A. Analyse complexe et transformations conformes

A.1. Fonctions holomorphes et théorème de Morera

Nous commençons par rappeler la notion de *fonction holomorphe.*

Définition 14. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et une fonction $f : D \to \mathbb{C}$. La fonction f est *holomorphe* sur D si pour tout $z_0 \in D$, la limite

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. La fonction f' est alors la *dérivée complexe* de f.

Notons que l'ouvert D doit être non-vide. Nous n'allons pas le préciser à chaque fois.

Étant donné f une fonction à valeurs complexes sur D et un chemin $\gamma : [a, b] \to D$, avec γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux, *l'intégrale curviligne* de f le long de γ est

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si θ est un changement de paramétrisation, c'est à dire un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ vers $[a, b]$, et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \theta$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Le chemin γ est dit *fermé* (également appelé *lacet*), si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Proposition 18. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Soit un lacet (chemin fermé) γ dans D, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Supposons de plus que γ peut être contracté en un point par déformations continues tout en restant dans D, c'est-à-dire que γ n'entoure pas un éventuel trou de D. Alors on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{A.1}$$

La réciproque du théorème précédent est vraie. En fait, il suffit de vérifier (A.1) pour seulement les γ qui sont des bords de triangles.

Théorème 8 (Morera)**.** *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur D. Si pour tout triangle rempli fermé T contenu dans D on a*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

alors f est holomorphe sur D.

Rappelons également le principe des zéros isolés pour une fonction holomorphe, et son corollaire sur l'unicité du prolongement analytique.

Théorème 9 (zéros isolés)**.** *Soit un ouvert* ***connexe*** *$D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Alors pour tout $z \in D$ tel que $f(z) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $w \in B(z, \varepsilon) \setminus \{z\}$, $f(w) \neq 0$.*

Corollaire 5. *Soit un ouvert* ***connexe*** *$D \subset \mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur D. Supposons qu'il existe une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ avec $z_n \in D$, qui converge vers un $z_\infty \in D$, et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = g(z_n)$. Alors pour tout $z \in D$, $f(z) = g(z)$.*

A.2. Indice, intégrale de Cauchy et développement en série entière

Proposition 19. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la quantité*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. C'est l'indice de γ autour de z_0.

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ vaut n si γ fait n fois le tour de z_0 dans le sens trigonométrique. $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ vaut $-n$ si γ fait n fois le tour de z_0 dans le sens inverse (aiguilles d'une montre). L'indice $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ vaut 0 si γ peut être séparé de z_0 par déformations continues et sans toucher z_0.

Théorème 10 (Cauchy)**.** *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et admet des dérivées complexes de tout ordre (notées $f^{(n)}$). Soit $z_0 \in D$ et γ un lacet dans $D \setminus \{z_0\}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Supposons de plus que γ peut être contracté en un point par déformations continues tout en restant dans D, c'est-à-dire que γ n'entoure pas un éventuel trou de D. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) f(z_0),$$

et pour tout $n \geq 1$ entier,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Rappelons aussi qu'une fonction qu'une fonction holomorphe peut être développée en série entière au voisinage de tout point de son domaine de définition.

Proposition 20. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Soit $z_0 \in D$. Alors pour tout $z \in D$ tel que $|z - z_0| < d(z_0, \mathbb{C} \setminus D)$, on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n,$$

avec convergence absolue de la série.

A.3. Équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques conjuguées

Étant donnée une fonction f de deux variables réelles (x, y), on va noter par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ ses dérivées partielles. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$. Soient $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ les opérateurs différentiels suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Notons que

$$4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta. \tag{A.2}$$

Proposition 21. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Alors f est holomorphe si et seulement si pour tout $z \in D$,*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0. \tag{A.3}$$

Dans ce cas, pour tout $z \in D$,

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Démonstration. Fixons $z \in D$ et prenons $w \in \mathbb{C}$ avec $|w|$ petit. On a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\Big(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big).$$

Comme f est différentiable au point z, on a

$$f(z + w) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)w + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{w} + o(|w|),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(z + w) - f(z)}{w} = \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\frac{\bar{w}}{w} + o(1).$$

