TD 8. Fonctions de Bessel

Exercice 8.1. Montrer que pour tous ϕ et z complexes,

$$e^{iz\cos(\phi)} = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(z)\cos(k\phi).$$

Exercice 8.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tous y et z complexes,

$$J_n(y+z) = \sum_{m=\infty}^{\infty} J_m(y)J_{n-m}(z).$$

Exercice 8.3. Montrer que si $r^2 = x^2 + y^2$, alors

$$J_0(r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(x)J_{2k}(y).$$

Exercice 8.4.

a) Montrer que pour tout n et $z \neq 0$,

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z) \quad \text{et} \quad J_n'(z) = \frac{n}{z}J_n(z) - J_{n+1}(z).$$

b) En déduire que

$$J_n'(z) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)), \quad \text{et} \quad J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z}J_n(z).$$

Exercice 8.5. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'entrelacement des zéros des fonctions de Bessel pour des valeurs de n réelles, différant d'un entier.

a) Montrer que $u(z) = z^{-n}J_n(z)$ est une fonction entière qui vérifie l'équation différentielle

$$zu'' + (2n+1)u' + zu = 0.$$

En déduire, en dérivant par exemple l'équation différentielle, que u ne peut s'annuler en même temps que sa dérivée.

b) À partir des relations de récurrence de l'exercice précédent, montrer que $z^{-n}J_{n+1}(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-n}J_n(z))$. En déduire qu'entre deux zéros réels consécutifs de $z^{-n}J_n(z)$, il y a au moins un zéro de $z^{-n}J_{n+1}(z)$.

c) De même montrer que $z^{n+1}J_n(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{n+1}J_{n+1}(z))$. En déduire qu'entre deux zéros réels consécutifs de $z^{n+1}J_{n+1}(z)$, il y a au moins un zéro de $z^{n+1}J_n(z)$.

d) Montrer en utilisant que $z^{-n}J_{n+1}(z)$ s'annule en $z = 0$, qu'entre deux zéros réels consécutifs de $z^{-n}J_n(z)$, il y a exactement un seul zéro de $z^{-n}J_n(z)$.

Exercice 8.6. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\sin(\theta))\mathrm{d}\theta.$$

En déduire que $|J_n(z)| \leq 1$ pour z réel.

Exercice 8.7. En identifiant le coefficient constant en t dans le produit $\exp(\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t}))$ et $\exp(-\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t}))$, montrer que

$$J_0(z)^2 + 2J_1(z)^2 + 2J_2(z)^2 + 2J_3(z)^2 + \cdots = 1,$$

pour tout z complexe. En déduire que lorsque z est réel, $|J_0(z)| \leq 1$ et $J_n(z) \leq 1/\sqrt{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.8. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et n, on pose :

$$u_{n,\alpha}(z) = J_n(\alpha z).$$

a) Déterminer une équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par $u_{\alpha,n}$.
b) Calculer la dérivée de la fonction qui à z associe $z\left(u_{n,\alpha}(z)u'_{n,\beta}(z) - u'_{n,\alpha}(z)u_{n,\beta}(z)\right)$ et celle de $(\alpha^2z^2 - n^2)u^2_{n,\alpha}(z) + (zu'_{n,\alpha}(z))^2$.
c) Montrer que si $\alpha \neq \beta$ et n réel > -1.

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^x tJ_n(\alpha t)J_n(\beta t)\mathrm{d}t = x\left(\beta J_n(\alpha x)J'_n(\beta x) - \alpha J_n(\beta x)J'_n(\alpha x)\right)$$

et

$$2\alpha^2\int_0^x t(J_n(\alpha x))^2\mathrm{d}t = (\alpha^2x^2 - n^2)J_n(\alpha x)^2 + (x\alpha J'_n(\alpha x))^2.$$

d) Montrer que si $J_n(\alpha) = J_n(\beta) = 0$, avec $\alpha \neq \beta$,

$$\int_0^1 tJ_n(\alpha t)J(\beta t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 tJ_n(\alpha t)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}J_{n+1}(\alpha)^2$$

e) Déduire de la dernière question que lorsque $n > -1$, tous les zéros sont réels et que J_n et J_{n+1} ne peuvent avoir de zéros communs hormis 0.

