

Invariance conforme en mécanique statistique : dominos, percolation et SLE

Cédric Boutillier, Titus Lupu

13 avril 2023

Table des matières

1. Invariance conforme en mécanique statistique	4
2. Pavages par dominos	5
2.1. Définitions	5
2.1.1. configurations de dimères et couplages parfaits	6
2.1.2. Fonction de hauteur	6
2.1.3. Fonction de hauteur et pavabilité	8
2.2. Fonction de partition et théorème de Kasteleyn	8
2.2.1. Fonction de partition	8
2.2.2. Statistiques locales	10
2.3. Matrice de Kasteleyn et laplacien	11
2.3.1. Arbres couvrants	11
2.3.2. Arbre dual	12
2.3.3. Domaines temperleyens	13
2.3.4. Bijection de Temperley	13
2.3.5. Une notion d'holomorphie discrète	15
2.3.6. Asymptotiques de l'inverse de K	17
2.4. Invariance conforme de la fonction de hauteur	18
2.4.1. Contexte	18
2.4.2. Le champ libre gaussien	18
2.4.3. Énoncé de la convergence	18
2.4.4. Démonstration	19
3. Percolation sur le réseau triangulaire	20
3.1. Introduction	20
3.1.1. Autodualité de la percolation par site du réseau triangulaire à $p = \frac{1}{2}$	21
3.1.2. Processus d'exploration	24
3.2. Inégalités de Harris-FKG	24
3.3. Théorie de Russo-Seymour-Welsh	26
3.3.1. Croisement d'un grand hexagone	26
3.3.2. Croisement d'un grand « rectangle »	27
3.3.3. Circuit ouvert dans un « anneau »	29
3.4. Formule de Cardy	30
3.4.1. Présentation de la formule de Cardy	30
3.4.2. Un résultat de compacité	31
3.4.3. Le lemme de changement de couleur	32
3.4.4. Holomorphie à la limite	33

3.4.5.	Identification des fonctions limite	35
3.4.6.	Le cas d'un domaine général	38
4.	Évolutions de Schramm–Loewner	39
4.1.	Théorie de Loewner déterministe	39
4.1.1.	Invariance conforme du mouvement brownien en dimension 2 et noyaux de Poisson	39
4.1.2.	Enveloppes et capacité de demi-plan	43
4.1.3.	Deux estimées	46
4.1.4.	Famille d'enveloppes à croissance locale et équation de Loewner . .	50
4.1.5.	Familles croissantes d'enveloppes à partir de fonctions pilotes . . .	54
4.2.	Processus SLE	58
4.2.1.	Définition, invariance conforme et propriété de Markov domaniale	58
4.2.2.	Autres propriétés des processus SLE	62
4.2.3.	Limites d'échelle de modèles discrets	63
A.	Analyse complexe et transformations conformes	65
A.1.	Fonctions holomorphes et théorème de Morera	65
A.2.	Indice, intégrale de Cauchy et développement en série entière	66
A.3.	Équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques conjuguées . . .	67
A.4.	Principe de réflexion de Schwarz	69
A.5.	Transformations conformes	70
B.	Pavages par dominos	73
B.1.	Structure de treillis des pavages par dominos	73
B.2.	Démonstration du théorème de Kasteleyn	73
B.3.	Matrix-tree theorem	73
B.4.	Bijection de Temperley	73

1. Invariance conforme en mécanique statistique

2. Pavages par dominos

Nous traitons dans ce chapitre un cas particulier de la famille des *modèles de dimères*. Certaines des propriétés présentées ici sont en fait générales et valables pour tous les modèles de dimères. Certaines démonstrations ont une version simplifiée dans le cas spécifique des dominos. D'autres propriétés sont plus spécifiques aux pavages par dominos et ne se généralise pas aux autres modèles de dimères.

Pour plus d'informations sur les modèles de dimères en général, voir par exemple XXX.

2.1. Définitions

Le *réseau carré* est le graphe planaire dessiné (plongé) dans le plan de sorte que son ensemble de sommets est donné par les points de coordonnées $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ et les arêtes relient des sommets à distance L^1 égale à 1. Par léger abus de notation, nous notons \mathbb{Z}^2 ce réseau. Comme graphe plongé, il possède des *faces*, qui sont des translatsés du carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$.

Le *dual* $(\mathbb{Z}^2)^*$ du réseau carré, obtenu en mettant un *sommet dual* par face (au centre par exemple), et en les joignant deux à deux par une *arête duale* si les faces correspondantes sont bordées par la même arête. Ce réseau dual est en fait *isomorphe* à \mathbb{Z}^2 , et obtenu à partir de celui-ci par une translation de vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Un *domino* est l'union de deux carrés unité adjacents dans Soit R une région du plan composée de l'union de deux faces du réseau carré dual¹. Un domino peut être *horizontal* ou *vertical*. Si on prend en compte une possible coloration en échiquier du réseau dual, il y a en fait quatre types possibles de dominos suivant la position de la case noire dans le domino.

On appelle ici *région* tout domaine connexe obtenu comme l'union de faces (fermées) du réseau carré dual.

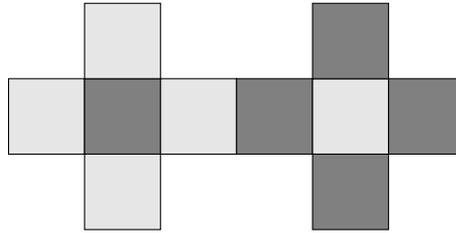
Un *pavage par dominos* d'une région R est un ensemble de dominos $\mathcal{D} = \{D_i; i \in I\}$, tel que l'union $\bigcup_{i \in I} D_i$ est égale à R , et telle que l'intersection des intérieurs des D_i est vide. Les dominos D_i recouvrent donc toute la région R sans laisser de trous, et sans se chevaucher (le seul contact autorisé est le long d'arête).

Exercice 1.

1. Montrer que si R a au moins un pavage par dominos, alors son aire (nombre de carrés) est paire.

1. Il s'agit ici d'une convention de choisir le dual ou pas. Il sera commode dans la suite que les coordonnées des centres des carrés formant les dominos soient entiers, et non demi-entiers. C'est ce qui justifie notre convention ici.

2. Montrer que si R a au moins un pavage par dominos, alors R a autant de faces blanches que noires dans le coloriage en échiquier.
3. Montrer que la région suivante n'a pas de pavages par dominos.



4. Quel est le nombre f_n de pavages par dominos de la région rectangulaire $2 \times n$?

2.1.1. configurations de dimères et couplages parfaits

Appelons G le *dual interne* de R : G a un sommet (dans \mathbb{Z}^2) par carré unité de R , et deux sommets de G sont reliés par une arête dans G si les carrés unité sont adjacents. G est un sous-graphe de \mathbb{Z}^2 . Cette dualité permet d'encoder un domino dans R par une arête de G , reliant les sommets correspondant aux faces couvertes par ce domino. La contrainte d'avoir un pavage par dominos dans R se traduit par la donnée d'un sous-ensemble d'arêtes de G tel que chaque sommet de G est incident à exactement une arête de ce sous-ensemble. Un tel sous-ensemble $M \subset E(G)$ est appelé en théorie des graphes un *couplage parfait* (*perfect matching en anglais*). En mécanique statistique, on utilise plus volontiers la terminologie de *configuration de dimères* : chaque arête de M représente une molécule diatomique (un *dimère*) qui se serait déposé sur la surface d'un matériau représenté par le graphe planaire G . C'est ainsi que le modèle a été introduit dans la littérature physique par XXX.

Le graphe G est planaire et biparti. Nous allons voir dans la suite que ces deux propriétés permettent d'obtenir des résultats sur ces couplages parfaits à l'aide de méthodes d'algèbre linéaire.

2.1.2. Fonction de hauteur

Il est possible de donner une troisième description des objets qui vont nous intéresser, après celle en terme des pavages par dominos et celle duale en termes de dimères. Celle-ci encode un pavage par domino par une *fonction de hauteur*, définie sur les sommets de R , et à valeurs entières. Alors que cette description semble connue des physiciens depuis plus longtemps, elle a été introduite en mathématique par Thurston pour les dimères bipartis, et des modèles de pavages plus généraux.

On définit une *fonction de hauteur* $h^{\mathcal{D}}$ associé à un pavage \mathcal{D} de la façon suivante, et de proche en proche : la fonction de hauteur augmente de 1 lorsque on tourne au tourne d'une face blanche (respectivement d'une face noire) dans le sens trigonométrique² (resp. horaire) sans traverser de dominos de \mathcal{D} . On vérifie qu'alors que nécessairement, la hauteur saute de ± 3 lorsqu'on longe une arête de R qui traverse un domino.

Vérifier la convention

2. C'est à dire que quand on longe l'arête, la face blanche est à notre gauche.

Lemme 1. Si R est simplement connexe (sans trous), alors $h^{\mathcal{D}}$ est bien définie, à une constante additive près, fixée si on se donne la valeur de $h^{\mathcal{D}}$ à un sommet particulier.

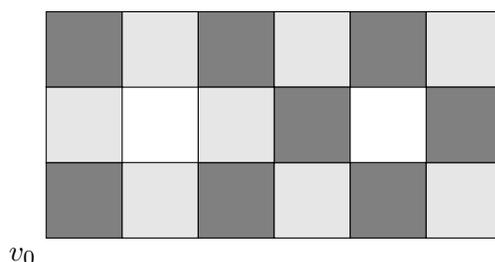
Démonstration. Il faut donc vérifier que si on part du même point de départ v_0 , la valeur donnée à un sommet v ne dépendra pas du chemin emprunté. Si R est simplement connexe, deux chemins joignant v_0 à v délimite un sous-ensemble de faces carrées qui peut être couvert par des dominos. Il suffit de montrer qu'en calculant les increments de la fonction de hauteur autour d'un domino, on retombe sur la valeur initiale. Ainsi on peut déformer le premier contour en le deuxième en le faisant contourner un par un les dominos de la région, sans changer la valeur finale de la fonction de hauteur.

Regardons donc maintenant un domino : en faisant le tour dans le sens trigonométrique, on suivra trois arêtes autour d'une face blanche et trois arêtes autour d'une face noire. La hauteur sera donc revenue à sa valeur initiale au bout d'un tour, après avoir augmenté et diminué trois fois. \square

Une démonstration plus abstraite et qui se généralise est la suivante XXX.

Remarque 1. La fonction de hauteur au bord ne dépend que de la géométrie de la région, et non pas du pavage considéré.

Exercice 2. Vérifier que la fonction de hauteur de n'importe quel pavage de la région ci-dessous n'est pas bien définie même en fixant la valeur 0 en v_0 , car elle possède des *périodes* autour de chaque trou.



Exercice 3. Calculer la hauteur au bord pour le rectangle $n \times m$ et du diamant aztèque de taille n . XXX

Dominos comme projection d'empilements

Un modèle très proche des pavages par dominos est celui des pavages par losanges avec des angles de 60 et 120 degrés. Un losange est l'union de deux faces adjacentes du réseau triangulaire. Si on regarde suffisamment longtemps le pavage d'une région simplement connexe avec des losanges, alors on verra assez vite apparaître ce pavage comme la projection d'un *paysage de cubes*. Si on construit une fonction de hauteur avec la même règle, on se rend compte que celle-ci reconstruit la troisième coordonnées « perdue » dans la projection, selon la grande diagonale du cube, orthogonale au plan de la projection. On obtient alors que l'ensemble des pavages est connexe par suite d'opérations de *flips hexagonaux*, consistant à tourner de 180 degrés 3 losanges formant un petit hexagone :

en effet, cette opération revient en termes de paysages de cubes à ajouter ou retirer un cube.

De même, les pavages par dominos peuvent aussi être interprétés comme la projection d'empilements, même si c'est plus difficile à voir.

2.1.3. Fonction de hauteur et pavabilité

Fournier
P/NP

2.2. Fonction de partition et théorème de Kasteleyn

La première question après la pavabilité d'une région R est celle du dénombrement des configurations : de combien de façons peut-on paver R avec des dominos ?

Le théorème de Kasteleyn [Kas61, Kas63] répond à cette question. La version que nous donnons ici est due à Percus [Per69] pour se ramener à un déterminant dans le cas biparti et à Kuperberg [Kup98] pour l'utilisation de phases complexes plutôt que de signes.

2.2.1. Fonction de partition

Plutôt que simplement calculer le nombre de pavages possible d'une région, nous allons résoudre un problème plus général. Nous utiliserons dans cette section le formalisme en termes de dimères, et des couplages parfait du graphe G , dual de la région à paver.

Définition 1. Une *fonction de poids* $\nu = (\nu)_{e \in E(G)}$ est l'attribution d'un nombre réel strictement positif ν_e à chaque arête e de G .

Le *poids d'une configuration de dimères* M de G est le produit des poids des arêtes appartenant à cette configuration.

La *fonction de partition* Z_ν associée à la fonction de poids ν est la somme des poids de toutes les configurations de dimères de G .

Supposons que le graphe biparti G admet au moins une configuration de dimères. Cela signifie en particulier que G possède le même nombre de sommets noirs et de sommets blancs. Numérotons les sommets de chaque couleur de 1 à n . Chaque configuration de dimères réalise une bijection entre les sommets blancs et les sommets noirs, qui peut être encodée par une permutation de \mathfrak{S}_n . Si on étend par 0 la définition de ν à des paires de sommets blanc/noir non voisins, on peut réécrire la fonction de partition Z_ν ainsi :

$$Z_\nu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \nu_{w_j, b_{\sigma(j)}}, \quad (2.1)$$

ce qui ressemble fortement au développement d'un déterminant, modulo la contribution de la signature de σ . Nous cherchons à forcer cette ressemblance en définissant une nouvelle matrice K dont les coefficients diffèrent de ν uniquement par une phase : pour

chaque arête e entre un sommet blanc w et un sommet noir w , il existe un nombre complexe de module 1 $\zeta_{w,b}$ tel que $K_{w,b} = \zeta_{w,b}\nu_{w,b}$.

Définition 2. On appelle *phase de Kasteleyn* un choix de ζ tel que pour toute face f interne de degré $d(f) = 2p$, bordé par des sommets $w_1, b_1, \dots, w_p, b_p$, le produit alterné autour de f est égal à

$$\frac{\zeta_{w_1, b_1} \cdots \zeta_{w_p, b_p}}{\zeta_{b_1, w_2} \cdots \zeta_{b_p, w_1}} = (-1)^{p-1}. \quad (2.2)$$

La matrice K construite à partir d'une phase de Kasteleyn s'appelle *matrice de Kasteleyn*.

La première question est de savoir si une telle phase existe. La réponse a été donnée par Kasteleyn

Proposition 1. *Soit G un graphe planaire biparti. Il existe alors une phase de Kasteleyn pour G . Elle est unique modulo l'opération consistant à multiplier le coefficient des arêtes autour d'un sommet donné par la même phase.*

Théorème 1 ([Kas61]). *Soit G un graphe fini planaire biparti, et K une matrice de Kasteleyn construite à partir de la fonction de poids ν et de la phase ζ . Alors la fonction de partition Z_ν est obtenue à une phase près par le déterminant de K : il existe un nombre complexe η de module 1, dépendant de la numérotation des sommets blancs et noirs, et de ζ , tel que*

$$Z_\nu = \eta \det K.$$

Nous donnons ici une preuve simplifiée dans le cas du pavage par dominos d'une région simplement connexe, qui utilise une propriété particulière de ces pavages.

Lemme 2 (accessibilité par *flips*). *Soit R une région simplement connexe pavable par dominos. Étant donnés deux pavages, on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'opérations élémentaires (flips) consistant à retourner deux dominos voisins antiparallèles.*



Autrement dit, le graphe dont les sommets sont les pavages, et les arêtes connectent deux pavages différant par un flip, est un graphe connexe.

Démonstration du théorème 1. Lorsque l'on écrit le déterminant de K comme une somme sur les permutations

$$\det K = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left((-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \zeta_{w_j, b_{\sigma(j)}} \right) \prod_{j=1}^n \nu_{w_j, b_{\sigma(j)}}, \quad (2.3)$$

et que l'on compare avec (2.1), on s'aperçoit que pour avoir l'égalité voulue, il suffit de montrer que pour toutes les permutations contribuant à la somme, la signature de σ multipliée par le produit des coefficients de ζ est le même.

Chaque permutation contribuant provient d'un pavage par domino. Comme le graphe des pavages est connexe, il suffit de comparer les contributions de deux configurations σ et τ différant d'un flip impliquant (quitte à renuméroter les sommets) les sommets w_1, b_1, w_2, b_2 . Cela implique en particulier que $\sigma \circ \tau^{-1}$ est la transposition (1 2). Donc $(-1)^\sigma = -(-1)^\tau$. D'autre part, par la condition de Kasteleyn, le produit alterné

$$\frac{\zeta_{w_1, b_1} \zeta_{w_2, b_2}}{\zeta_{w_1, b_2} \zeta_{w_2, b_1}} = -1.$$

Par conséquent,

$$(-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \zeta_{w_j, b_{\sigma(j)}} = (-1)^\tau \prod_{j=1}^n \zeta_{w_j, b_{\tau(j)}}. \quad \square$$

2.2.2. Statistiques locales

Maintenant qu'on sait dénombrer les configurations de dimères, on peut se poser des questions probabilistes.

Définition 3. La *mesure de Boltzmann* associée à la fonction poids ν est la mesure de probabilité \mathbb{P}_ν qui attribue à chaque configuration une probabilité proportionnelle à son poids :

$$\mathbb{P}_\nu[M] = \frac{\nu(M)}{Z_\nu}.$$

Exercice 4. Montrer que si on multiplie simultanément les poids des arêtes attachées à un sommet donné par la même constante, alors la mesure de Boltzmann reste inchangée. En déduire que la mesure est caractérisée par le produit alterné des poids autour de chaque face de G .

Théorème 2 (Kenyon). Soit un G graphe fini planaire biparti, avec une fonction de poids ν , tels que $Z_\nu > 0$.