Donc si on a (A.3) au point z, alors f admet une dérivée complexe en z qui est $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$. Réciproquement, si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \neq 0$, alors f n'admet pas de dérivée complexe en z car $\bar{w}/w$ ne converge pas quand $w \to 0$. □

Corollaire 6. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Alors f est harmonique sur D ($\Delta f = 0$), et en particulier* $\mathrm{Re}(f)$ *and* $\mathrm{Im}(f)$ *sont des fonctions harmoniques sur D.*

Démonstration. D'après (A.2),

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 4 \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0.$$ □

Dans (A.3) on peut considérer séparément les parties réelle et imaginaire. On aboutit alors à un système de deux équations différentielles, appelées équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.4}$$

Le système (A.4) est satisfait par $(u, v) = (\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))$ pour f holomorphe.

Pour $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, on note ∇u le gradient de u, qu'on identifie également avec son affixe complexe dans $\mathbb{C}$. Le système (A.4) signifie exactement que

$$\nabla v = i \nabla u,$$

c'est-à-dire que ∇v est l'image de ∇u par rotation d'angle $\pi/2$. En particulier, les lignes de niveau de u sont des lignes de gradient de v et réciproquement. On peut résumer ce qui précédé dans la proposition suivante.

Proposition 22. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et u et v deux fonctions différentiables sur D à valeurs réelles. Supposons que le couple (u, v) satisfait les équations de Cauchy-Riemann* (A.4) *sur D. Alors la fonction $f = u + iv$ est holomorphe sur D. En particulier, u et v sont harmoniques sur D, et pour tout $z \in D$,*

$$\nabla v(z) = i \nabla u(z), \qquad \|\nabla v(z)\|_2 = \|\nabla u(z)\|_2 = |f'(z)|.$$

On dit que u et v satisfaisant (A.4) sont des *fonctions harmoniques conjuguées.*

Rappelons également que le log du module d'une fonction holomorphe sans zéros est harmonique.

Proposition 23. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D tel que pour tout $z \in D$, $f(z) \neq 0$. Alors* $\log|f|$ *est une fonction harmonique sur D* ($\Delta \log|f| = 0$).

Démonstration. Fixons $z_0 \in D$ et montrons que $\Delta \log|f| = 0$ dans un voisinage de z_0. Comme $f(z_0) \neq 0$, il existe U un voisinage ouvert de z_0 dans D, tel que pour tout $z \in U$, $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$. Alors, comme le domaine $f(U)$ n'entoure pas 0, il existe une détermination du logarithme sur $f(U)$, et par conséquent il existe une fonction holomorphe g sur U tel que pour tout $z \in U$, $f(z) = e^{g(z)}$. Alors $\log|f| = \mathrm{Re}(g)$ sur U, et $\mathrm{Re}(g)$ est harmonique sur U. □

A.4. Principe de réflexion de Schwarz

Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan ouvert supérieur :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}. \tag{A.5}$$

Soit J un ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ et D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{H}$ tel que pour tout $x \in J$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset D$. Soit D' l'image de D par réflexion d'axe horizontal $\mathbb{R}$, et soit

$$\widehat{D} = D \cup D' \cup J.$$

Alors $\widehat{D}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par réflexion d'axe horizontal.

Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose de plus le suivant :

1. f se prolonge continument à $D \cup J$.
2. Pour tout $x \in J$, $f(x) \in \mathbb{R}$, où $f(x)$ désigne le prolongement de f à x par continuité.

Soit $\hat{f}$ la fonction suivante définie sur $\widehat{D}$:

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D \cup J, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in D'. \end{cases}$$

Théorème 11 (Schwarz)**.** *Sous les hypothèses précédentes, la fonction $\hat{f}$ est holomorphe sur $\widehat{D}$.*

Démonstration. Vérifions d'abord que $\hat{f}$ est continue sur $\widehat{D}$. Clairement, $\hat{f}$ est continue sur $D \cup J$ est sur D'. De plus, pour tout $x \in J$,

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in D'}} \hat{f}(z) = \overline{f(x)} = f(x).$$

Donc $\hat{f}$ est continue sur $\widehat{D}$.

