theta_0 - 1)}\right) = O(e^{-Cn^{1/5}}),$$

pour une constante $C > 0$.

e) (Approximation centrale) Montrer que

$$K_n^{(0)} = \int_{-n^{-2/5}}^{n^{-2/5}} e^{-n\theta^2/2}\mathrm{d}\theta\left(1 + O(n^{-1/5})\right) \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n^{1/10}}^{n^{1/10}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t\left(1 + O(n^{-1/5})\right).$$

f) (Complétion des queues gaussiennes). Montrer que pour $c > 0$

$$\int_c^{\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = O(e^{-c^2/2}).$$

En déduire que $K_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}(1 + O(n^{-1/5}))$, et donc que

$$\frac{1}{n!} = K_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n(1 + O(n^{-1/5})).$$

Exercice 7.5. Suite de l'exercice 6.8
Soit $I(z)$ l'intégrale de $\frac{t^{z-1}}{e^t-1}$ sur le contour qui vient de $+\infty$ le long de l'axe des réels, fait le tour d'un cercle de rayon $\rho < 2\pi$ autour de l'origine, et repart en $+\infty$ le long de l'axe réel. Le numérateur est défini le long de ce contour par $t^{z-1} = e^{(z-1)\log z}$ avec log ayant une coupure le long de $\mathbb{R}^+$ de sorte que sa partie imaginaire varie continument le long du contour de 0 à 2π.

a) On a démontré que $I(s) = (e^{2i\pi s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s)$ pour tout $\mathrm{Re}\,(s) > 1$. Montrer que

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2i\pi}I(s).$$

b) Justifiez que I est une fonction entière, c'est à dire holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

c) Démontrer que l'expression pour $\zeta(s)$ obtenue dans la question a) est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des singularités éventuelles sur $\mathbb{Z}$.

d) Calculer $I(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que le prolongement de ζ a un unique pole en $s = 1$, simple, dont on calculera les résidus. Calculer les valeurs de ζ sur $-\mathbb{N}$.

e) Considérons maintenant le contour C_n qui vient aussi de $+\infty$ jusqu'à $(2n+1)\pi$, fait le tour dans le sens direct du carré avec les sommets $(2n+1)\pi(\pm 1 \pm i)$ puis de $(2n+1)\pi$ à $+\infty$. Déterminer les poles de l'intégrande de $I(z)$ dans le carré et calculer leur résidus. En déduire que

$$I(s) = \int_{C_n} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t + 4\pi i e^{i\pi s}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k\pi)^{s-1}$$

f) Montrer que pour $\mathrm{Re}\, s < 0$, l'intégrale le long de C_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En déduire que

$$I(s) = 4\pi i e^{i\pi s}\sin\frac{\pi s}{2}(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s).$$

g) Démontrer l'équation fonctionnelle pour la fonction ζ :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

h) En déduire que $\zeta(2m) = 2^{2m-1}\pi^{2m}\frac{b_{2m}}{(2m)!}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

i) En prenant la dérivée logarithmique de l'équation fonctionnelle, et en analysant le comportement au voisinage de $s = 1$, montrer que $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi$.