Soient $e_1 = (w_{m_1}, b_{n_1}), \dots, e_k = (w_{m_k}, b_{n_k})$, k arêtes distinctes de G . Alors la probabilité sous la mesure de Boltzmann \mathbb{P}_ν que les arêtes e_1, \dots, e_k soient présentes dans la configuration de dimères aléatoire est

$$\mathbb{P}_\nu[e_1, \dots, e_k] = \left(\prod_{j=1}^k K_{w_{m_j}, b_{n_j}} \right) \times \det_{1 \leq i, j \leq k} (K_{b_{n_i}, w_{m_j}}^{-1}).$$

Exercice 5. Vérifier directement que si on multiplie à gauche et à droite une matrice de Kasteleyn par des matrices diagonales à coefficients (diagonaux) dans \mathbb{C}^* , alors on obtient à nouveau une matrice de Kasteleyn pour une nouvelle fonction de poids définissant la même mesure de Boltzmann. Montrer que le membre de droite de l'égalité est effectivement invariant par cette transformation.

Démonstration. La probabilité en question est donnée par la somme des poids de toutes les configurations contenant les e_i divisée par la fonction de partition. La fonction de

partition est égale à $\eta \det K$. En reprenant l'argument de la démonstration du théorème 1, on voit que le numérateur sera égal à la même somme dans le développement du déterminant mais où on ne garde que les permutations envoyant m_j sur n_j pour tout j . Cela peut s'écrire comme le déterminant d'un mineur de K :

$$\eta \left(\prod_{j=1}^k K_{w_{m_j}, b_{n_j}} \right) \times (-1)^{\sum_j m_j + n_j} \det_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq n_1, \dots, n_k \\ j \neq m_1, \dots, m_k}} K_{w_i, b_j}.$$

La formule de Jacobi, qui étend pour des mineurs quelconques la formule bien connue pour l'inverse d'une matrice à partir de sa comatrice dit que le déterminant de la sous-matrice de K multiplié par le signe est exactement égal à $\det K$ multiplié par la sous-matrice « complémentaire » de K^{-1} où l'on se restreint aux lignes et aux colonnes qu'on a exclues dans le mineur de K . \square

Si on considère la configuration de dimères aléatoire sous \mathbb{P}_ν comme un processus ponctuel sur les arêtes de G , on voit que les fonctions de corrélation à k points s'expriment avec un déterminant de taille k d'un noyau $J_{e, e'} = K_{w, b} K_{b, w'}^{-1}$, avec $e = (w, b)$, $e' = (w', b')$. On a donc affaire à un processus *déterminantal*.

Pour toute la suite du cours, les graphes considérés correspondront à des régions simplement connexes pavables par dominos, et la fonction de poids sera constante égale à 1. La mesure de Boltzmann associée sera la mesure uniforme.

2.3. Matrice de Kasteleyn et laplacien

2.3.1. Arbres couvrants

Nous faisons une petite digression au sujet d'un autre modèle de mécanique statistique : le modèle des arbres couvrants uniformes.

Définition 4. Soit G un graphe fini (pas forcément planaire ni biparti). Un arbre couvrant T de G est sous-graphe couvrant de (avec le même ensemble de sommets que) G connexe sans cycles.

Proposition 2.

1. Les arbres couvrants sont maximaux parmi les sous-graphes sans-cycles (on ne peut ajouter d'arêtes sans créer un cycle).
2. Les arbres couvrants sont minimaux parmi les sous-graphes connexes (on ne peut enlever d'arêtes sans disconnecter des sommets).
3. Si G a n sommets, alors un arbre couvrant de G possède exactement $n - 1$ arêtes.
4. G admet au moins un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.

Définition 5. On définit le laplacien combinatoire $\Delta = \Delta_G$ du graphe G comme la matrice dont les lignes et les colonnes sont indexées par les sommets de G , et dont les coefficients sont donnés par :

$$\Delta_{v,v'} = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ et } v' \text{ sont voisins,} \\ -\deg(v) & \text{si } v = v', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle que le degré $\deg(v)$ d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Avec notre convention, l'opérateur laplacien est négatif : pour toute fonction f sur les sommets, $\langle f, \Delta f \rangle \leq 0$. Étant symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormale. Les valeurs propres sont négatives ou nulles.

Proposition 3. *Le noyau de Δ est constitué des fonctions localement constantes (constantes sur chaque composante connexe).*

Le résultat suivant est dû à Kirchhoff [Kir47] à la fin du 19e siècle :

Théorème 3 (Matrix-tree theorem). *Soit v_0 un sommet de G . Le nombre d'arbres couvrants de G est donné par*

$$Z_{tree}(G) = \det_{v,w \neq v_0} (-\Delta).$$

Démonstration. Il existe beaucoup de démonstrations différentes de ce résultat. Par exemple par la factorisation de $-\Delta = M \cdot M^T$ avec M la *matrice d'incidence* de G pour une orientation arbitraire de G , puis la formule de Cauchy–Binet pour calculer le membre de droite comme une somme sur tous les $(n-1)$ -uplets d'arêtes de G . Il reste à vérifier que les arbres donnent ± 1 , et les autres donnent 0. \square

Exercice 6. Calculer le nombre d'arbres couvrant du graphe complet à n sommets (formule de Cayley).

En utilisant ce résultat pour l'énumération des arbres couvrants et la formule de Jacobi, on peut montrer que l'arbre couvrant uniforme est un processus déterminantal sur les arêtes de G , dont le noyau est donné par l'*impédance de transfert* [BP93].

2.3.2. Arbre dual

Supposons que G est planaire. Soit G^* son dual (externe), avec un sommet par face (incluant la face externe). Alors on peut définir une notion de *dual* pour un arbre couvrant T , et plus généralement pour une collection d'arêtes A de G . Le dual A^* de A est défini par la condition suivante :

$$e^* \in A^* \iff e \notin A.$$

On peut alors vérifier que

- A est connexe si et seulement si A^* est sans cycle,
 - A est sans cycle si et seulement si A est connexe.
- (la deuxième propriété découlant de la première appliquée à G^* en utilisant que $A^{**} = A$.)
On en déduit donc le lemme suivant :

Lemme 3. *Si T est un arbre couvrant de G , alors T^* est un arbre couvrant de G^* .*

2.3.3. Domaines temperleyens

On s'intéresse ici aux cas où le graphe G est un sous-graphe connexe, et « sans trous » de $(2\mathbb{Z})^2$ (l'explication du facteur 2 viendra vite). Le dual (externe) de G , noté G^* est un sous-graphe de $(2\mathbb{Z} + 1)^2$ plus un sommet dual supplémentaire, noté f_0 , représentant la face externe de G .

Le *graphe médial* G^{med} de G est un graphe biparti défini de la manière suivante :

- Ses sommets sont de deux types :
 - des sommets noirs correspondant aux sommets (\bullet) et aux faces (\blacklozenge) de G
 - des sommets blancs correspondant aux arêtes de G
- il y a une arête entre un sommet noir et un sommet blanc si l'arête correspondant au sommet blanc est incidente au sommet ou à la face de G correspondant au sommet noir.

Graphiquement, le graphe médial G^{med} s'obtient en superposant les dessins de G et G^* et en plaçant les sommets blancs aux intersections entre chaque arête primale de G et son arête duale.

Lemme 4. *Le graphe G^{med} a un excès de deux sommets noirs.*

Démonstration. On applique la formule d'Euler au complexe simplicial défini par le plongement planaire de G , avec ses sommets faces et arêtes. On alors

$$|\text{sommets}| + |\text{faces}| = |\text{arêtes}| + 2.$$

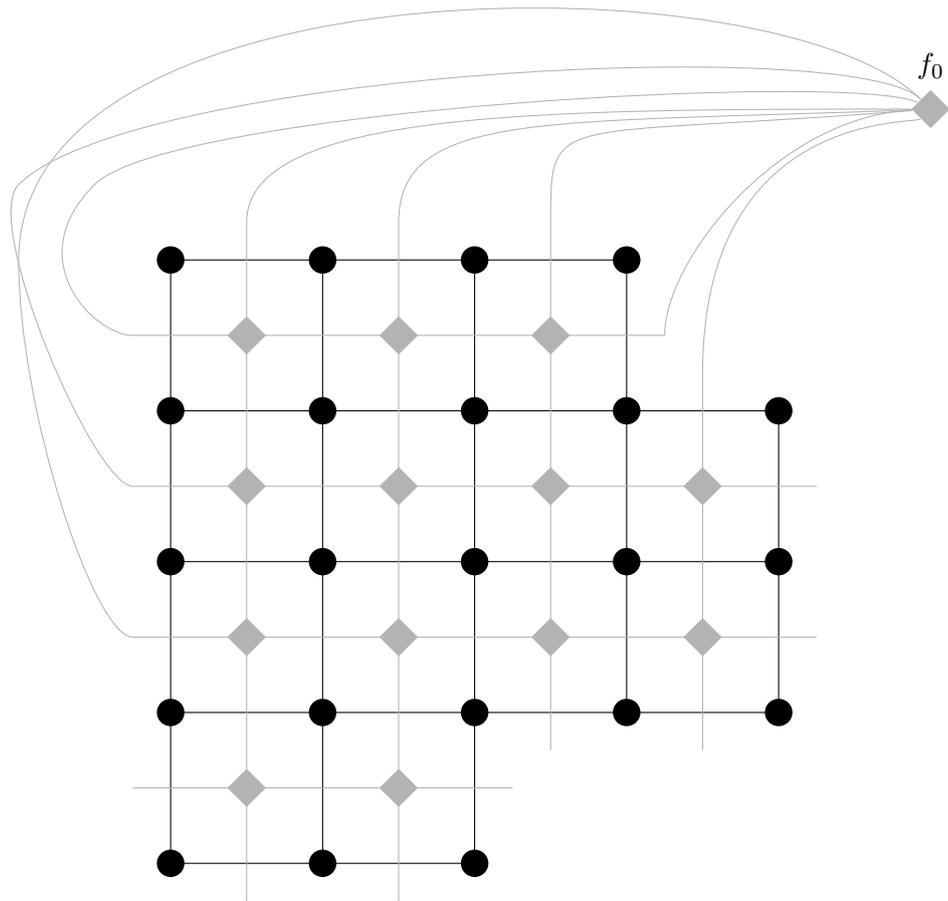
Le nombre total de sommets et de faces de G est exactement le nombre de sommets noirs de G . Le nombre d'arêtes est exactement le nombre de sommets blancs. \square

On fixe un sommet v_0 de G situé au bord de la face externe f_0 . On note G^D le graphe obtenu en retirant de G^{med} les sommets noirs correspondant à v_0 et f_0 , ainsi que toutes les arêtes qui y sont reliées.

Définition 6. On appelle *sous-graphe temperleyen* de \mathbb{Z}^2 tout graphe de la forme G^D en suivant la construction ci-dessus.

2.3.4. Bijection de Temperley

Le graphe G^D est non seulement équilibré, mais possède des configurations de dimères, comme le montre le théorème suivant.



Théorème 4 (Temperley). *Il existe une bijection locale explicite entre les arbres couvrants de G et les configurations de dimères de G^D (ou les pavages par dominos de la région R correspondante).*

Démonstration. Tout d'abord, fixons un arbre couvrant T de G et construisons une configuration de dimères de G^D . On commence par orienter les arêtes de l'arbre T vers le sommet v_0 qui sert de racine. On a alors la propriété qu'il y a *exactement une* arête sortante de chaque sommet de G différent de v_0 . Cela donne une manière d'associer dans G^D chaque sommet noir provenant d'un sommet de G avec un sommet blanc. On procède de la même façon avec l'arbre dual T^* qu'on oriente vers f_0 . Tous les sommets noirs sont ainsi reliés à un voisin blanc. Un sommet blanc n'est pas atteint deux fois car il correspond soit à une arête de T , soit une arête duale de T^* . On obtient donc une configuration de dimères de G^D .

Réciproquement, si M est une configuration de dimères de G^D , on construit un sous-graphe T de G en utilisant la correspondance décrite au dessus : pour chaque sommet de G , on met dans T l'arête qui est dans le prolongement du dimère attaché à ce sommet. On obtient un sous-graphe T de G qui contient qui a une arête de moins que le nombre de sommets de G . Pour montrer que c'est un arbre, il suffit de montrer que T n'a pas de cycle. Si T avait un cycle, la formule d'Euler appliquée au sous-graphe de G à l'intérieur du cycle (vu comme dessiné dans un disque) implique qu'à l'intérieur le nombre de sommets et de faces de G est égal au nombre d'arêtes plus 1. Ceci est en contradiction avec le fait que cette partie correspond dans G^D à un sous-graphe qui doit avoir un couplage parfait. T est donc un arbre couvrant. \square

En particulier, la bijection de Temperley nous donne une égalité en module entre le déterminant du laplacien de G , privé de la ligne/colonne associée à v_0 , et celui de la matrice de Kasteleyn sur le graphe G^D . Nous allons voir que le lien entre ces opérateurs est plus fort qu'une égalité de déterminants.

2.3.5. Une notion d'holomorphie discrète

Notations. Nous allons avoir besoin dans la suite de quelques notations supplémentaires pour un graphe temperleyen G^D . L'ensemble de ses sommets s'écrit comme l'union disjointe $B \sqcup W$ où B (resp. W) est l'ensemble des sommets noirs (resp. blancs) de G^D . Ces sous-ensembles peuvent eux-même être partitionnés

$$B = B_0 \sqcup B_1, \quad W = W_0 \sqcup W_1,$$

avec

- B_0 l'ensemble des sommets noirs correspondant à des faces de G
- B_1 l'ensemble des sommets noirs correspondant à des sommets de G
- W_0 l'ensemble des sommets blancs correspondant aux arêtes verticales de G
- W_1 l'ensemble des sommets blancs correspondant aux arêtes horizontales de G

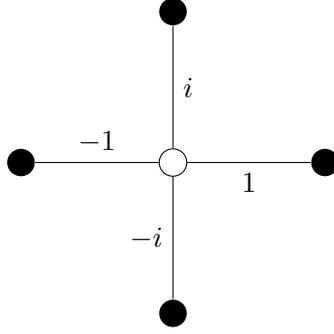


FIGURE 2.1. – Coefficients de la matrice de Kasteleyn pour un domaine temperleyen autour d’un sommet blanc. La valeur des coefficients est indiquée au voisinage de l’arête connectant les sommets auxquels correspond le coefficient.

Matrice de Kasteleyn sur G^D Pour les domaines temperleyens, nous adoptons la convention pour la matrice de Kasteleyn décrite sur la figure 2.1. On vérifie aisément que la condition de Kasteleyn (2.2) est satisfaite autour des deux types de faces carrées.

Soit F une fonction définie sur les sommets noirs de G_D . Alors KF est une fonction sur les sommets blancs. Si on regarde la valeur de KF à un sommet blanc w de coordonnées (x, y) (avec $x + y$ impair d’après notre choix de coloration), on a

$$KF(x, y) = [F(x + 1, y) - F(x - 1, y)] + i [F(x, y + 1) - F(x, y - 1)]$$

Si f (resp. g) est une fonction à valeurs réelles définie sur les sommets noirs de B_0 (resp. B_1), on construit $F = f + ig$, à valeurs complexe sur tous les sommets noirs.

L’évaluation de KF ci-dessus écrite pour un tel F , en un sommet w appartenant à W_0 peut se réécrire

$$[K(f + ig)(w) = (f(w + 1) - f(w - 1)) - (g(w + i) - g(w - i)).$$

La première parenthèse du côté droit peut être interprétée comme une dérivée discrète horizontale de f , $\partial_x f$, alors que la deuxième ressemble à une dérivée verticale discrète de g . La formule pour un $w \in W_1$ a une forme similaire et on obtient que $KF(w) = 0$ revient à dire que :

$$\begin{cases} \partial_x f = \partial_y g & \text{si } w \in W_0, \\ \partial_y f = -\partial_x g & \text{si } w \in W_1, \end{cases}$$

ce qui est une version discrète des équations de Cauchy-Riemann.

Définition 7. On dit que $F \in \mathbb{C}^B$ est holomorphe discrète si

- $F|_{B_0}$ est réelle (joue le rôle de f),
- $F|_{B_1}$ est imaginaire pure (joue le rôle de ig),
- $KF = 0$.

Par abus de notation on dira aussi que F est holomorphe discrète si elle vérifie le troisième point, mais que F est réelle (resp. imaginaire pure) sur B_1 (resp. B_0).

Une bonne partie de l'analyse complexe se transporte dans ce cadre discret.

Caractérisations de l'inverse de K À partir de maintenant, nous notons C pour l'inverse de la matrice de Kasteleyn K étendue à toutes les paires de sommets de sorte que :

- $C(v_1, v_2) = C(v_2, v_1)$ pour tous les sommets v_1, v_2 ,
- Si v_1 et v_2 sont de même couleur, $C(v_1, v_2) = 0$.

La matrice C est appelée *fonction de couplage*.

Lemme 5 (holomorphie).

Lemme 6 (harmonicité).

2.3.6. Asymptotiques de l'inverse de K

dans le plan tout entier Appelons C_0 la fonction de couplage sur le plan tout entier.

Elle est donnée par la formule suivante [Ken97]

$$C_0(0, x + iy) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0, 2\pi]^2} \frac{e^{i(x\theta - y\varphi)}}{2i \sin(\theta) + 2 \sin(\varphi)} d\varphi d\theta. \quad (2.4)$$

Lemme 7.

$$C_0(0, z) = \begin{cases} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) & \text{si } z \in B_0, \\ i \operatorname{Im} \frac{1}{\pi z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) & \text{si } z \in B_1. \end{cases}$$

Démonstration. Par l'analyse de Fourier, on peut montrer que $C_0(0, z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$, et a de plus un défaut d'harmonicité, donné par le lemme 6.

Si on note h_0 la fonction de Green du plan tout entier. Alors on a d'après le lemme 6 que La fonction

$$w \mapsto h_0\left(0, \frac{w-1}{2}\right) - h_0\left(\frac{w+1}{2}\right) \quad (2.5)$$

a le même comportement que $\operatorname{Re}(C_0(0, w))$, donc elles sont égales.