Exercice 8.9. (Développement de Neumann des fonctions analytiques en séries de Bessel) Le but de cet exercice est de trouver un développement de la fonction $\frac{1}{t-z}$ sous la forme :

$$\frac{1}{t-z} = O_0(t)J_0(z) + 2O_1(t)J_1(t) + 2O_2(t)J_2(t) + \cdots$$

où les fonctions O_n ne dépendent pas de z. Dans une première partie, nous supposerons qu'un tel développement existe pour voir quelles conditions sont imposées sur les fonctions O_k. Puis nous démontrerons que la série de fonctions ainsi obtenue converge vers la limite voulue $\frac{1}{t-z}$ pour $|z| < |t|$.

a) En appliquant l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}$, montrer que les coefficients (s'ils existent !) vérifient

$$(O_0'(t) + O_1(t))J_0(z) + \sum_{k=1}^{n}(2O_n'(t) + O_{n+1}(t) - O_{n-1}(t))J_n(z) \equiv 0.$$

b) En déduire que nécessairement,

$$O_1(t) = -O_0'(t), \quad O_{n+1}(t) = O_{n-1}(t) - 2O_n'(t) \text{ pour } n \geq 1.$$

c) En évaluant l'identité souhaitée pour $z = 0$, déterminer quelle devrait être la valeur de $O_0(t)$.

d) Montrer par récurrence que $O_n(t)$ est un polynôme de degré $n+1$ en $\frac{1}{t}$.

e) Montrer par récurrence que $O_n(t)$ est donnée par la formule :

$$O_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{tu}[(u + \sqrt{u^2+1})^n + (u - \sqrt{u^2+1})^n]\mathrm{d}u$$

lorsque $\mathrm{Re}\,(t) > 0$.

f) En écrivant $u = \sinh\theta$, suivant la parité de n, montrer que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(u + \sqrt{u^2+1})^n + (u - \sqrt{u^2+1})^n] = {}^{\cosh}_{\sinh}\, n\theta \\ &= 2^{n-1}\left[\sinh^n\theta + \frac{n(n-1)}{2(2n-2)}\sinh^{n-2}(\theta) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)}\sinh^{n-4}(\theta) + \cdots\right] \quad (1)\end{aligned}$$

g) En déduire que pour tout $t \neq 0$, nécessairement,

$$O_n(t) = \frac{2^{n-1}n!}{t^{n+1}}\left[1 + \frac{t^2}{2(2n-2)} + \frac{t^4}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \cdots\right].$$

On montrera d'abord l'identité pour $\mathrm{Re}\,(t) > 0$.

h) Nous voulons maintenant montrer que la série de Bessel avec les coefficients $O_n(t)$ ci-dessus est effectivement convergente, et vaut $\frac{1}{t-z}$ sur le domaine voulu.

i) Démontrer pour z et t fixé,

$$J_n(z) = \frac{(z/2)^n}{n!}(1+\theta_n), \quad O_n(t) = \frac{2^{n-1}n!}{t^{n+1}}(1+\phi_n)$$

avec $\theta_n, \phi_n \to 0$. En déduire que la série est absolument convergente pour z et t fixés avec $|z| < |t|$, et que pour $0 < r < R$, la convergence est même normale pour $|z| \leq r < R \leq |t|$.

j) Montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)F(z,t)=0$, et que donc F peut s'exprimer comme une fonction de $t-z$.

k) Conclure, en calculant $F(0,t)$ que $F(z,t)=\frac{1}{t-z}$.

l) Soit f une fonction analytique sur une boule ouverte $B(0,r)$ centrée en 0. Montrer qu'il existe des coefficients (a_n) tels que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z)$$

pour tout $|z|<r$. On exprimera a_n en fonction de f.

Exercice 8.10.

a) Montrer en utilisant les relations de récurrences entre J_n et J_{n+1} que pour tout n

$$z^{-n-1}J_{n+1}(z)=-\frac{\mathrm{d}}{z\mathrm{d}z}(z^{-n}J_n(z)).$$

En déduire que pour tout $r\in\mathbb{N}$,

$$z^{-n-r}J_{n+r}(z)=(-1)^r\frac{\mathrm{d}^r}{(z\mathrm{d}z)^r}(z^{-n}J_n(z))$$

b) Vérifier que $J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$.

c) Donner l'expression de $J_{3/2}(z)$.

d) Plus généralement, déduire des questions précédentes que pour $r\in\mathbb{N}$, $J_{r+\frac{1}{2}}$, est de la forme $P_k\sin z+Q_k\cos z$, avec P_k et Q_k des polynômes en $z^{-1/2}$.

Exercice 8.11. Démontrer que les fonctions de Bessel de seconde espèce $(Y_\nu)_{\nu\in\mathbb{C}}$ vérifient les identités suivantes :

$$\nu Y_\nu(z)=\frac{z}{2}(Y_{\nu+1}(z)+Y_{\nu-1}(z)),\qquad Y_\nu'(z)=\frac{1}{2}(Y_{\nu-1}(z)-Y_{\nu+1}(z)).$$