Pour vérifier que $\hat{f}$ est holomorphe, nous allons appliquer le théorème de Morera (Théorème 8). Soit T un triangle rempli fermé contenu dans $\widehat{D}$. Montrons que

$$\int_{\partial T} \hat{f} = 0. \tag{A.6}$$

Nous allons distinguer les cas suivants :

1. $T \subset D$.
2. $T \subset D'$.
3. $T \cap D' = \emptyset$, mais $T \cap J \neq \emptyset$.
4. $T \cap D = \emptyset$, mais $T \cap J \neq \emptyset$.
5. $T \cap D \neq \emptyset$ et $T \cap D' \neq \emptyset$.

Clairement, $\hat{f}$ est holomorphe sur D. Donc dans le cas 1 la condition (A.6) est satisfaite. En fait, $\hat{f}$ est aussi holomorphe sur D'. En effet, pour $z \in D'$,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z})} = 0.$$

Donc dans le cas 2 la condition (A.6) est également satisfaite. Supposons qu'on est dans le cas 3. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le translaté vertical de T, $T + i\varepsilon$, est contenu dans D. Comme $\hat{f}$ est continue, on a

$$\int_{\partial T} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial T + i\varepsilon} \hat{f} = 0.$$

Le cas 4 est le symétrique de 3. Traitons maintenant le cas 5. Dans ce cas, la droite $\mathbb{R}$ divise le triangle T en deux polygones, $K = \overline{T \cap D}$ et $K' = \overline{T \cap D'}$. On a

$$\int_{\partial T} \hat{f} = \int_{\partial K} \hat{f} + \int_{\partial K'} \hat{f},$$

où les frontières ∂T, ∂K et $\partial K'$ sont orientées dans le sens trigonométrique. Enfin,

$$\int_{\partial K} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K + i\varepsilon} \hat{f} = 0, \qquad \int_{\partial K'} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K' - i\varepsilon} \hat{f} = 0. \qquad \square$$

A.5. Transformations conformes

Rappelons la notion de *transformation conforme.*

Définition 15. Soit D et $\widetilde{D}$ deux ouverts non-vides de $\mathbb{C}$. une fonction f est une transformation conforme de D vers $\widetilde{D}$ si f est une bijection entre D et $\widetilde{D}$ et f est holomorphe sur D. Alors nécessairement, pour tout $z \in D$, $f'(z) \neq 0$. De plus l'inverse de f, f^{-1}, est holomorphe sur $\widetilde{D}$ et est une transformation conforme de $\widetilde{D}$ vers D.

Notons que si on prends deux ouverts D et $\widetilde{D}$ arbitraires, il n'existe pas nécessairement de transformation conforme de D vers $\widetilde{D}$. Si une telle transformation conforme existe, alors D et $\widetilde{D}$ sont dits *conformément équivalents.*

Rappelons la notions de domaine *simplement connexe.* Il s'agit de domaine sans trous.

Définition 16. Soit un ouvert non-vide $D \subset \mathbb{C}$. D est dit *simplement connexe* si D est connexe et $\mathbb{C} \setminus D$ est soit vide, soit connexe et non-borné.

Notons par $\mathbb{D}$ le disque unité :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}.$$

Théorème 12 (Riemann)**.** *Soit D un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$. Alors D est conformément équivalent au disque unité $\mathbb{D}$ (c.à.d. il existe une transformation conforme de $\mathbb{D}$ vers D) si et seulement si D est simplement connexe et $D \neq \mathbb{C}$.*

Plus bas nous rappelons quels sont les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$, c.à.d. les transformations conformes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$.

Proposition 24. *Les automorphisme conformes de $\mathbb{D}$ sont les fonctions de la forme*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z+a}{\bar{a}z+1},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$. En particulier, les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$ forment un groupe de Lie de dimension 3.

Il est à noter que les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$ sont se prolongent en des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

$\mathbb{H}$ désigne le demi-plan supérieur (A.5).