De plus, on connaît précisément les asymptotiques de la fonction de Green sur \mathbb{Z}^2 :

Lemme 8. *Il existe une constante c_0 telle que pour $|v|$ suffisamment grand,*

$$h_0(0, v) = -\frac{1}{2\pi} \log |v| + c_0 + O\left(\frac{1}{|v|}\right).$$

Le raisonnement est similaire pour $z \in B_1$. □

dans le demi-plan

dans un domaine borné

2.4. Invariance conforme de la fonction de hauteur

2.4.1. Contexte

2.4.2. Le champ libre gaussien

Soit U un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Soit g_U la fonction de Green pour le laplacien (continu) sur U avec conditions aux bords de Dirichlet, c'est à dire la solution fondamentale de l'équation suivante pour tout $v \in U$:

$$\begin{cases} (-\Delta g_U(\cdot, v)) = \delta_v, \\ g_U(x, v) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in \partial U.$$

Définition 8. Le *champ libre gaussien* Φ_U est le processus gaussien centré dont la structure de covariance est donnée par la fonction de Green g_U .

Une façon de construire ce processus serait de considérer une base hilbertienne orthonormale $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions propres du laplacien (avec conditions aux bords de Dirichlet). Soit λ_n la valeur propre associée à f_n . Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de gaussiennes centrées réduites. On peut écrire alors :

$$g_U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_n} f_n(x) f_n(y),$$

et

$$\Phi_U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{\sqrt{-\lambda_n}} f_n(x).$$

C'est l'analogie bidimensionnel du pont brownien. Contrairement à ce qui se passe en dimension, la fonction de Green g_U est infinie sur la diagonale ($g_U(x, v) \simeq -\frac{1}{2\pi} \log |x - v|$ lorsque x est proche de v). Il en résulte que le champ libre sur U n'est pas une fonction aléatoire. En effet, si c'était le cas, sa valeur en un point intérieur v devrait être une variable aléatoire gaussienne dont la variance est donnée par $g_U(v, v)$, qui est infini. C'est donc plutôt une *distribution aléatoire*, et ce qu'on pourra évaluer, c'est l'action de cette distribution sur toute fonction lisse à support compact ψ : la variable $\langle \Phi_U, \psi \rangle$ est une gaussienne centrée, et la covariance entre $\langle \Phi_U, \psi_1 \rangle$ et $\langle \Phi_U, \psi_2 \rangle$ est donnée par la forme quadratique

$$V(\psi_1, \psi_2) := \iint_{U \times U} \psi_1(v_1) g_U(v_1, v_2) \psi_2(v_2) dv_1 dv_2.$$

2.4.3. Énoncé de la convergence

Soit Ω un domaine borné simplement connexe, avec un bord lisse par morceaux. Pour chaque entier $\epsilon > 0$ assez petit, on note Ω_ϵ une approximation de Ω (par l'intérieur pour des raisons techniques) par un graphe temperleyen sur $\epsilon\mathbb{Z}^2$. Soit v_ϵ le sommet noir (primal) de $\epsilon\mathbb{Z}^2$ qu'on a enlevé pour rendre Ω_ϵ temperleyen. On note aussi R_ϵ la région correspondant à Ω_ϵ sur laquelle les pavages par dominos sont duaux aux configurations

de dimères sur Ω_ϵ . On suppose que (v_ϵ) converge vers un point du bord de Ω noté d^* lorsque ϵ tend vers 0.

La fonction de hauteur h_ϵ des pavages par dominos sur R_ϵ , comme fonction sur les sommets de R_ϵ , peut être vue comme une distribution aléatoire de la façon suivante : si ψ est une fonction lisse à support compact, on a

$$\langle h_\epsilon, \psi \rangle = \epsilon^2 \sum_{v \in R_\epsilon} h_\epsilon(v) \psi(v).$$

On note de plus $\bar{h}_\epsilon = h_\epsilon - \mathbb{E}[h_\epsilon]$, qui peut être vu de façon similaire comme une distribution aléatoire.

Dans [?], article compagnon de [?], Kenyon démontre l'énoncé suivant.

Théorème 5. *Le champ aléatoire \bar{h}_ϵ converge en faiblement, au sens des distributions fini-dimensionnelles, vers le champ libre gaussien $\frac{4}{\pi} \Phi_U$.*

Cet énoncé signifie que pour tout $k \geq 1$, pour toutes fonctions lisses à support compact ψ_1, \dots, ψ_k , la loi jointe de $(\langle \bar{h}_\epsilon, \psi_1 \rangle, \dots, \langle \bar{h}_\epsilon, \psi_k \rangle)$ converge vers la loi d'un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\frac{16}{\pi^2} (V(\psi_i, \psi_j))_{1 \leq i, j \leq k}$.

2.4.4. Démonstration

Avant de regarder la fonction de hauteur h_ϵ moyennée contre une fonction à support compact, nous allons regarder la loi jointe de $\bar{h}_\epsilon(v_1^\epsilon), \dots, \bar{h}_\epsilon(v_k^\epsilon)$ où v_j^ϵ converge vers un point z_j pour tout $1 \leq j \leq k$ avec les z_j deux à deux disjoints.

La démonstration se fait en plusieurs étapes

1. obtenir une limite invariante conforme pour les moments des fluctuations de la hauteur
2. calculer explicitement les moments pour un domaine U particulier
3. conclure par invariance conforme obtenir la loi dans tous les domaines U simplement connexes

3. Percolation sur le réseau triangulaire

3.1. Introduction

La percolation est un modèle de physique statistique originellement introduit pour modéliser l'écoulement dans les milieux poreux. Son étude mathématique a été initiée dans l'article de Broadbent et Hammersley [BH57]. Dans ce cours nous n'étudierons pas la percolation en général. Pour cela nous reportons au cours de Thierry Lévy "Convergence de mesures, Grandes déviations, Percolation" [Lé21], Partie III. Nous recommandons également comme référence le livre de Grimmett [Gri99] sur ce sujet. Ici nous allons nous concentrer spécifiquement sur la percolation par sommets sur réseau triangulaire plan, en lien avec l'invariance conforme à la limite d'échelle et la preuve par Stanislav Smirnov [Smi01] de la formule de Cardy [Car92].

Pour formaliser, le réseau triangulaire va être le graphe non-orienté $\mathcal{T} = (\mathbb{T}, E)$, avec l'ensemble de sommets (ou sites) donné par

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} + e^{i\frac{\pi}{3}}\mathbb{Z},$$

et l'ensemble d'arêtes E donné par les paires $\{z, w\}$ où $z, w \in \mathbb{T}$ et $|z - w| = 1$. Ainsi, chaque sommet a 6 voisins et les faces de \mathcal{T} sont des triangles. Le dual planaire du réseau triangulaire est le réseau hexagonal $\mathcal{H} = \mathcal{T}^* = (\mathbb{T}^*, E^*)$, dont les faces sont des hexagones et où chaque sommet a 3 voisins. Les sommets de \mathcal{T} correspondent aux faces de \mathcal{T}^* et vice-versa. Voir Figure 3.1.

Définition 9. On se donne une famille i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli $(\omega_z)_{z \in \mathbb{T}}$, une par site, c.à.d. sommet, du réseau triangulaire, avec $\omega_z \in \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(\omega_z = 1) = p.$$

La famille $\omega = (\omega_z)_{z \in \mathbb{T}}$ est une *configuration de percolation* de paramètre p . Le *paramètre de percolation* p est dans $[0, 1]$. Lorsque $\omega_z = 1$, on dit que le site z est *ouvert*. Lorsque $\omega_z = 0$, on dit que le site z est *fermé*. On dit que la configuration $\omega = (\omega_z)_{z \in \mathbb{T}}$ *percole* lorsqu'il existe un chemin infini γ aux plus proches voisins sur \mathcal{T} , qui va à l'infini, le long duquel tous les sites sont ouverts. On dit qu'un site $z \in \mathbb{T}$ est *relié à l'infini* par ω , et on dénote cet événement par $\{z \xleftrightarrow{\omega} \infty\}$, si $\omega_z = 1$ et il existe un chemin infini γ aux plus proches voisins sur \mathcal{T} , reliant z à l'infini, le long duquel tous les sites sont ouverts.

Dans ces notes, nous allons représenter les sites du réseau triangulaire plutôt comme les faces du réseau hexagonal, et nous allons colorier une face en jaune si le site est ouvert, et en cyan s'il est fermé.

Comme vu par exemple dans le cours de Thierry Lévy [Lé21], il existe un paramètre de percolation critique $p_c \in (0, 1)$, tel que :

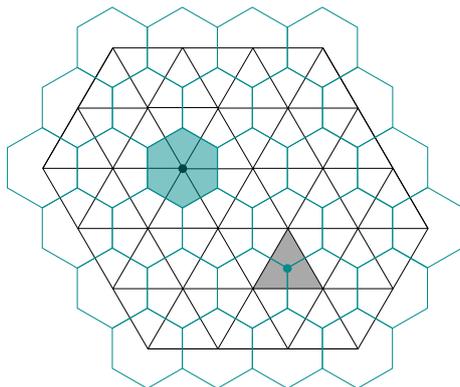


FIGURE 3.1. – Une portion du réseau triangulaire (en noir), et de son réseau dual, le réseau hexagonal (en bleu). Chaque sommet (resp. face) du réseau triangulaire correspond à une face (resp. sommet) du réseau hexagonal.

- pour tout $p \in (p_c, 1]$, la configuration ω percole presque sûrement ;
- pour tout $p \in [0, p_c)$, presque sûrement la configuration ω ne percole pas. De plus, la probabilité qu'un site, disons 0, soit relié à distance n par les sites ouverts décroît exponentiellement en n :

$$\mathbb{P}(0 \overset{\omega}{\longleftrightarrow} \partial B(0, n)) \leq e^{-c(p)n},$$

pour une valeur $c(p) > 0$ et dépendante de p .

La percolation par sites sur réseau triangulaire est un des rares exemples, avec la percolation par arêtes sur le réseau carré, où la valeur du paramètre critique p_c est connue explicitement. En fait, $p_c = \frac{1}{2}$. Cela découle d'une propriété d'autodualité présentée dans la Section 3.1.1. Pour le paramètre critique $p = p_c = \frac{1}{2}$, p.s. ω ne percole pas. De plus, on a une décroissance en puissance pour l'événement à un bras :

$$\mathbb{P}(0 \overset{\omega}{\longleftrightarrow} \partial B(0, n)) = n^{-5/48+o(1)}.$$

Ce résultat a été prouvé par Lawler, Schramm et Werner en utilisant la théorie des processus SLE [LSW02]. La conjecture d'universalité prédit que cet exposant $-5/48$ est le même pour les percolations critiques sur les autres réseaux 2D, pas seulement pour la percolation par sites sur réseau triangulaire.

Dans ce cours, nous allons suivre de près le livre de Wendelin Werner [Wer09, Partie II].

3.1.1. Autodualité de la percolation par site du réseau triangulaire à $p = \frac{1}{2}$

Ici nous allons expliquer la propriété d'autodualité de la percolation par sites sur réseau triangulaire. Soit $\omega = (\omega_z)_{z \in \mathbb{T}}$ une configuration de percolation de paramètre p . Notons par $\bar{\omega}$ la configuration de percolation complémentaire :

$$\bar{\omega}_z = 1 - \omega_z.$$

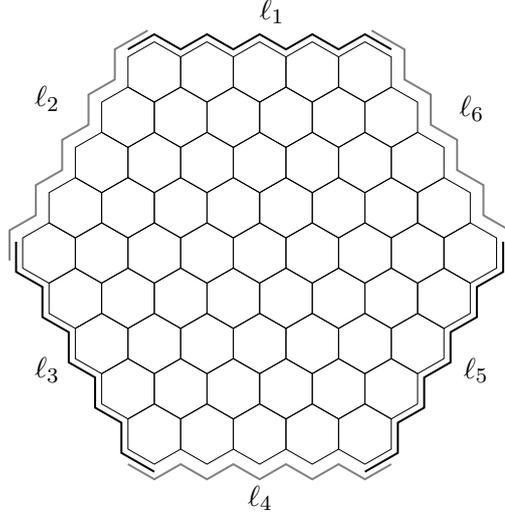


FIGURE 3.2. – Contexte de l'autodualité dans un hexagone H_n avec $n = 5$.

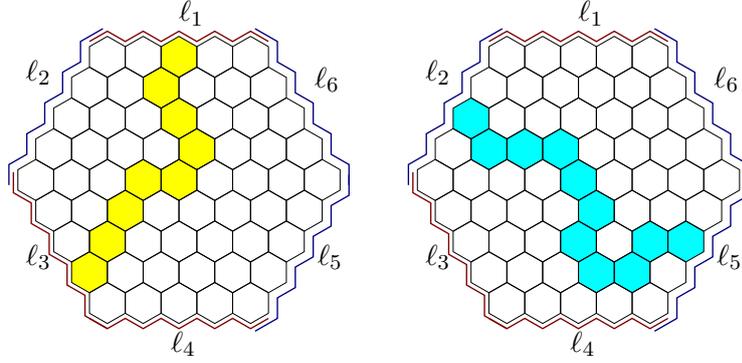


FIGURE 3.3. – Deux événements contradictoires dans H_5 un chemin de sites ouverts dans ω reliant l_1 à $l_3 \cup l_4$, et un chemin ouvert dans $\bar{\omega}$ reliant l_2 à $l_5 \cup l_6$.

Alors $\bar{\omega}$ est une configuration de percolation de paramètre $1 - p$. Les sites ouverts pour $\bar{\omega}$ sont fermés pour ω et vice-versa.

Soit un entier $n > 0$ et soit H_n l'hexagone régulier fermé de côté n , avec les coins

$$C_1 = ne^{i\frac{\pi}{3}}, \quad C_2 = ne^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad C_3 = -n, \quad C_4 = -ne^{i\frac{\pi}{3}}, \quad C_5 = -ne^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad C_6 = n.$$

Soit l_1 le côté fermé $[C_1, C_2]$ de l'hexagone H_n , c'est à dire contenant C_1 et C_2 , De même soit l_2 le côté $[C_2, C_3]$, l_3 le côté $[C_3, C_4]$, l_4 le côté $[C_4, C_5]$, l_5 le côté $[C_5, C_6]$ et l_6 le côté $[C_6, C_1]$. Voir Figure 3.2. Notons par $\{l_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} l_3 \cup l_4\}$ l'événement où le côté l_1 est relié au côté l_3 ou l_4 par les site ouverts de ω à l'intérieur de l'hexagone H_n . De même, notons par $\{l_2 \xleftrightarrow{\bar{\omega}, H_n} l_5 \cup l_6\}$ l'événement où le côté l_2 est relié au côté l_5 ou l_6 par les site ouverts de $\bar{\omega}$ (c.à.d. fermés pour ω) à l'intérieur de l'hexagone H_n .

Lemme 9. *Les deux événements suivants coïncident :*

$$\{\ell_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4\} = \{\ell_2 \xleftrightarrow{\bar{\omega}, H_n} \ell_5 \cup \ell_6\}^c,$$

où c désigne le complémentaire.

Démonstration. En effet, s'il n'y a pas de chemin ouvert pour ω de ℓ_1 vers $\ell_3 \cup \ell_4$ à l'intérieur de H_n c'est qu'il y a un chemin fermé bloquant de ℓ_2 vers $\ell_5 \cup \ell_6$. Voir figure 3.3. \square

Lemme 10. *Pour $p = 1/2$, la configuration de percolation ω et la configuration complémentaire $\bar{\omega}$ ont même loi.*

Démonstration. Évident. \square

Proposition 4. *Pour $p = 1/2$,*

$$\mathbb{P}(\ell_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4) = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. D'après les Lemmes 9 et 10,

$$\mathbb{P}(\ell_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4) = 1 - \mathbb{P}(\ell_2 \xleftrightarrow{\bar{\omega}, H_n} \ell_5 \cup \ell_6) = 1 - \mathbb{P}(\ell_2 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_5 \cup \ell_6).$$

Or, par symétrie de rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$,

$$\mathbb{P}(\ell_2 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_5 \cup \ell_6) = \mathbb{P}(\ell_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4). \quad \square$$

Corollaire 1. *Pour la percolation par sites sur réseau triangulaire, le paramètre de percolation critique est $p_c = 1/2$.*

Démonstration. Lorsque $p > p_c$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\ell_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4) = 1.$$

Ceci peut être montré à l'aide de l'inégalité de Harris (Théorème 6). Donc $p_c \geq 1/2$. Lorsque $p < p_c$,

$$\mathbb{P}(\ell_1 \xleftrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4) \leq \sum_{z \in \ell_1 \cap \mathbb{T}} \mathbb{P}(z \xleftrightarrow{\omega} \partial B(z, n)) = n \mathbb{P}(0 \xleftrightarrow{\omega} \partial B(0, n)) \leq n e^{-c(p)n}.$$

Donc $p_c \leq 1/2$. \square

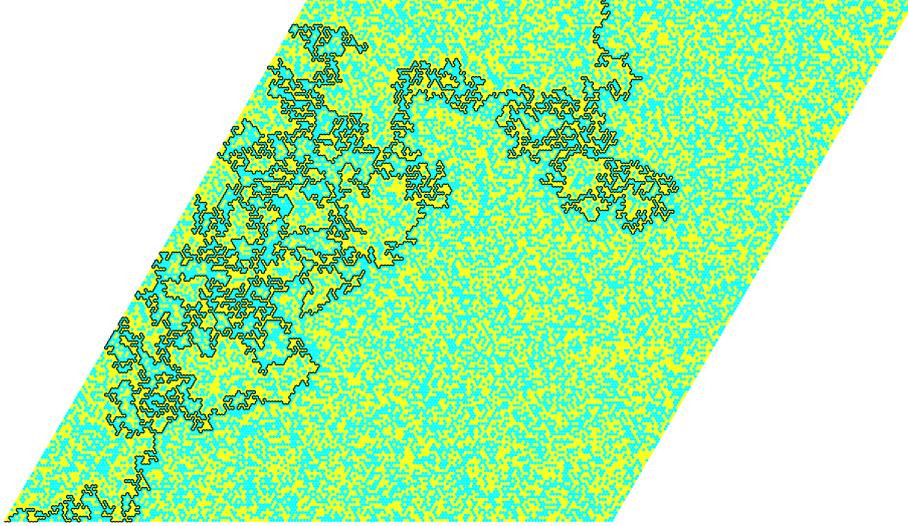


FIGURE 3.4. – Une configuration de percolation dans un losange de coté 200. Les sites jaunes sont ouverts et les cyan sont fermés. En noir, le chemin dual donné par le processus d’exploration démarrant au coin inférieur gauche.

3.1.2. Processus d’exploration

3.2. Inégalités de Harris-FKG

Dans cette Section nous allons présenter l’inégalité de Harris. Il y a une extension de cette inégalité à un cadre plus large que celui de percolation, due à Fortuin, Kasteleyn et Ginibre. De ce fait, l’inégalité est souvent appelé inégalité de Harris-FKG, ou juste FKG. Cette inégalité a été déjà vue dans le cours de Thierry Lévy au premier semestre [Lé21, Section 7.4.1]. Mais étant donné son importance pour la Section 3.3 qui va suivre, nous allons la refaire.

Soit $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes. Pour $i \geq 0$, on note $p_i \in [0, 1]$ le paramètre de la variable ω_i . On note \mathcal{F} la tribu cylindrique engendrée par les événements ne dépendant que d’un nombre fini de variables ω_i , et \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les variables $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$.

Définition 10. Soit f une fonction définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, On dit que f est *croissante* si pour toute suite $(x_i)_{i \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$f(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots) \leq f(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots).$$

Une variable aléatoire X \mathcal{F} -mesurable s’écrit en particulier $X = f \circ \omega$ avec $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$. Par extension, on dit que X est *croissante* si f l’est au sens de la définition précédente. Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit *croissant* si $\mathbb{1}_A$ est croissante.

Exemple 1. L’existence d’un croisement ouvert reliant deux bords opposés d’une boîte est un événement croissant.

Théorème 6 (Inégalité de Harris). *Soit X et Y deux variables \mathcal{F} -mesurables, L^2 , croissantes. Alors,*

$$\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \quad (3.1)$$

Corollaire 2. *Si A_1 et A_2 sont deux événements croissants,*

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \geq \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2].$$

En particulier, si A_2 n'est pas négligeable,

$$\mathbb{P}[A_1|A_2] \geq \mathbb{P}[A_1].$$

Les événements croissants sont donc corrélés positivement.

Exemple 2. Croisements haut/bas et gauche/droite d'une boîte.

Démonstration du Théorème 6. On commence par supposer que X et Y sont en fait des fonctions d'un nombre fini de variables $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ pour un certain $n \geq 0$.

Si $n = 0$, la croissance implique que X et Y sont des fonctions affines avec un coefficient multiplicatif positif de la même variable ω_0 . L'inégalité de Harris dans ce cas se ramène à la positivité de la variance de la variable ω_0 .

Supposons maintenant que l'inégalité soit vraie pour toutes les fonctions dépendant des ω_i jusqu'au rang n , avec $n \geq 0$. Soient X et Y dépendant maintenant des variables ω_i jusqu'au rang $n + 1$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}_n]] \\ &\geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]] && \text{par hypothèse de récurrence au rang } 0 \\ &\geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]]\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]] && \text{par hypothèse de récurrence au rang } n \\ &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Cela termine, d'après le principe de récurrence, la démonstration dans le cas de la dépendance en un nombre *fini* de variables ω_i .

Lorsque l'une des deux variables X ou Y dépend d'une infinité de variables, on pose pour tout $n \geq 0$,

$$X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n], \quad Y_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n].$$

On vérifie alors que X_n et Y_n sont encore croissantes et dépendent maintenant d'un nombre fini de variables ω_i . On a donc d'après la partie précédente,

$$\mathbb{E}[X_n Y_n] \geq \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[Y_n].$$

Or les suites (X_n) et (Y_n) sont des martingales L^2 , qui convergent p.s. et dans L^2 (donc dans L^1) vers X et Y respectivement. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité, on obtient le résultat escompté. \square

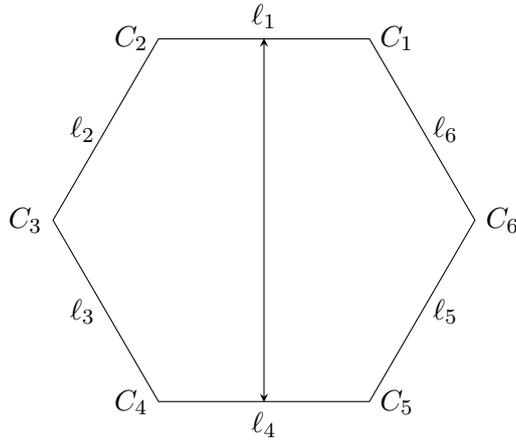


FIGURE 3.5. – Un hexagone H_n de côté n . L'événement $A_n = \{\ell_1 \leftrightarrow \ell_4\}$ correspondant à l'ensemble des configurations assurant un croisement ouvert de ℓ_1 à ℓ_4 .

3.3. Théorie de Russo-Seymour-Welsh

Dans toute la suite, nous nous intéresserons à la percolation par site sur le réseau hexagonal de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

La théorie de Russo-Seymour-Welsh (RSW) est un ingrédient essentiel qui sert à montrer que des événements macroscopiques, comme des croisements dans une grande boîte de taille n , ont une probabilité comprise entre deux constantes c_1 et c_2 , indépendantes de n et comprises strictement entre 0 et 1.

3.3.1. Croisement d'un grand hexagone

Soit H_n un hexagone régulier de côté n avec les coins dans \mathbb{T} , tel que décrit dans la Section 3.1.1. Voir Figure 3.5. Notons par A_n l'événement qu'il existe un croisement ouvert pour ω entre les côtés opposés ℓ_1 et ℓ_4 à l'intérieur de H_n :

$$A_n = \{\ell_1 \overset{\omega, H_n}{\longleftrightarrow} \ell_4\}.$$

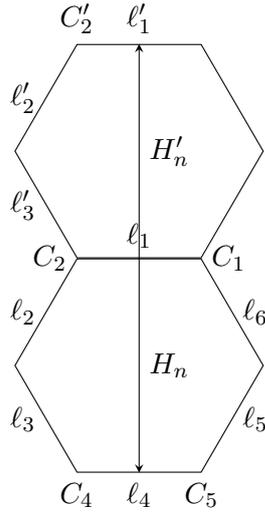
Dans la suite de cette sous-section, nous allons noter simplement \leftrightarrow pour $\overset{\omega, H_n}{\longleftrightarrow}$.

Lemme 11. *Il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $n > 0$, $\mathbb{P}(A_n) \geq c$.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque pour des raisons de symétrie que l'événement $\{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \cup \ell_4\}$ a une probabilité égale à $1/2$. Voir Proposition 4.

D'autre part, encore par symétrie, les événements $\{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3\}$ et $\{\ell_2 \leftrightarrow \ell_4\}$ ont la même probabilité, et leur intersection est incluse dans l'événement $\{\ell_1 \leftrightarrow \ell_4\}$. Donc, comme ce sont tous les deux des événements croissants, on a d'après l'inégalité de Harris :

$$\mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_4) \geq \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_3)\mathbb{P}(\ell_2 \leftrightarrow \ell_4) = \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_3)^2.$$



Enfin, en utilisant notre premier point, on a

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \cup \ell_4) \leq \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_3) + \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_4) \leq \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_4)^{1/2} + \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_4).$$

En notant $x = \mathbb{P}(\ell_1 \leftrightarrow \ell_4)^{1/2}$, la dernière inégalité se réécrit

$$x^2 + x - \frac{1}{2} \geq 0.$$

Ceci implique que

$$x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0,$$

et

$$\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{9}. \quad \square$$

3.3.2. Croisement d'un grand « rectangle »

La théorie de Russo-Seymour-Welsh commence. Soit H_n un hexagone régulier de côté n comme dans la Section 3.3.1, et soit H'_n son translaté vertical, $H'_n = H_n + i\sqrt{3}n$, de sorte que H'_n et H_n ont un côté en commun. Voir Figure 3.3.2. Notons par C'_1, \dots, C'_6 les coins de H'_n , et par ℓ'_1, \dots, ℓ'_6 les côtés de H'_n , de sorte que $C'_4 = C_2$ et $C'_5 = C_1$. Soit R_n le « rectangle » $R_n = H_n \cup H'_n$.

Théorème 7 (Russo-Seymour-Welsh). *La probabilité d'un croisement ouvert $\{\ell'_1 \xrightarrow{\omega, R_n} \ell_4\}$ dans le sens « difficile » du rectangle R_n est bornée inférieurement, uniformément en n , par une constante strictement positive.*

Démonstration. Soit une configuration de percolation ω telle que l'événement de connexion est réalisé. Le processus d'exploration de la configuration dans $R_n = H_n \cup H'_n$ partant

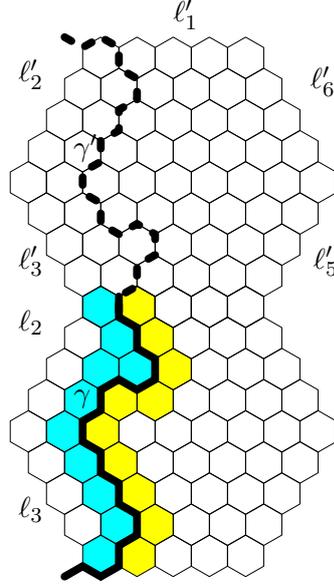


FIGURE 3.6. – Découverte du croisement de haut en bas de l'hexagone inférieur situé le plus à gauche grâce au processus d'exploration γ initié depuis le coin inférieur gauche.

du coin inférieur droit C_5 doit forcément passer par un des sites à la jonction entre H_n et H'_n , c'est à dire un site de l_1 .

Soit γ le chemin dual donné par le processus d'exploration de la configuration de percolation dans H_n à partir du coin C_5 en bas à droite. On arrête le chemin d'exploration γ au premier temps de visite de la jonction l_1 . On dénote par γ' le symétrique de γ par rapport à la jonction l_1 .

L'union $\gamma \cup \gamma'$ sépare le rectangle R_n en deux moitiés. Une fois le processus d'exploration arrêté à la fin de γ , la configuration de percolation strictement à gauche de $\gamma \cup \gamma'$ n'a pas été encore découverte. On a encore donc dans cette partie affaire à une percolation indépendante. Voir figure 3.6.

Conditionnellement à γ , l'événement consistant à avoir un croisement ouvert joignant γ au bord supérieur gauche $l'_1 \cup l'_2 \cup l'_3$ a une probabilité supérieure ou égale à $1/2$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(l_4 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l'_1 \cup l'_2 \cup l'_3) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(l_4 \overset{\omega, H_n}{\longleftrightarrow} l_1) \geq \frac{1}{18}.$$

Ensuite, par symétrie,

$$\mathbb{P}(l'_1 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l_2 \cup l_3 \cup l_4) = \mathbb{P}(l_4 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l'_1 \cup l'_2 \cup l'_3).$$

De plus, par l'inégalité de Harris,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(l_4 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l'_1 \cup l'_2 \cup l'_3 \text{ et } l'_1 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l_2 \cup l_3 \cup l_4) &\geq \mathbb{P}(l_4 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l'_1 \cup l'_2 \cup l'_3) \mathbb{P}(l'_1 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l_2 \cup l_3 \cup l_4) \\ &\geq \mathbb{P}(l_4 \overset{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} l'_1 \cup l'_2 \cup l'_3)^2 \geq \frac{1}{18^2}. \end{aligned}$$

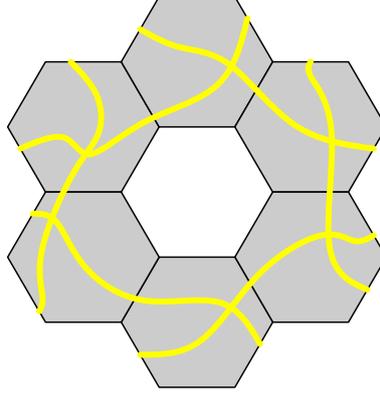


FIGURE 3.7. – Construction d'un circuit ouvert dans un anneau à partir de croisements de six grands « rectangles » formés par deux hexagones voisins.

Enfin,

$$\{\ell_4 \xleftrightarrow{\omega, R_n} \ell'_1 \cup \ell'_2 \cup \ell'_3\} \cap \{\ell'_1 \xleftrightarrow{\omega, R_n} \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4\} \subset \{\ell'_1 \xleftrightarrow{\omega, R_n} \ell_4\}. \quad \square$$

3.3.3. Circuit ouvert dans un « anneau »

Soit H_n un hexagone régulier de côté n comme dans la Section 3.3.1, et soient $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$, $H_n^{(3)}$, $H_n^{(4)}$, $H_n^{(5)}$, $H_n^{(6)}$ ses translatés :

$$\begin{aligned} H_n^{(1)} &= H_n + i\sqrt{3}n, & H_n^{(2)} &= H_n + \sqrt{3}ne^{i\frac{5\pi}{6}}, & H_n^{(3)} &= H_n + \sqrt{3}ne^{i\frac{7\pi}{6}}, \\ H_n^{(4)} &= H_n - i\sqrt{3}n, & H_n^{(5)} &= H_n + \sqrt{3}ne^{-i\frac{\pi}{6}}, & H_n^{(6)} &= H_n + \sqrt{3}ne^{i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Soit \mathcal{A}_n le domaine

$$\mathcal{A}_n = H_n^{(1)} \cup H_n^{(2)} \cup H_n^{(3)} \cup H_n^{(4)} \cup H_n^{(5)} \cup H_n^{(6)}.$$

\mathcal{A}_n est un domaine annulaire, c.à.d. qu'il a un trou, formé par l'intérieur de H_n . Voir figure 3.7.

Proposition 5. *La probabilité qu'il existe un circuit ouvert dans \mathcal{A}_n entourant le trou de \mathcal{A}_n est bornée inférieurement, uniformément en n , par une constante strictement positive.*

Démonstration. Soient $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}$, $R_n^{(4)}$, $R_n^{(5)}$, $R_n^{(6)}$ des « rectangle » formés par deux hexagones adjacents

$$\begin{aligned} R_n^{(1)} &= H_n^{(1)} \cup H_n^{(2)}, & R_n^{(2)} &= H_n^{(2)} \cup H_n^{(3)}, & R_n^{(3)} &= H_n^{(3)} \cup H_n^{(4)}, \\ R_n^{(4)} &= H_n^{(4)} \cup H_n^{(5)}, & R_n^{(5)} &= H_n^{(5)} \cup H_n^{(6)}, & R_n^{(6)} &= H_n^{(6)} \cup H_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Soit $E_n^{(k)}$ l'événement qu'il y ait un croisement ouvert dans $R_n^{(k)}$ dans le sens « difficile », comme dans le Théorème 7. Par symétrie, à n fixé, tous les événements $E_n^{(k)}$, $1 \leq k \leq 6$

ont même probabilité. De plus, par le Théorème 7 (RSW), il existe une constant $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(E_n^{(k)}) \geq c$. Comme les événements $E_n^{(k)}$ sont croissants, par l'inégalité de Harris (Théorème 6),

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq 6} E_n^{(k)}\right) \geq \prod_{1 \leq k \leq 6} \mathbb{P}(E_n^{(k)}) \geq c^6 > 0.$$

De plus, sur l'événement $\bigcap_{1 \leq k \leq 6} E_n^{(k)}$ il y a forcément un circuit ouvert dans \mathcal{A}_n entourant le trou de \mathcal{A}_n ; voir la figure 3.7. \square

3.4. Formule de Cardy

3.4.1. Présentation de la formule de Cardy

Nous avons vu précédemment que pour le paramètre de percolation critique $p = p_c = 1/2$,

$$\mathbb{P}(\ell_1 \xrightarrow{\omega, H_n} \ell_3 \cup \ell_4) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\ell_1 \xrightarrow{\omega, H_n} \ell_4) \geq c > 0, \quad \mathbb{P}(\ell'_1 \xrightarrow{\omega, R_n} \ell_4) \geq c' > 0.$$

On peut par des méthodes similaires montrer (exercice) qu'il existe des constantes $C, C' \in (0, 1)$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a

$$0 < c \leq \mathbb{P}(\ell_1 \xrightarrow{\omega, H_n} \ell_4) \leq C < 1, \quad 0 < c' \leq \mathbb{P}(\ell'_1 \xrightarrow{\omega, R_n} \ell_4) \leq C' < 1.$$

En fait, les probabilités de croisement précédentes ont des limites explicites lorsque $n \rightarrow +\infty$. Les valeurs de ces limites ont été prédites par le physicien théoricien John Cardy. C'est la formule de Cardy [Car92]. Elle a été prouvée rigoureusement par Stanislav Smirnov [Smi01].

On considère le triangle équilatéral, rempli ouvert, $\mathbf{T} = ABC$, avec les coins

$$A = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad B = 0, \quad C = 1.$$

Soit un domaine ouvert borné $D \subset \mathbb{C}$. On suppose également que D est simplement connexe, c.à.d. sans trous. On suppose aussi que le bord de D est une courbe continue simple. Soient a, b et c trois points distincts sur ∂D , ordonnés dans le sens trigonométrique. Il existe alors une unique transformation conforme $\psi : D \rightarrow \mathbf{T}$, avec $\psi(a) = A$, $\psi(b) = B$ et $\psi(c) = C$; voir Proposition 32. Soit $x \in \partial D \setminus \{a, b, c\}$, avec x situé entre c et a dans l'ordre trigonométrique. Soit $X = \psi(x)$. X est un point sur le côté (C, A) de $\partial \mathbf{T}$.