Proposition 25. *Les transformations conformes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{H}$ sont les fonctions de la forme*

$$f(z) = x - i\lambda \frac{e^{i\theta}z+i}{e^{i\theta}z-i}, \tag{A.7}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'inverse d'une transformation conforme (A.7) *est donné par*

$$f^{-1}(w) = ie^{-i\theta} \frac{w-x-i\lambda}{w-x+i\lambda}.$$

Les automorphismes conformes de $\mathbb{H}$ sont les fonctions de la forme

$$f(z) = x + \lambda z,$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, ainsi que les fonctions de la forme

$$f(z) = x - \lambda \frac{az}{z-a},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Lemme 26. *Soient $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}$. Il existe un unique automorphisme conforme f de $\mathbb{H}$ dont le prolongement au bord satisfait $f(\infty) = \infty$, $f(x_1) = \tilde{x}_1$ et $f(x_2) = \tilde{x}_2$.*

Démonstration. Les automorphismes conformes de $\mathbb{H}$ avec $f(\infty) = \infty$ sont ceux de la forme $f(z) = x + \lambda z$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Pour satisfaire les deux autres conditions, il faut prendre

$$\lambda = \frac{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}{x_2 - x_1}, \qquad x = \tilde{x}_1 - \lambda x_1.$$ □

Proposition 26. *Soient $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{D}$, 2 à 2 distincts, et $w_1, w_2, w_3 \in \partial\mathbb{D}$, 2 à 2 distincts. Supposons de plus que les triplets z_1, z_2, z_3 et w_1, w_2, w_3 sont chacun ordonnés dans le sens trigonométrique sur le cercle $\partial\mathbb{D}$. Alors in existe un unique automorphisme conforme de $\mathbb{D}$ tel que $f(z_i) = w_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Démonstration. Soit
$$\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$
ψ induit une transformation conforme de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{D}$. Soit f un automorphisme conforme de $\mathbb{D}$. On pose
$$g(z) = \psi^{-1}(\bar{w}_3 f(z_3\psi(z))).$$
g est alors un automorphisme conforme de $\mathbb{H}$, et f satisfait $f(z_i) = w_i$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$ si et seulement si $g(\infty) = \infty$ et
$$g(\psi^{-1}(z_1\bar{z}_3)) = \psi^{-1}(w_1\bar{w}_3), \qquad g(\psi^{-1}(z_2\bar{z}_3)) = \psi^{-1}(w_2\bar{w}_3).$$
On peut de plus vérifier que
$$\psi^{-1}(z_1\bar{z}_3) < \psi^{-1}(z_2\bar{z}_3), \qquad \psi^{-1}(w_1\bar{w}_3) < \psi^{-1}(w_2\bar{w}_3).$$
Donc d'après le Lemme 26, un tel g satisfaisant les trois conditions existe et est unique, et donc f existe et est unique également. □

Le résultat suivant n'est pas un rappel. Il s'agit en réalité du résultat le plus avancé de ce chapitre. Nous allons admettre. Pour une preuve, voir [Pom92, Chapitre 2].

Proposition 27. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, avec $D \neq \mathbb{C}$. Soit $z \in \partial D$. Supposons qu'au voisinage de z, ∂D est une courbe continue simple, c'est-à-dire sans points multiples. Alors pour toute transformation conforme f de D vers $\mathbb{D}$, f se prolonge par continuité à un voisinage de z dans $\overline{D}$.*

Enfin, notons que la Proposition 26 s'étend à d'autres domaines simplement connexes.

Proposition 28. *Soient D et $\widetilde{D}$ deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$, avec $D \neq \mathbb{C}$ et $\widetilde{D} \neq \mathbb{C}$. Soient z_1, z_2, z_3 trois points 2 à 2 distinct sur ∂D et $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ trois points 2 à 2 distinct sur $\partial\widetilde{D}$. On suppose que z_1, z_2, z_3, respectivement $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$, se placent dans l'ordre trigonométrique sur ∂D, respectivement $\partial\widetilde{D}$. On suppose également qu'au voisinage de z_1, z_2 et z_3, respectivement $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ et $\tilde{z}_3$, le bord ∂D, respectivement $\partial\widetilde{D}$, est une courbe continue simple. Alors il existe une unique transformation conforme f de D vers $\widetilde{D}$ qui se prolonge par continuité à un voisinage de z_1, z_2 et z_3 dans $\overline{D}$, avec pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $f(z_i) = \tilde{z}_i$.*