Ensuite, on considère le réseau triangulaire changé d'échelle $\mathcal{T}_N = (\mathbb{T}_N, E_N)$, avec $\mathbb{T}_N = \frac{1}{N}\mathbb{T}$, et $N \in \mathbb{N}^*$. Soit D_N une approximation discrète du domaine continu D , avec $D_N \subset \mathbb{T}_N$, et D_N formant un sous-graphe connexe et sans trous. Notons par ∂D_N les sites de D_N qui ont un voisin dans $\mathbb{T}_N \setminus \partial D_N$. On considère $a_N, b_N, c_N, x_N \in \partial D_N$ tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = a, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} b_N = b, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} c_N = c, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} x_N = x.$$

On considère un percolation par sites ω sur le réseau $\mathcal{T}_N = (\mathbb{T}_N, E_N)$, de paramètre $p = 1/2$. On s'intéresse à l'événement qu'il existe un croisement ouvert dans D_N entre l'arc $a_N \widehat{b}_N$ et l'arc $c_N \widehat{x}_N$, qu'on dénote par $\{a_N \widehat{b}_N \xleftrightarrow{\omega, D_N} c_N \widehat{x}_N\}$.

Théorème 8 (Formule de Cardy-Smirnov). *A la limite d'échelle,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a_N \widehat{b}_N \xleftrightarrow{\omega, D_N} c_N \widehat{x}_N) = \frac{CX}{CA},$$

où CX et CA sont les longueurs des segments respectifs.

La formule de Cardy-Smirnov assure que la limite des probabilités des croisements est invariante par transformations conformes du domaine D . En effet, la formule s'exprime à partir de quantités obtenues après uniformisation par la transformation conforme ψ .

Pour commencer, nous allons faire la preuve dans le cas où le domaine D est en fait le triangle \mathbf{T} et $a = A$, $b = B$, $c = C$, $x = X$. On dénote par \mathbf{T}_N le triangle équilatéral discret $\mathbf{T}_N = \mathbb{T}_N \cap \overline{\mathbf{T}}$.

3.4.2. Un résultat de compacité

On travaille dans le triangle \mathbf{T}_N . On identifie une face de \mathbf{T}_N avec son centre z , qui est un sommet du réseau hexagonal dual. On dénote par $E_N^A(z)$ l'événement qu'il existe dans \mathbf{T}_N un chemin ouvert **auto-évitant** de $[A, B]$ vers $[A, C]$ qui sépare z de $[B, C]$. De manière similaire on définit les événements $E_N^B(z)$ et $E_N^C(z)$. Soient les probabilités

$$H_N^A(z) = \mathbb{P}(E_N^A(z)), \quad H_N^B(z) = \mathbb{P}(E_N^B(z)), \quad H_N^C(z) = \mathbb{P}(E_N^C(z)).$$

Si z est une face qui est tout à droite du triangle \mathbf{T}_N , adjacente au côté $[A, C]$, et z_B est son coin en bas à droite, alors $E_N^A(z)$ est exactement l'événement qu'il existe un croisement ouvert dans \mathbf{T}_N joignant le côté $[A, B]$ au segment $[C, z_B]$.

Les fonctions H_N^A , H_N^B et H_N^C ont été définies sur les centres des faces de \mathbf{T}_N , qui sont aussi les sommets du réseau hexagonal dual. On peut les étendre en des fonctions continues sur tout le grand triangle fermé $\overline{\mathbf{T}}$ de manière suivante. Sur les arêtes du réseau hexagonal dual on interpole de manière linéaire. Ensuite, à l'intérieur des faces du du réseau hexagonal dual on prends l'extension harmonique. Par construction ces fonctions sont à valeurs dans $[0, 1]$. Dans la suite nous allons montrer que les suites $(H_N^J)_{N \geq 1}$, pour $J \in \{A, B, C\}$, sont relativement compactes dans $\mathcal{C}(\overline{\mathbf{T}})$, l'espace des fonction continues sur $\overline{\mathbf{T}}$ muni de la norme uniforme, et admettent donc des valeurs d'adhérence. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, il faut montrer que les suites sont équicontinues. En fait, à l'aide de la théorie de Russo-Seymour-Welsh, nous allons montrer qu'elles sont uniformément Hölder.

Lemme 12. *Il existe des constantes $c, \beta > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$ et $z, z' \in \overline{\mathbf{T}}$, $|H_N^A(z') - H_N^A(z)| \leq c|z' - z|^\beta$. De même pour H_N^B et H_N^C .*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour z et z' centres de faces de \mathbf{T}_N . On a

$$|H_N^A(z') - H_N^A(z)| \leq \mathbb{P}(E_N^A(z') \Delta E_N^A(z)),$$

où Δ est la différence symétrique. Or, l'événement $E_N^A(z')\Delta E_N^A(z)$ ne peut pas être réalisé s'il existe un circuit ouvert auto-évitant γ qui entoure à la fois z et z' , et qui les sépare de $[B, C]$. Comme dans la Section 3.3.3, on considère \mathcal{A}_k des « anneaux » formés de 6 hexagones de taille 3^{-k} dont le bord intérieur entoure à la fois z et z' et dont le bord extérieur les sépare de $[B, C]$. Ces anneaux sont 2 à 2 disjoint, et pour chaque \mathcal{A}_k , d'après la Proposition 5, la probabilité d'existence d'un circuit ouvert est supérieure à une constante $c' > 0$ qui ne dépend pas de N, k, z ou z' . D'où

$$\mathbb{P}(E_N^A(z')\Delta E_N^A(z)) \leq (1 - c')^{n(N, z, z')},$$

où $n(N, z, z')$ est le nombre d'anneaux de type \mathcal{A}_k qu'on peut coller tout en respectant les contraintes. Ensuite, $n(N, z, z')$ est de l'ordre de $\log(\delta(z, z'))_+ / \log(3)$, où

$$\delta(z, z') = \max\left(\frac{d(z, [B, C])}{|z' - z|}, \frac{d(z', [B, C])}{|z' - z|}\right).$$

Ceci donne la propriété d'Hölder uniforme lorsque z ou z' ne sont pas trop près de $[B, C]$, mais un autre argument est nécessaire si z et z' sont proches de $[B, C]$. En fait, l'événement $E_N^A(z')\Delta E_N^A(z)$ ne peut pas non plus être réalisé s'il existe un circuit fermé γ qui entoure à la fois z et z' et qui les sépare de $[A, B]$ ou $[A, C]$. On répète ici le raisonnement précédent avec les « anneaux » hexagonaux emboîtés. \square

Lemme 13. *Soit (H^A, H^B, H^C) une valeur d'adhérence de $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$. Alors*

$$H^A(A) = H^B(B) = H^C(C) = 1.$$

De plus, H^A est nulle sur $[B, C]$, H^B est nulle sur $[A, C]$ et H^C est nulle sur $[A, B]$.

Démonstration. Le résultat se déduit de la théorie de Russo-Seymour-Welsh, et en particulier de la Proposition 5. Pour borner $H_N^A(z)$ inférieurement, on regarde la probabilité qu'il existe un circuit ouvert γ auto-évitant qui entoure à la fois z et A et qui les sépare de $[B, C]$. Pour cela on utilise des anneaux emboîtés comme dans la preuve du Lemme 12. Pour borner $H_N^A(z)$ supérieurement, on regarde la probabilité qu'il existe un circuit fermé γ qui entoure z , intersecte $[B, C]$ et sépare z de $[A, B]$ ou $[A, C]$. \square

3.4.3. Le lemme de changement de couleur

Nous avons vu que la suite $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$ admet des limites sous-séquentielles pour la norme uniforme. Il reste à montrer qu'elle converge et identifier la limite. Nous allons voir que la limite est donnée par les coordonnées barycentriques dans le triangle ABC . Dans cette Section nous allons présenter l'argument clé de Smirnov qui est de nature combinatoire.

On rappelle qu'on identifie les faces de \mathbf{T}_N avec leurs centres. Soit z une telle face, et z_1, z_2, z_3 les trois faces adjacentes, dans l'ordre trigonométrique. Soient s_1, s_2 et s_3 les trois coins de la face z , avec s_i opposé à z_i .

Lemme 14 (Smirnov, [Smi01]). *Supposons que la face z est telle que ses voisins z_1, z_2 et z_3 sont encore dans \mathbf{T} . Alors*

$$\mathbb{P}(E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z)) = \mathbb{P}(E_N^B(z_2) \setminus E_N^B(z)) = \mathbb{P}(E_N^C(z_3) \setminus E_N^C(z)). \quad (3.2)$$

Démonstration. Étudions l'événement $E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z)$. Cet événement est équivalent aux conditions suivantes :

- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant fermé γ_1 reliant s_1 et $[B, C]$.
- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant ouvert γ_2 reliant s_2 et $[A, C]$.
- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant ouvert γ_3 reliant s_3 et $[A, B]$.
- Les trois chemins γ_1, γ_2 et γ_3 ne s'intersectent pas.

Soit \tilde{E} l'événement qu'il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant fermé γ_1 reliant s_1 et $[B, C]$, ainsi qu'un chemin auto-évitant ouvert γ_2 reliant s_2 et $[A, C]$. On a $E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z) \subset \tilde{E}$. On peut découvrir l'événement \tilde{E} de manière suivante. On lance une exploration à partir de C : on a un chemin γ^* sur le réseau hexagonal dual avec des sites fermés de même côté que B et des sites ouverts de même côté que A . Voir Section 3.1.2 pour les détails sur les processus d'exploration. L'événement \tilde{E} est caractérisé par le fait l'exploration découvre les sites s_1 et s_2 et γ^* emprunte l'arête duale à $\{s_1, s_2\}$ avant que (A, B) soit atteint. On arrête alors l'exploration lorsque γ^* visite $\{s_1, s_2\}$. Soit S l'ensemble des sites découverts lors de l'exploration. Voir FIGURE. Comme $p = 1/2$, on a que

$$\mathbb{P}\left(s_3 \xrightarrow{\omega, \mathbf{T}_N \setminus S} [A, B] \mid (\omega_s)_{s \in S}\right) = \mathbb{P}\left(s_3 \xleftarrow{\bar{\omega}, \mathbf{T}_N \setminus S} [A, B] \mid (\omega_s)_{s \in S}\right).$$

C'est la propriété de changement de couleur. Par conséquent, l'événement $E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z)$ à la même probabilité que l'événement défini par les conditions suivantes :

- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant fermé γ_1 reliant s_1 et $[B, C]$.
- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant ouvert γ_2 reliant s_2 et $[A, C]$.
- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant **fermé** γ_3 reliant s_3 et $[A, B]$.
- Les trois chemins γ_1, γ_2 et γ_3 ne s'intersectent pas.

En échangeant sites ouverts et sites fermés, c'est encore la même probabilité que pour l'événement défini par

- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant ouvert γ_1 reliant s_1 et $[B, C]$.
- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant fermé γ_2 reliant s_2 et $[A, C]$.
- Il existe dans \mathbf{T}_N un chemin auto-évitant ouvert γ_3 reliant s_3 et $[A, B]$.
- Les trois chemins γ_1, γ_2 et γ_3 ne s'intersectent pas.

Ce dernier événement est exactement $E_N^B(z_2) \setminus E_N^B(z)$. Ainsi on obtient la première égalité dans (3.2). La deuxième s'obtient de manière similaire. \square

3.4.4. Holomorphie à la limite

Pour z une face de \mathbf{T}_N , pour η tel que $z + \eta$ est une face voisine de z et pour $J \in \{A, B, C\}$, notons

$$h_N^J(z, \eta) = \mathbb{P}(E_N^J(z + \eta) \setminus E_N^J(z)).$$

On a

$$H_N^J(z + \eta) - H_N^J(z) = h_N^J(z, \eta) - h_N^J(z + \eta, -\eta).$$

Lemme 15. *Il existe des constantes $c, \epsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$ et pour toutes z et $z + \eta$ faces adjacentes de \mathbf{T}_N , $h_N^J(z, \eta) \leq cN^{-\epsilon}$.*

Démonstration. Ceci découle de la théorie de Russo-Seymour-Welsh de la même manière que Lemme 12. \square

Soit T un triangle équilatéral rempli ouvert à l'intérieur de \mathbf{T} , de côtés parallèles aux axes. Supposons aussi que T « pointe vers le haut », le cas où il « pointe vers le bas » étant similaire. Soit T_N une approximation de T de telle sorte que T_N est un triangle équilatéral dans \mathbf{T}_N . Soit \mathcal{D} l'ensemble des faces de T_N qui « pointent vers le bas ».

Dans la suite nous allons noter $\tau = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Let $\eta \in \{i/(\sqrt{3}N), i\tau/(\sqrt{3}N), i\tau^2/(\sqrt{3}N)\}$, de sorte que si la face z est dans \mathcal{D} , $z + \eta$ est une face adjacente. Notons par I_N^η :

$$I_N^\eta = \sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^A(z + \eta) - H_N^A(z)) - \sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^B(z + \eta\tau) - H_N^B(z)).$$

Lemme 16. *Lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a $|I_N^\eta| = O(N^{1-\epsilon})$, avec ϵ donné par Lemme 15.*

Démonstration. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^A(z + \eta) - H_N^A(z)) &= \sum_{z \in \mathcal{D}} (h_N^A(z, \eta) - h_N^A(z + \eta, -\eta)) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{D}} (h_N^B(z, \eta\tau) - h_N^B(z + \eta, -\eta\tau)), \end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité on a appliqué l'identité (3.2). D'autre part

$$\sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^B(z + \eta\tau) - H_N^B(z)) = \sum_{z \in \mathcal{D}} (h_N^B(z, \eta\tau) - h_N^B(z + \eta\tau, -\eta\tau)).$$

Du coup,

$$\begin{aligned} I_N^\eta &= \sum_{z \in \mathcal{D}} h_N^B(z + \eta\tau, -\eta\tau) - \sum_{z \in \mathcal{D}} h_N^B(z + \eta, -\eta\tau) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{D} + \eta\tau} h_N^B(z, -\eta\tau) - \sum_{z \in \mathcal{D} + \eta} h_N^B(z, -\eta\tau) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |I_N^\eta| &\leq \sum_{z \in (\mathcal{D} + \eta\tau) \Delta (\mathcal{D} + \eta)} |h_N^B(z, -\eta\tau)| \\ &\leq cN^{-\epsilon} |(\mathcal{D} + \eta\tau) \Delta (\mathcal{D} + \eta)| = O(N^{1-\epsilon}). \end{aligned}$$

\square

Soit (H^A, H^B, H^C) une valeur d'adhérence de la suite de fonctions $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$.

Lemme 17. *On a les égalités suivantes des intégrales curvilignes :*

$$\int_{\partial T} H^A(z) dz = \tau^{-1} \int_{\partial T} H^B(z) dz = \tau^{-2} \int_{\partial T} H^C(z) dz. \quad (3.3)$$

Démonstration. Montrons la première égalité dans (3.3). La deuxième est similaire. Soit

$$\Sigma_N = -N^{-1} \left(I_N^{i/(\sqrt{3}N)} + \tau I_N^{i\tau/(\sqrt{3}N)} + \tau^2 I_N^{i\tau^2/(\sqrt{3}N)} \right).$$

D'après Lemme 16, on a $|\Sigma_N| = O(N^{-\epsilon})$, et en particulier Σ_N converge vers 0. Mais d'autre part, on peut montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Sigma_N = \int_{\partial T} H^A(z) dz - \tau^{-1} \int_{\partial T} H^B(z) dz.$$

En effet, tous les termes $H_N^J(z)$ dans Σ_N pour $z \in \mathcal{D}$ disparaissent car ils sont multipliés par $1 + \tau + \tau^2 = 0$. Il en est de même pour tous les termes $H_N^J(z')$ lorsque z' est une face pointant vers le haut dans T_N , qui n'est pas adjacente au bord de T_N . En effet, ce terme apparaît alors trois fois, une fois pour chaque voisin de z' . Les seuls z' pour lesquels cette simplification ne s'effectue pas sont les faces de T_N orientées vers le haut, qui se trouvent au bord. Pour une face z' se trouvant au bord mais pas dans un coin, le terme en $H_N^J(z')$ apparaît deux fois, et pour un coin, une seule fois. Par exemple, pour une face z' qui se trouve sur le bord inférieur de T_N et qui n'est pas un coin, $H_N^A(z')$ sera en facteur de $-N^{-1}(\tau + \tau^2) = N^{-1}$, et $H_N^B(z')$ sera en facteur de $-\tau^{-1}N^{-1}$, et donc il restera le terme

$$N^{-1}H_N^A(z') - \tau^{-1}N^{-1}H_N^B(z') \quad \square$$

Soient les fonctions

$$F_0 = H^A + H^B + H^C, \quad F_1 = H^A + \tau H^B + \tau^2 H^C.$$

Proposition 6. *Les fonctions F_0 et F_1 sont holomorphes sur \mathbf{T} .*

Démonstration. L'égalité (3.3) assure que

$$\int_{\partial T} F_0(z) dz = \int_{\partial T} F_1(z) dz = 0.$$

Ceci est valable pour tout triangle équilatéral T contenu dans \mathbf{T} avec les côtés parallèles aux axes, qu'il pointe vers le haut ou vers le bas. On conclut alors avec le théorème de Morera (Théorème 12). En effet, tout triangle peut être approximé par un pavage par triangles équilatéraux. \square

3.4.5. Identification des fonctions limite

Grâce à Proposition 6, nous pouvons identifier de manière unique les valeurs d'adhérence H^A , H^B et H^C et obtenir ainsi la convergence. A ce stade, il n'y a plus de probabilités et c'est un exercice d'analyse complexe.

Lemme 18. *Pour tout $z \in \overline{\mathbf{T}}$, $F_0(z) = 1$.*

Démonstration. La fonction la fonction F_0 est d'une part holomorphe sur \mathbf{T} , mais d'autre part elle est à valeurs réelles. Ceci implique que c'est en fait une constante. Par exemple, d'après Proposition 26,

$$|F_0'(z)| = \|(\nabla \operatorname{Im}(F_0))(z)\|_2 = 0.$$

Par ailleurs, d'après Lemme 13, $F_0(A) = F_0(B) = F_0(C) = 1$. \square

Lemme 19. *La fonction F_1 peut être étendue en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier.*

Démonstration. F_1 est une fonction holomorphe sur \mathbf{T} qui s'étend continument à (B, C) . D'autre part, sur (B, C) , $H^A = 0$ et $H^B + H^C = 1$. Donc sur (B, C) , F_1 prends des valeurs sur la droite joignant τ et τ^2 . En particulier, la fonction $i(F_1 + 1/2)$ est à valeurs réelles. D'après le principe de réflexion de Schwarz (Théorème 15), la fonction $i(F_1 + 1/2)$, et donc F_1 aussi, peut être étendue en une fonction holomorphe sur $\mathbf{T} \cup (B, C) \cup \mathbf{T}'$, où \mathbf{T}' est l'image de \mathbf{T} par réflexion d'axe \mathbb{R} . En faisant de manière similaire des réflexions par rapport à (A, B) et (A, C) , on obtient que F_1 s'étend en une fonction holomorphe sur un triangle équilatéral plus grand, avec les coins $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ensuite on continue à faire des réflexions de Schwarz dans des triangles équilatéraux de plus en plus grands. \square

Lemme 20. *Les fonction H^A , H^B et H^C sont harmoniques sur \mathbf{T} .*

Démonstration. On a

$$\operatorname{Re}(F_1) = H^A - \frac{1}{2}(H^B + H^C) = H^A - \frac{1}{2}(1 - H^A) = \frac{3}{2}H^A - \frac{1}{2}.$$

Donc H^A est harmonique en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe. De manière similaire, H^B et H^C sont harmoniques. \square

Considérons maintenant les gradients ∇H^A , ∇H^B et ∇H^C , qu'on identifie aussi à leurs affixes complexes.

Lemme 21. *Pour tout $z \in \overline{\mathbf{T}}$, $(\nabla H^B)(z) = \tau(\nabla H^A)(z)$, c.à.d. $(\nabla H^B)(z)$ est l'image de $(\nabla H^A)(z)$ par rotation d'angle $2\pi/3$. De même, $(\nabla H^C)(z) = \tau(\nabla H^B)(z)$ et $(\nabla H^A)(z) = \tau(\nabla H^C)(z)$.*

Démonstration. On a

$$\operatorname{Re}(F_1) = \frac{3}{2}H^A - \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}(F_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(H^B - H^C).$$

D'après Proposition 26,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\nabla H^B - \nabla H^C) = i\frac{3}{2}\nabla H^A.$$

D'autre part, comme F_0 est constante,

$$\nabla H^A + \nabla H^B + \nabla H^C = 0.$$

Ensemble ceci implique le résultat désiré. \square

Lemme 22. *Pour tout $z \in \partial\mathbf{T}$, $(\nabla H^A)(z)$ est orthogonal à $[B, C]$, $(\nabla H^B)(z)$ est orthogonal à $[A, C]$, et $(\nabla H^C)(z)$ est orthogonal à $[A, B]$.*

Démonstration. Considérons le cas où $z \in [B, C]$, les autres cas étant similaires. Comme H^A est nulle sur $[B, C]$ (Lemme 13), $(\nabla H^A)(z)$ est orthogonal à $[B, C]$. Ensuite, Lemme 21 implique les autres relations, pour $(\nabla H^B)(z)$ et $(\nabla H^C)(z)$. \square

Lemme 23. *Soit une fonction u sur $\overline{\mathbf{T}}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. u est continue sur $\overline{\mathbf{T}}$.
2. u est harmonique sur \mathbf{T} .
3. ∇u se prolonge par continuité à $\partial\mathbf{T}$.
4. Pour tout $z \in \partial\mathbf{T}$, $(\nabla u)(z)$ est orthogonale à $[B, C]$.
5. $u(A) = 0$.
6. u est nulle sur $[B, C]$.

Alors u est nulle sur $\overline{\mathbf{T}}$.

Démonstration. Par intégration par parties,

$$\int_T \|\nabla u\|_2^2 = - \int_T u \Delta u + \int_{\partial T} u \partial_{\vec{n}} u = \int_{\partial T} u \partial_{\vec{n}} u = \int_{\partial T \setminus [B, C]} u \partial_{\vec{n}} u,$$

où le bord ∂T est orienté dans le sens trigonométrique et $\partial_{\vec{n}} u$ est la dérivée normale sortante. Donc pour montrer que u est nulle sur $\overline{\mathbf{T}}$, il suffit de montrer que

$$\int_{[A, B]} u \partial_{\vec{n}} u = \int_{[C, A]} u \partial_{\vec{n}} u = 0.$$

Notons par $\partial_{\vec{t}} u$ la dérivée tangentielle de u . La condition 4. implique que sur $[A, B]$,

$$\partial_{\vec{n}} u = -\frac{1}{\sqrt{3}} \partial_{\vec{t}} u.$$

Ainsi,

$$\int_{[A, B]} u \partial_{\vec{n}} u = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{[A, B]} u \partial_{\vec{t}} u = -\frac{1}{2\sqrt{3}} (u(B)^2 - u(A)^2) = 0.$$

De même pour le segment $[C, A]$. \square

Proposition 7. *Pour tout $z \in \overline{\mathbf{T}}$, le triplet $(H^A(z), H^B(z), H^C(z))$ correspond aux coordonnées barycentriques de z dans le triangle ABC . Il est caractérisé par*

$$H^A(z) + H^B(z) + H^C(z) = 1, \quad H^A(z)e^{i\frac{\pi}{3}} + H^B(z) \times 0 + H^C(z) \times 1 = z.$$

Démonstration. Notons par u^A , u^B et u^C les fonctions qui donnent les coordonnées barycentriques. Alors la fonction $H^A - u^A$ satisfait les hypothèses du Lemme 23, et par conséquent $H^A - u^A = 0$. De manière similaire, $H^B = u^B$ et $H^C = u^C$. \square

Ainsi nous avons établi la convergence de la suite $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$ et avons identifié la limite. Ceci prouve aussi Théorème 8 dans le cas du triangle \mathbf{T} . En effet,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\widehat{AB} \xrightarrow{\omega, \mathbf{T}_N} \widehat{CX}) = H^A(X) = \frac{CX}{CA}.$$

Remarque 2. Il est possible de court-circuiter les arguments présentés dans cette section pour identifier les fonctions H^A , H^B et H^C . On sait que la fonction F_1 est holomorphe sur \mathbb{T} , et le fait que $H^A + H^B + H^C = 1$ implique que l'image de $\overline{\mathbf{T}}$ par F_1 est contenue dans le triangle rempli fermé avec les sommets 1 , τ et τ^2 . De plus, il est simple de voir que F_1 établit une bijection entre les bords des deux triangles. Ensuite on peut invoquer un résultat plus avancé, le *principe de correspondance des bords*, pour établir qu'en fait F_1 est une transformation conforme entre le triangle \mathbf{T} et le triangle rempli ouvert avec les sommets 1 , τ et τ^2 . De plus, cette transformation conforme est uniquement déterminée par les conditions $F_1(A) = 1$, $F_1(B) = \tau$ et $F_1(C) = \tau^2$. Il s'agit donc d'une similitude affine $F_1(z) = \alpha z + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ appropriés. Ceci permet d'identifier H^A , H^B et H^C .

3.4.6. Le cas d'un domaine général

Le cas d'un domaine D simplement connexe borné général se prouve de la même manière. On remplace les sommets A , B et C par les points du bord a_N , b_N et c_N , et les côtés du triangle ABC par les arcs correspondants sur le bord de D_N . On définit les fonctions $H_N^{a_N}$, $H_N^{b_N}$ et $H_N^{c_N}$ de la même manière que H^A , H^B et H^C . On montre la relative compacité à l'aide de la théorie de Russo-Seymour-Welsh. Le lemme de changement de couleur de Smirnov (Lemme 14) marche encore. Il permet d'établir que pour toute limite sous-séquentielle, les fonctions $H^a + H^b + H^c$, ainsi que $H^a + \tau H^b + \tau^2 H^c$, sont holomorphes sur D . Avec les conditions aux bords, ceci est suffisant pour montrer que

$$H^a = H^A \circ \psi, \quad H^b = H^B \circ \psi, \quad H^c = H^C \circ \psi.$$

4. Évolutions de Schramm–Loewner

Ces notes sont largement tirées du livre de Lawler [Law05] et des notes de cours de Berestycki et Norris [BN16].

4.1. Théorie de Loewner déterministe

Dans cette section nous allons présenter les chaînes de Loewner déterministes et l'équation différentielle de Loewner. Elles ont été introduites par Charles Loewner dans les années 1920s [Loe23].

4.1.1. Invariance conforme du mouvement brownien en dimension 2 et noyaux de Poisson

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} , issu d'un point $B_0 = z_0$. Notons $X_t = \operatorname{Re}(B_t)$ et $Y_t = \operatorname{Im}(B_t)$. Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux mouvements browniens standards unidimensionnels et indépendants.

Proposition 8. *Soit f une fonction holomorphe non-constante sur \mathbb{C} . Soit le changement de temps*

$$A(t) = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds, \quad (4.1)$$

et le changement de temps inverse

$$A_{-1}(u) = \inf\{t \geq 0 \mid A(t) = u\}. \quad (4.2)$$

Notons

$$\tilde{B}_u = f(B_{A_{-1}(u)}).$$

Alors le processus $(\tilde{B}_u)_{u \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} issu de $f(z_0)$.

Démonstration. La fonction de changement de temps A est continue. Comme f n'est pas constante, la dérivée f' n'est pas uniformément nulle sur \mathbb{C} , et donc d'après le principe des zéros isolés (Théorème 13), les zéros de f' sont isolés, et en particulier A est p.s. strictement croissante. Donc le changement de temps inverse A^{-1} est continu. En utilisant par exemple la récurrence du mouvement brownien en dimension 2, on peut vérifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = +\infty$ p.s.

La formule d'Itô appliquée à $f(B_t)$ donne

$$f(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}(\Delta f)(B_t)dt.$$

Comme f est holomorphe, f est en particulier harmonique et $\Delta f \equiv 0$. Donc $(f(B_t))_{t \geq 0}$ est une martingale locale. On a

$$d \operatorname{Re} f(B_t) = \operatorname{Re} f'(B_t) dX_t - \operatorname{Im} f'(B_t) dY_t, \quad d \operatorname{Im} f(B_t) = \operatorname{Im} f'(B_t) dX_t + \operatorname{Re} f'(B_t) dY_t.$$

D'où

$$\langle \operatorname{Re} f(B_t), \operatorname{Re} f(B_t) \rangle_t = \langle \operatorname{Im} f(B_t), \operatorname{Im} f(B_t) \rangle_t = A(t), \quad \langle \operatorname{Re} f(B_t), \operatorname{Im} f(B_t) \rangle = 0.$$

Notons

$$\tilde{X}_u = \operatorname{Re}(\tilde{B}_u), \quad \tilde{Y}_u = \operatorname{Im}(\tilde{B}_u).$$

D'après le Théorème de Dubins-Schwarz, les processus $(\tilde{X}_u)_{u \geq 0}$ et $(\tilde{Y}_u)_{u \geq 0}$ sont deux mouvements browniens uni-dimensionnels standard. Pour conclure, il reste à voir que les deux processus sont indépendants.

On a

$$\langle \tilde{X}_u, \tilde{Y}_u \rangle_u = \langle \operatorname{Re} f(B_t), \operatorname{Im} f(B_t) \rangle_{A^{-1}(u)} = 0.$$

Soient $k \geq 1$ un entier, $u_k > u_{k-1} > \dots > u_0 \geq 0$ et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Posons

$$\begin{aligned} M_u = \exp & \left(i\lambda_0 \tilde{X}_{u \wedge u_0} + i\mu_0 \tilde{Y}_{u \wedge u_0} + i \sum_{j=1}^k (\lambda_j (\tilde{X}_{u \wedge u_j} - \tilde{X}_{u \wedge u_{j-1}}) + \mu_j (\tilde{Y}_{u \wedge u_j} - \tilde{Y}_{u \wedge u_{j-1}})) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\lambda_0 + \mu_0) u \wedge u_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\lambda_j + \mu_j) (u \wedge u_j - u \wedge u_{j-1}) \right). \end{aligned}$$

Avec la formule d'Itô on vérifie que $(M_u)_{u \geq 0}$ est une martingale locale. De plus, c'est une martingale locale bornée, donc une vraie martingale. En particulier,

$$\mathbb{E}[M_{u_k}] = \mathbb{E}[M_0] = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(i\lambda_0 \tilde{X}_{u_0} + i\mu_0 \tilde{Y}_{u_0} + i \sum_{j=1}^k (\lambda_j (\tilde{X}_{u_j} - \tilde{X}_{u_{j-1}}) + \mu_j (\tilde{Y}_{u_j} - \tilde{Y}_{u_{j-1}})) \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} (\lambda_0 + \mu_0) u_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\lambda_j + \mu_j) (u_j - u_{j-1}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i\lambda_0 \tilde{X}_{u_0} + i \sum_{j=1}^k \lambda_j (\tilde{X}_{u_j} - \tilde{X}_{u_{j-1}}) \right) \right] \mathbb{E} \left[\exp \left(i\mu_0 \tilde{Y}_{u_0} + i \sum_{j=1}^k \mu_j (\tilde{Y}_{u_j} - \tilde{Y}_{u_{j-1}}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent les deux vecteurs $(\tilde{X}_{u_0}, \tilde{X}_{u_1}, \dots, \tilde{X}_{u_k})$ et $(\tilde{Y}_{u_0}, \tilde{Y}_{u_1}, \dots, \tilde{Y}_{u_k})$ sont indépendants. Comme c'est vrai pour tout $k \geq 1$ et $u_k > u_{k-1} > \dots > u_0 \geq 0$ on l'indépendance des deux processus voulue. \square

La Proposition 8 admet une généralisation lorsqu'on considère des domaines de \mathbb{C} . Soient D et \tilde{D} deux ouverts non vides de \mathbb{C} , conformément équivalents, et $f : D \rightarrow \tilde{D}$ une transformation conforme. Soit $z_0 \in D$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} issu de z_0 . On note

$$T_{D^c} = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \notin D\}.$$

Le changements de temps A et A^{-1} sont donnés par (4.1) et (4.2) respectivement, avec les conditions $t < T_{D^c}$ et $u < A(T_{D^c})$.

Proposition 9. *Le processus $(f(B_{A^{-1}(u \wedge A(T_{D^c}))}))_{u \geq 0}$ est distribué comme un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} issu de $f(z_0)$ et arrêté à la sortie de \tilde{D} .*

Nous laissons la preuve en exercice.

Étant donné un domaine ouvert simplement connexe D , avec $D \neq \mathbb{C}$, et dont le bord ∂D est une courbe \mathcal{C}^1 par morceaux, on peut définir le *noyau de Poisson* dans D . Pour tout $z \in D$, la mesure harmonique sur ∂D à partir de z a une densité $P_D(z, x)$ par rapport à la mesure de longueur d'arc dx sur ∂D . C'est le noyau de Poisson, et il est caractérisé par le fait que pour toute $F : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\mathbb{E}_z[F(B_{T_{D^c}})] = \int_{\partial D} P_D(z, x)F(x)dx.$$

L'invariance conforme du mouvement brownien en dimension 2 entraîne la covariance conforme du noyau de Poisson. Soient D et \tilde{D} deux domaines ouverts simplement connexes, différent de \mathbb{C} . On suppose que les bords ∂D et $\partial \tilde{D}$ sont des courbes \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit $f : D \rightarrow \tilde{D}$ une transformation conforme. Dans ce cas (admis) la dérivée f' se prolonge par continuité à tous les points $x \in \partial D$ tel que x n'est pas un point de rupture de pente pour ∂D , et $f(x)$ n'est pas un point de rupture de pente pour $\partial \tilde{D}$.

Corollaire 3. *Pour tout $z \in D$ et tout $x \in \partial D$ tel que x n'est pas un point de rupture de pente pour ∂D , et $f(x)$ n'est pas un point de rupture de pente pour $\partial \tilde{D}$, on a l'égalité*

$$P_{\tilde{D}}(f(z), f(x)) = |f'(x)|^{-1}P_D(z, x).$$

Démonstration. Fixons $z \in D$ et soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} issu de z . Alors d'après Proposition 9, $(f(B_{A^{-1}(u \wedge A(T_{D^c}))}))_{u \geq 0}$ est distribué comme un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} issu de $f(z_0)$ et arrêté à la sortie de \tilde{D} . Donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{D}} P_{\tilde{D}}(f(z), y)F(y)dy &= \mathbb{E}_z[F(f(B_{A^{-1}(A(T_{D^c}))}))] = \mathbb{E}_z[F(f(B_{T_{D^c}}))] \\ &= \int_{\partial D} P_D(z, x)F(f(x))dx. \end{aligned}$$

Faisons ensuite le changement de variables $y = f(x)$. On obtient alors

$$\int_{\partial \tilde{D}} P_{\tilde{D}}(f(z), y)F(y)dy = \int_{\partial \tilde{D}} P_D(z, f^{-1}(y))F(y)|f' \circ f^{-1}(y)|^{-1}dy.$$

Donc dy -presque partout sur $\partial\tilde{D}$,

$$P_{\tilde{D}}(f(z), y) = |f' \circ f^{-1}(y)|^{-1} P_D(z, f^{-1}(y)).$$

On conclut en utilisant les propriétés de continuité de f' sur ∂D . \square

En utilisant le Corolaire 3, on peut exprimer le noyau de Poisson explicitement dans divers domaines. Notons

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\}.$$

Par symétrie par rotation, on a

$$P_{\mathbb{D}}(0, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}.$$

En utilisant les automorphismes conformes de \mathbb{D} (Proposition 28), on obtient l'expression suivant du noyau de Poisson sur \mathbb{D} :

$$P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left(\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} \right).$$

En utilisant l'inversion $z \mapsto z^{-1}$, on obtient le noyau de Poisson sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$:

$$P_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left(\frac{1 + z^{-1}e^{i\theta}}{1 - z^{-1}e^{i\theta}} \right).$$

Ensuite, on peut obtenir la restriction du noyau de Poisson sur $\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}$ à $\partial\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ en utilisant le principe de réflexion pour le mouvement brownien :

$$P_{\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) = P_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) - P_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{-i\theta}).$$

En effet, si une trajectoire brownienne partant de $z \in \mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ touche \mathbb{R} avant $\overline{\mathbb{D}}$, alors à partir de là elle a même probabilité infinitésimale conditionnelle de sortir de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ par $e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$, que par $e^{-i\theta}$. Dans la suite nous allons seulement utiliser que lorsque $|z| \rightarrow +\infty$,

$$P_{\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) = \frac{2 \sin(\theta) \text{Im}(z)}{\pi |z|^2} (1 + O(|z|^{-1})). \quad (4.3)$$

Notons aussi qu'en utilisant les transformations conformes de \mathbb{D} vers \mathbb{H} (Proposition 29), on obtient le noyau de Poisson dans \mathbb{H} :

$$P_{\mathbb{H}}(z, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im}(z)}{|z - x|^2}. \quad (4.4)$$

4.1.2. Enveloppes et capacité de demi-plan

Rappelons les notations

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\}.$$

Nous allons considérer des enveloppes dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} .

Définition 11. Un sous-ensemble compact K de $\overline{\mathbb{H}}$ est une *enveloppe* (*hull* en anglais) si $\mathbb{H} \setminus K$ est connexe et simplement connexe.

DESSIN ENVELOPPE

Si K est une enveloppe, alors $\mathbb{H} \setminus K$ est conformément équivalent à \mathbb{H} par le théorème d'uniformisation de Riemann (voir Théorème 16). Nous allons considérer en particulier les transformations conformes $f : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ tel que $f(\infty) = \infty$ et décrire leur développement asymptotique au voisinage de ∞ . Notons aussi que dans la suite nous n'allons pas distinguer deux enveloppes K et K' si $K \cap \mathbb{H} = K' \cap \mathbb{H}$.

Proposition 10. Soit K une enveloppe et $f : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ une transformation conforme tel que $f(\infty) = \infty$. Alors il existe $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $|z| \rightarrow +\infty$,

$$f(z) = \lambda z + x + \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \quad (4.5)$$

De plus, pour tout choix de $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique transformation conforme $f : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ tel que (4.5) soit satisfaite avec ces valeurs particulières de λ et x , et un C dépendant de λ et x .

Démonstration. On considère l'inversion $\psi(z) = -z^{-1}$ qui induit un automorphisme conforme de \mathbb{H} . Notons que $\psi \circ \psi(z) = z$, et que $\psi(\infty) = 0$. Soit $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \psi$. Alors \tilde{f} est une transformation conforme de $\mathcal{D} = \psi(\mathbb{H} \setminus K)$ vers \mathbb{H} , avec $\tilde{f}(0) = 0$. Le bord $\partial\mathcal{D}$ contient un intervalle ouvert J autour de 0 dans \mathbb{R} . D'après le principe de prolongement des transformations conformes au bord (Proposition 31), \tilde{f} se prolonge par continuité à $\mathcal{D} \cup J'$, où J' est un sous-intervalle ouvert de J contenant 0. De plus, $\tilde{f}(J') \subset \partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$. Donc on peut appliquer le principe de réflexion de Schwarz (Théorème 15) à \tilde{f} , pour étendre \tilde{f} en une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 dans \mathbb{C} . En particulier, on peut écrire un développement limité à trois termes au voisinage de 0 :

$$\tilde{f}(w) = aw + bw^2 + cw^3 + O(|w|^4).$$

De plus, comme $\tilde{f}(J') \subset \mathbb{R}$, on a $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vérifions qu'en fait $a > 0$. D'une part,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-1} \tilde{f}(ri) = ai.$$

Or, pour tout r assez petit, $\tilde{f}(ri) \in \mathbb{H}$. Donc $a \geq 0$. Supposons par l'absurde que $a = 0$. Comme \tilde{f} n'est pas uniformément nulle au voisinage de 0, il existe (voir Proposition 24)

$n \geq 2$ et $v \in \mathbb{R}^*$ tel qu'au voisinage de 0, $\tilde{f}(z) \sim vz^n$. Dans le cas où $v > 0$, on considère $\tilde{f}(re^{i3\pi/(2n)})$, et on a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n} \tilde{f}(re^{i3\pi/(2n)}) = -iv.$$

Or, comme $n \geq 2$, $re^{i3\pi/(2n)} \in \mathbb{H}$, et donc pour r assez petit, $\tilde{f}(re^{i3\pi/(2n)}) \in \mathbb{H}$. On aboutit à une contradiction. Dans le cas où $v < 0$, on considère $\tilde{f}(re^{i\pi/(2n)})$ à la place. Conclusion : $a \neq 0$ et $a > 0$.

Le développement limité en 0 pour \tilde{f} induit un développement asymptotique pour $f = \psi \circ \tilde{f} \circ \psi$ près de ∞ . Après calcul, on trouve (4.5) avec

$$\lambda = a^{-1} > 0, \quad x = a^{-2}b \in \mathbb{R}, \quad C = a^{-3}(b^2 - ac) \in \mathbb{R}.$$

Si on a une transformation conforme f avec un développement (4.5) et si on prends d'autres valeurs $\hat{\lambda} > 0$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}$, alors $\hat{\lambda}\lambda^{-1}f + \hat{x} - \hat{\lambda}\lambda^{-1}x$ est encore une transformation conforme de $\mathbb{H} \setminus K$ vers \mathbb{H} et satisfait un développement asymptotique avec $\hat{\lambda}$ et \hat{x} .

Si f et \hat{f} sont deux transformations conformes $\mathbb{H} \setminus K$ vers \mathbb{H} satisfaisant

$$f(z) = \hat{f}(z) + O(|z|^{-1}) = \lambda z + x + O(|z|^{-1}),$$

alors $\hat{f} \circ f^{-1}$ est un automorphisme conforme de \mathbb{H} , avec, au voisinage de ∞ , $\hat{f} \circ f^{-1}(z) = z + O(|z|^{-1})$. D'après la structure générale des automorphismes conformes de \mathbb{H} (Proposition 29), on a $\hat{f} \circ f^{-1}(z) = z$, et donc $\hat{f} = f$. \square

Dans la suite, nous allons associer à une enveloppe K l'unique transformation conforme g_K de $\mathbb{H} \setminus K$ vers \mathbb{H} satisfaisant au voisinage de ∞

$$g_K(z) = z + \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

La valeur C , dépendant de K , est ce qu'on appelle la *capacité de demi-plan* de K .

Définition 12. Étant donnée une enveloppe K , sa *capacité de demi-plan* (*half-plane capacity* en anglais) est

$$\text{hcap}(K) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} z(g_K(z) - z).$$

Ainsi,

$$g_K(z) = z + \frac{\text{hcap}(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \quad (4.6)$$

A priori, $\text{hcap}(K) \in \mathbb{R}$, mais nous allons voir dans la suite que $\text{hcap}(K) \geq 0$ et que $\text{hcap}(K) = 0$ si et seulement si $K \subset \mathbb{R}$. Mais regardons d'abord comment change $\text{hcap}(K)$ lorsqu'on applique à K une dilatation ou une translation horizontale.

Proposition 11. Soit K une enveloppe. Alors pour tout $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{hcap}(\lambda K + x) = \lambda^2 \text{hcap}(K).$$

Démonstration. En effet, on peut vérifier que

$$g_{\lambda K+x}(z) = \lambda g_K(\lambda^{-1}(z-x)) + x,$$

et on regarde le terme en z^{-1} dans le développement de $g_{\lambda K+x}(z)$. \square

Proposition 12. *Soient deux enveloppes K et K' avec $K \subset K'$. Soit $\tilde{K} = \overline{g_K(K' \setminus K)}$. Alors*

$$\text{hcap}(K') = \text{hcap}(K) + \text{hcap}(\tilde{K}).$$

Démonstration. L'application $g_{K'} \circ g_K^{-1}$ induit une transformation conforme de $\mathbb{H} \setminus \tilde{K}$ vers \mathbb{H} . De plus, on a le développement asymptotique

$$g_{K'} \circ g_K^{-1}(z) = z + \frac{\text{hcap}(K') - \text{hcap}(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Donc $g_{K'} \circ g_K^{-1}$ coïncide avec $g_{\tilde{K}}$ sur $\mathbb{H} \setminus \tilde{K}$ et

$$\text{hcap}(\tilde{K}) = \text{hcap}(K') - \text{hcap}(K). \quad \square$$

Proposition 13. *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{C} . Notons \mathbb{E}_z l'espérance par rapport à $(B_t)_{t \geq 0}$ lorsque $B_0 = z$. Étant donné un fermé $F \subset \mathbb{C}$, on note par T_F le premier temps d'atteinte de F :*

$$T_F = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \in F\}.$$

Soit $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ une enveloppe. On a les propriétés suivantes.

1. *Pour tout $z \in \mathbb{H} \setminus K$,*

$$\text{Im}(z) = \text{Im}(g_K(z)) + \mathbb{E}_z[\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})]. \quad (4.7)$$

2. *On a*

$$\text{hcap}(K) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \mathbb{E}_{iy}[\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})].$$

3. *Si de plus $K \subset \overline{\mathbb{D}}$, alors*

$$\text{hcap}(K) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}}[\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] \sin(\theta) d\theta. \quad (4.8)$$

Démonstration. 1. La fonction $v(z) = \text{Im}(z - g_K(z))$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{H} \setminus K$, en tant que partie imaginaire d'une fonction holomorphe. De plus, par (4.6), $v(z)$ est bornée. Donc $v(B_t)$ est une martingale bornée, et par théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}_z[v(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = \text{Im}(z - g_K(z)).$$

Comme $\text{Im}(g_K(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})) = 0$, on obtient (4.7).

2. Par (4.6), on a

$$g_K(iy) = iy - i \frac{\text{hcap}(K)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

En combinant avec (4.7), on obtient

$$\mathbb{E}_{iy} [\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = \frac{\text{hcap}(K)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

3. Rappelons que $P_{\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}}$ désigne le noyau de Poisson sur $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Comme $K \subset \mathbb{D}$, par propriété de Markov forte, on a pour $y > 1$:

$$y \mathbb{E}_{iy} [\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = y \int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}} [\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] P_{\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(iy, e^{i\theta}) d\theta.$$

En effet, pour arriver sur K avant de toucher sur \mathbb{R} , le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ doit d'abord passer par le demi-cercle $\{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq \pi\}$. On conclut en appliquant (4.3). \square

L'identité (4.8), le scaling de $\text{hcap}(K)$ par dilatations (Proposition 11), ainsi que la Proposition 12 impliquent immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4. *Pour toute enveloppe $K \subset \overline{\mathbb{H}}$, $\text{hcap}(K) \geq 0$. De plus, $\text{hcap}(K) = 0$ si et seulement si $K \subset \mathbb{R}$. Si K et K' sont deux enveloppes tel que $K \subset K'$, alors $\text{hcap}(K) \leq \text{hcap}(K')$. De plus, $\text{hcap}(K) = \text{hcap}(K')$ si et seulement si $K' \subset K \cup \mathbb{R}$.*

Ainsi, la capacité de demi-plan est une manière de mesurer la taille d'une enveloppe K vue depuis l'infini $+i\infty$.

Voici deux exemples simples où la valeur de hcap est connue explicitement.

Exemple 3. Le demi-disque : Si $K = \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}$, alors $g_K(z) = z + z^{-1}$, et donc $\text{hcap}(K) = 1$.

Le segment vertical : Si $K = \{iy | 0 \leq y \leq 1\}$, alors

$$g_K(z) = \sqrt{z^2 + 1} = z + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

et donc $\text{hcap}(K) = 1/2$.

4.1.3. Deux estimées

Étant donnée une enveloppe $K \subset \overline{\mathbb{H}}$, nous allons noter

$$\text{rad}(K) = \max\{|z| | z \in K\}, \quad \widetilde{\text{rad}}(K) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \text{rad}(K - x).$$

Dans cette section nous allons montrer deux estimées portant sur g_K . La première estimée vise à borner la distance $|g_K(z) - z|$. Notons que la transformation g_K se prolonge continument à $\overline{\mathbb{H}} \setminus K$. Ceci est dû au principe de prolongement des transformations conformes au bord (Proposition 31).

Proposition 14. Soit une enveloppe $K \subset \overline{\mathbb{H}}$. Alors pour tout $x > \text{rad}(K)$,

$$g_K(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \pi y \left[\frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}} \in [x, +\infty)) \right],$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien sur \mathbb{C} . De manière symétrique, pour tout $x < -\text{rad}(K)$,

$$g_K(x) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \pi y \left[\frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}} \in (-\infty, x]) \right].$$

Démonstration. Considérons d'abord $\mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [x, +\infty))$, c.à.d. on ne prends pas K en compte. D'après l'expression du noyau de Poisson dans \mathbb{H} (4.4),

$$\frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [x, +\infty)) = \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [0, x]) = \int_0^x \frac{y}{\pi(y^2 + a^2)} da.$$

D'où

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \pi y \left[\frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [x, +\infty)) \right] = x. \quad (4.9)$$

Décomposons maintenant g_K en partie réelle et partie imaginaire : $g_K = u_K + iv_K$. Par invariance conforme du mouvement brownien plan (Proposition 9), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}} \in [x, +\infty)) &= \mathbb{P}_{g_K(iy)}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [g_K(x), +\infty)) \\ &= \mathbb{P}_{iv_K(iy)}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [g_K(x) - u_K(iy), +\infty)). \end{aligned}$$

Or, lorsque $y \rightarrow +\infty$, $g_K(iy) = iy - i \text{hcap}(K)y^{-1} + O(y^{-2})$. En particulier, $v_K(iy) \sim y$ et $u_K(iy) = O(y^{-2})$. On conclut donc par (4.9). \square

Proposition 15 (Première estimée). Soit une enveloppe $K \subset \overline{\mathbb{H}}$. On a :

1. Si $\text{rad}(K) \leq 1$, alors pour tout $x > 1$,

$$x \leq g_K(x) \leq x + \frac{1}{x},$$

et pour tout $x < -1$,

$$x + \frac{1}{x} \leq g_K(x) \leq x.$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{H} \setminus K$,

$$|g_K(z) - z| \leq 3\widetilde{\text{rad}}(K).$$

Démonstration. 1. Soit $x > 1$, le cas $x < -1$ étant symétrique. La Proposition 14 implique que $g_K(x)$ est monotone croissant par rapport à K . Ainsi, $g_K(x)$ est minimisé lorsque $K \subset [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, et alors $g_K(x) = x$. D'autre part, sous la contrainte $\text{rad}(K) \leq 1$, $g_K(x)$ est maximisé lorsque $K = \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}$. Or $g_{\overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}}(x) = x + x^{-1}$ (voir Exemple 3).

2. Montrons d'abord que pour tout $z \in \mathbb{H} \setminus K$, $|g_K(z) - z| \leq 3\text{rad}(K)$. Ensuite, on utilise que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_K(z) - z| = |g_{K-x}(z-x) - (z-x)|$$

et on optimise par rapport à x . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\text{rad}(K) = 1$. En effet,

$$|g_K(z) - z| = \text{rad}(K)|g_{\text{rad}(K)^{-1}K}(\text{rad}(K)^{-1}z) - \text{rad}(K)^{-1}z|.$$

On considère sur $\mathbb{H} \setminus K$ la fonction $f(z) = |g_K(z) - z|$. Alors la fonction $\log f$ est harmonique sur

$$\{z \in \mathbb{H} \setminus K | f(z) > 0\};$$

voir Proposition 27. Donc, par principe du maximum, f n'atteint pas son suprémum sur $\mathbb{H} \setminus K$, à moins d'être constante. De plus, par (4.6), $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$. Donc,

$$\sup_{\mathbb{H} \setminus K} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \setminus K \\ d(z, \partial(\mathbb{H} \setminus K)) < \varepsilon}} f(z).$$

Or, d'après 1., pour tout $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $|g_K(x) - x| \leq |x|^{-1} \leq 1$. De plus, les valeurs d'adhérence de $g_K(z)$ lorsque $d(z, \partial(\mathbb{H} \setminus K) \cap \overline{\mathbb{D}}) \rightarrow 0$, sont contenues dans l'intervalle réel $[g_K((-1)^-), g_K(1^+)]$. Or, d'après 1.,

$$[g_K((-1)^-), g_K(1^+)] \subset [-2, 2].$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \setminus K \\ d(z, \partial(\mathbb{H} \setminus K) \cap \overline{\mathbb{D}}) < \varepsilon}} f(z) \leq 2 + 1 = 3.$$

Donc $\sup_{\mathbb{H} \setminus K} f \leq 3$, ce qui conclut. \square

La deuxième estimée vise à borner de manière plus précise l'erreur en $O(|z|^{-2})$ dans le développement asymptotique (4.6).

Lemme 24. *Soient $R' > R > 0$. Soit f une fonction harmonique réelle sur le disque $R'\mathbb{D}$. Alors*

$$\|(\nabla f)(0)\|_2 \leq C \frac{1}{R} \sup_{R\partial\mathbb{D}} |f|,$$

où C est une constante qui ne dépend pas de (R, R') .

Démonstration. Comme f est harmonique, pour tout $z \in R\mathbb{D}$,

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) P_{\mathbb{D}}(R^{-1}z, e^{i\theta}) d\theta,$$

où $P_{\mathbb{D}}$ est le noyau de Poisson sur le disque unité \mathbb{D} . D'où

$$(\nabla f)(z) = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \nabla_1 P_{\mathbb{D}}(R^{-1}z, e^{i\theta}) d\theta,$$

où $\nabla_1 P_{\mathbb{D}}$ désigne le gradient de $P_{\mathbb{D}}$ par rapport à la première variable. Ceci conclut. \square

Proposition 16 (Deuxième estimée.). *Il existe une constant $c > 0$ tel que pour toute enveloppe $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ et tout $z \in \mathbb{H} \setminus K$ avec $|z| \geq 2 \operatorname{rad}(K)$,*

$$\left| g_K(z) - z - \frac{\operatorname{hcap}(K)}{z} \right| \leq c \frac{\operatorname{rad}(K) \operatorname{hcap}(K)}{|z|^2}.$$

Démonstration. Par dilatation, on peut supposer que $\operatorname{rad}(K) = 1$. Soit la fonction

$$h(z) = g_K(z) - z - \frac{\operatorname{hcap}(K)}{z},$$

qui est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H} \setminus K$. Soit $v(z) = \operatorname{Im}(h(z))$. Soit $z \in \mathbb{H} \setminus K$. D'après (4.7),

$$\operatorname{Im}(g_K(z) - z) = -\mathbb{E}_z[\operatorname{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = -\int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] P_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) d\theta.$$

En utilisant (4.3), on obtient que

$$\operatorname{Im}(g_K(z) - z) = -\frac{2 \operatorname{Im}(z)}{\pi |z|^2} \int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}}[\operatorname{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] \sin(\theta) (1 + O(|z|^{-1})) d\theta.$$

En combinant avec (4.8), on obtient que pour tout $z \in \mathbb{H} \setminus (3/2\mathbb{D})$,

$$|v(z)| \leq C \frac{\operatorname{hcap}(K) \operatorname{Im}(z)}{|z|^3}$$

pour une constante $C > 0$. Avec le Lemme 24, on obtient que pour tout $z \in \mathbb{H} \setminus (2\mathbb{D})$,

$$\|(\nabla v)(z)\|_2 \leq C' \frac{\operatorname{hcap}(K)}{|z|^3}.$$

Or $\|(\nabla v)(z)\|_2 = |h'(z)|$ (voir Proposition 26). Ainsi on a une borne sur $|h'|$. Soit $y \geq 2$. Comme $\lim_\infty h = 0$, on a

$$h(iy) = -i \int_y^{+\infty} h'(ia) da.$$

D'où

$$|h(iy)| \leq C'' \frac{\operatorname{hcap}(K)}{y^2}.$$

De manière similaire, pour $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 2$, on intègre h' le long de l'arc de cercle joignant ir et $re^{i\theta}$, et on obtient

$$|h(re^{i\theta})| \leq |h(ir)| + C''' \frac{\operatorname{hcap}(K)}{r^2}.$$

Ceci conclut la preuve. □

4.1.4. Famille d'enveloppes à croissance locale et équation de Loewner

Dans cette section nous allons faire croître des enveloppes K_t dans le demi-plan de manière continue et déduire l'équation différentielle, due à Loewner, satisfaite par g_{K_t} .

Définition 13. Soit une famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{H}}$ tel que pour tous $t \geq s \geq 0$, $K_s \subset K_t$. On dit que $(K_t)_{t \geq 0}$ satisfait la *propriété de croissance locale* si pour tout $T > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [0, T]} \widetilde{\text{rad}}(g_{K_t}(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)) = 0.$$

Lemme 25. Si la famille croissante d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ satisfait la propriété de croissance locale, alors la fonction $t \mapsto \text{hcap}(K_t)$ est continue (et croissante) sur $[0, +\infty)$.

Démonstration. La croissance de $\text{hcap}(K_t)$ est due à la croissance de K_t pour l'inclusion. D'après la Proposition 12, pour $t > s \geq 0$,

$$\text{hcap}(K_t) = \text{hcap}(K_s) + \text{hcap}(g_{K_s}(K_t)).$$

Or

$$\text{hcap}(g_{K_s}(K_t)) = \text{hcap}(g_{K_s}(K_t \setminus K_s)) \leq \widetilde{\text{rad}}(g_{K_s}(K_t \setminus K_s))^2 \text{hcap}(\overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}) = \widetilde{\text{rad}}(g_{K_s}(K_t \setminus K_s))^2.$$

On conclut en utilisant la propriété de croissance locale. \square

Avant de continuer, donnons des exemples de famille d'enveloppes à croissance locale. L'énoncé suivant est donné sans démonstration, qui reposerait sur l'estimée de Beurling. Pour les détails voir Section 4.1 dans [Law05] et Proposition 6.12 dans [MS16].

Proposition 17. 1. Soit $(\gamma(t))_{t \geq 0}$ une courbe continue simple dans $\overline{\mathbb{H}}$, c.à.d. l'application $t \mapsto \gamma(t)$ est continue injective. On suppose de plus que $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$, $\gamma(t) \in \mathbb{H}$. Soit K_t l'enveloppe $\gamma([0, t])$ (trace de la courbe jusqu'au temps t). Alors la famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ vérifie la propriété de croissance locale, et de plus $\text{hcap}(K_t)$ est strictement croissante.

2. Plus généralement, soit $(\gamma(t))_{t \geq 0}$ une courbe continue dans $\overline{\mathbb{H}}$, sans hypothèse de simplicité. On suppose que $\gamma(0) \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)$ étant autorisée de revenir vers \mathbb{R} pour $t > 0$. On dénote par K_t le complémentaire dans $\overline{\mathbb{H}}$ de l'unique composante connexe non-bornée de $\overline{\mathbb{H}} \setminus \gamma([0, t])$. En d'autres termes, K_t est obtenue en prenant la courbe $\gamma([0, t])$ et en remplissant les régions renfermées par $\gamma([0, t])$, et K_t est une enveloppe par construction. On suppose que pour tout $s \geq 0$, le mesure de Lebesgue de l'ensemble des temps

$$\{t \geq 0 \mid \gamma(t) \in K_s\}.$$

est nulle. On suppose de plus que pour tout $t > 0$, et pour tous $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ assez petits, $\gamma(t - \varepsilon)$ et $\gamma(t + \varepsilon')$ peuvent être joints par un chemin dans $\overline{\mathbb{H}} \setminus K_{t-\varepsilon}$ dont longueur tend vers 0 lorsque $\varepsilon \vee \varepsilon' \rightarrow 0$ (voir DESSIN). Dans des termes plus intuitifs, cela signifie que la courbe est autorisée de "rebondir" sur elle-même mais pas de se couper transversalement. Alors la famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ vérifie la propriété de croissance locale, et de plus $\text{hcap}(K_t)$ est strictement croissante.

DESSINS

Il est à noter qu'une famille d'enveloppes à croissance locale n'est pas forcément engendrée par une courbe comme dans Proposition 17. Voir le contre-exemple plus bas.

DESSIN CONTRE EXEMPLE

Dans la suite, nous allons considérer une famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. La famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ est à croissance locale.
2. Le compact K_0 est un point (singleton) dans \mathbb{R} .
3. Pour tous $t > s \geq 0$, $K_t \setminus (K_s \cup \mathbb{R}) \neq \emptyset$.
4. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $\text{hcap}(K_t) \rightarrow +\infty$.

La condition 1. implique que $t \mapsto \text{hcap}(K_t)$ est continue (Lemme 25), la condition 2. que $\text{hcap}(K_0) = 0$, et la condition 3. que $t \mapsto \text{hcap}(K_t)$ est strictement croissante. On peut donc, quitte à faire un changement de temps, supposer que pour tout $t \geq 0$,

$$\text{hcap}(K_t) = 2t. \quad (4.10)$$

En effet, si ce n'est pas le cas, on fait le changement de temps

$$ds = \frac{1}{2} \text{hcap}(K_t) dt.$$

Dans la suite nous allons donc adopter la convention (4.10), et nous allons utiliser la notation g_t pour g_{K_t} .

Pour $t \geq 0$, considérons l'intersection

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{g_t(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)}.$$

Comme c'est un intersection monotone de compacte et pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{g_t(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)}$, on obtient que l'intersection est elle-même non-vide. De plus, la propriété de croissance local implique qu'elle a un diamètre nul, don est réduite à un point. Notons par ξ_t ce point, de sorte que

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{g_t(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)} = \{\xi_t\}.$$

Notons que par construction, $\xi_t \in \mathbb{R}$.

Définition 14. La fonction $t \mapsto \xi_t$ est appelée *fonction pilote* (*driving function* en anglais) de la famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$.

Dans la suite, pour $s > t \geq 0$, nous allons utiliser la notation

$$K_{s,t} = \overline{g_t(K_s \setminus K_t)}.$$

Notons que $K_{s,t}$ est une enveloppe dans $\overline{\mathbb{H}}$.

Proposition 18. *La fonction pilote $t \mapsto \xi_t$ est continue sur $[0, +\infty)$.*

Démonstration. Soient $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Soit z_0 un point dans $g_t(K_{t+2\varepsilon} \setminus (K_{t+\varepsilon} \cup \mathbb{R}))$. On a $|z_0 - \xi_t| \leq \widetilde{\text{rad}}(K_{t,t+2\varepsilon})$. Soit $z_1 = g_{t+\varepsilon} \circ g_t^{-1}(z_0)$. Alors $z_1 \in g_{t+\varepsilon}(K_{t+2\varepsilon} \setminus (K_{t+\varepsilon} \cup \mathbb{R}))$, et donc $|z_1 - \xi_{t+\varepsilon}| \leq \text{rad}(K_{t+\varepsilon,t+2\varepsilon})$. Mais d'après la Proposition 15, $|z_1 - z_0| \leq 3\text{rad}(K_{t,t+\varepsilon})$. Ainsi,

$$|\xi_{t+\varepsilon} - \xi_t| \leq |\xi_{t+\varepsilon} - z_1| + |z_1 - z_0| + |z_0 - \xi_t| \leq \widetilde{\text{rad}}(K_{t+\varepsilon,t+2\varepsilon}) + 3\widetilde{\text{rad}}(K_{t,t+\varepsilon}) + \widetilde{\text{rad}}(K_{t,t+2\varepsilon}).$$

On conclut en utilisant la propriété de croissance locale. \square

Dans la suite nous présentons l'équation différentielle de Loewner qui relie l'évolution temporelle de g_t , et donc de K_t , à la fonction pilote ξ_t .

Théorème 9 (Loewner). *Pour tous $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$,*

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \xi_t}. \quad (4.11)$$

Démonstration. Soient $t_2 > t_1 \geq 0$. Notons

$$\widehat{K}_{t_1,t_2} = K_{t_1,t_2} - \xi_{t_1}, \quad \widehat{g}_{t_1,t_2}(w) = g_{t_2} \circ g_{t_1}^{-1}(w + \xi_{t_1}) - \xi_{t_1} = g_{\widehat{K}_{t_1,t_2}}(w).$$

D'après la Proposition 12,

$$\text{hcap}(\widehat{K}_{t_1,t_2}) = \text{hcap}(K_{t_1,t_2}) = 2(t_2 - t_1).$$

Soit $z \in \mathbb{H} \setminus K_{t_2}$. D'après la Proposition 16 appliqué à \widehat{g}_{t_1,t_2} ,

$$\left| g_{t_2}(z) - g_{t_1}(z) - \frac{2(t_2 - t_1)}{g_{t_1}(z) - \xi_{t_1}} \right| \leq 2c \frac{\text{rad}(\widehat{K}_{t_1,t_2})(t_2 - t_1)}{|g_{t_1}(z) - \xi_{t_1}|^2},$$

pourvu que $|g_{t_1}(z) - \xi_{t_1}| \geq 2\text{rad}(\widehat{K}_{t_1,t_2})$. Mais $\text{rad}(\widehat{K}_{t_1,t_2}) \leq 2\widetilde{\text{rad}}(K_{t_1,t_2})$. On conclut avec la propriété de croissance locale. \square

Ainsi, d'après l'équation de Loewner 4.11, la famille de transformations conformes $(g_t)_{t \geq 0}$ est le flot de solutions de l'équation différentielle ordinaire (non-autonome).

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{2}{z(t) - \xi_t}.$$

Exemple 4. Soit $\alpha \in (0, 1)$. On considère la courbe qui décrit une demi-droite d'angle $(1 - \alpha)\pi$: $\gamma(t) = r(t)e^{i(1-\alpha)\pi}$. Donc $K_t = \gamma([0, t])$. On suppose qu'on a une paramétrisation par la capacité de demi-plan : $\text{hcap}(K_t) = 2t$. Par changement d'échelle (Proposition 11),

$$2t = \text{hcap}(K_t) = 2t_\alpha r(t)^2,$$

où $2t_\alpha$ est la capacité de demi-plan du segment de longueur 1 et d'angle $(1 - \alpha)\pi$. C'est à dire,

$$r(t) = \sqrt{\frac{t}{t_\alpha}}.$$

Par invariance d'échelle de la demi-droite, on a que pour tout $\lambda > 0$, $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$, $g_{\lambda^2 t}(z) = \lambda g_t(z/\lambda)$, et $\xi_{\lambda^2 t} = \lambda \xi_t$. Ceci implique en particulier que

$$g_t(z) = \sqrt{t} g_1(z/\sqrt{t}), \quad \xi_t = c_\alpha \sqrt{t},$$

où $c_\alpha = \xi_1$ est une constante réelle. Ainsi, d'une part

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{1}{2\sqrt{t}} g_1(z/\sqrt{t}) - \frac{z}{2t} g_1'(z/\sqrt{t}).$$

D'autre part, avec l'équation de Loewner on a que

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{\sqrt{t}(g_1(z/\sqrt{t}) - c_\alpha)}.$$

On aboutit ainsi à l'équation différentielle suivante pour g_1 :

$$g_1'(z) = \frac{1}{z} \frac{g_1(z)^2 - c_\alpha g_1(z) - 4}{g_1(z) - c_\alpha}.$$

En fait on aboutit à une équation différentielle plus simple en considérant $f = g_1^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z - c_\alpha}{z^2 - c_\alpha z - 4} = -\frac{r^-}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} \frac{1}{z - r^+} + \frac{r^+}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} \frac{1}{z - r^-},$$

avec $r^\pm = (c_\alpha \pm \sqrt{c_\alpha^2 + 16})/2$ (on a séparé les pôles). D'où

$$f(z) = C(z - r_+)^{1-\theta} (z - r_-)^\theta, \quad \text{avec } \theta = \frac{r^+}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_\alpha}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} \right).$$

Avec la normalisation de g_1 à ∞ , on obtient que forcément $C = 1$. La fonction f doit réaliser une transformation conforme de \mathbb{H} vers $\mathbb{H} \setminus K_1$. Or, $f(\mathbb{H})$ est le demi-plan supérieur privé d'un segment d'angle $(1 - \theta)\pi$ et de longueur $\sqrt{c_\alpha^2 + 16}/2$. D'où,

$$\alpha = \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{t_\alpha}} = \frac{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}}{2}.$$

Finalement, on trouve

$$c_\alpha = \frac{2(2\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}}, \quad t_\alpha = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{4\alpha^{2\alpha}(1 - \alpha)^{2(1-\alpha)}}.$$

Dans le cas particulier d'un demi-droite verticale ($\alpha = 1/2$), on trouve que $c_{1/2} = 0$, et donc $\xi_t \equiv 0$ et

$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t}.$$

Dans l'exemple précédent, pour une demi-droite allant vers la gauche ($\alpha \in (0, 1/2)$), on a $c_\alpha < 0$, et pour une demi-droite vers la droite ($\alpha \in (1/2, 1)$), on a $c_\alpha > 0$. L'heuristique générale est lorsque ξ_t augmente, l'enveloppe tourne vers la droite, et lorsque ξ_t diminue, l'enveloppe tourne vers la gauche. L'image est vraiment celle d'un volant (ξ_t) guidant un véhicule (K_t). D'où le nom de *fonction pilote*.

4.1.5. Familles croissantes d'enveloppes à partir de fonctions pilotes

Nous avons vu que si on a une famille d'enveloppes du demi-plan avec une propriété de croissance locale, alors lui est associée une fonction pilote qui décrit l'évolution des transformations conformes g_t à travers l'équation différentielle de Loewner (4.11). Mais pour la théorie des processus SLE, ce qui va nous intéresser c'est surtout le point de vue inverse : en partant d'un fonction pilote générer une famille croissante d'enveloppes. Nous expliquons cela dans cette section.

Théorème 10 (Loewner). *Soit $t \mapsto \xi_t$ une fonction continue $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe une unique famille croissante d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ vérifiant l'équation de Loewner (4.11) (avec ce choix de ξ_t là) et tel que $K_0 = \{\xi_0\}$. De plus, cette famille d'enveloppes est à croissance locale, pour tout $t \geq 0$, $\text{hcap}(K_t) = 2t$, et $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est sa fonction pilote.*

Pour des raisons techniques, nous allons aussi considérer le demi-plan inférieur, pas seulement le demi-plan supérieur. Notons

$$\mathcal{D} = \{(t, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{C} \mid z \neq \xi_t\},$$

Le sous-ensemble \mathcal{D} est un ouvert de $[0, +\infty) \times \mathbb{C}$. Soit F la fonction définie sur \mathcal{D} par

$$F(t, z) = \frac{2}{z - \xi_t}.$$

On considère l'EDO

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(t, z(t)) = \frac{2}{z(t) - \xi_t}. \quad (4.12)$$

La fonction F est continue sur \mathcal{D} et est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable z . Donc la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'EDO (4.12). Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$, il existe une unique solution maximale de (4.12) issue de z à $t = 0$. On note par $[0, T^{\max}(z))$ son intervalle de définition (avec $T^{\max}(z) \in (0, +\infty]$) et on dénote par $t \mapsto g_t(z)$ cette solution. Par convention, on pose $T^{\max}(\xi_0) = 0$.

Remarquons que pour tout $(z, t) \in \mathcal{D}$, $F(t, \bar{z}) = \overline{F(t, z)}$. Donc, par Cauchy-Lipschitz, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$, $T^{\max}(\bar{z}) = T^{\max}(z)$ et $g_t(\bar{z}) = \overline{g_t(z)}$.

Notons pour $t \geq 0$,

$$\widehat{K}_t = \{z \in \mathbb{C} \mid T^{\max}(z) \leq t\}.$$

Cauchy-Lipschitz assure que \widehat{K}_t est un fermé de \mathbb{C} . Par construction, $\widehat{K}_0 = \{\xi_0\}$ et la famille $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$ est croissante par inclusion. Par ce qui précède, les fermés \widehat{K}_t sont symétriques par réflexion d'axe \mathbb{R} (i.e. invariants par conjugaison complexe). Notons

$$K_t = \widehat{K}_t \cap \overline{\mathbb{H}}.$$

Lemme 26. *Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_0\}$, et $t < T^{\max}(z)$, $g_t(z) \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{H}$ et $t < T^{\max}(z)$, $g_t(z) \in \mathbb{H}$.*

Démonstration. Le premier point découle du fait que pour tout $(z, t) \in \mathcal{D}$ tel que $z \in \mathbb{R}$, on a $F(z, t) \in \mathbb{R}$. Plus généralement si $(z, t_0) \in \mathcal{D}$ et $z \in \mathbb{R}$, alors la solution de (4.12) issue de z au temps t_0 est réelle.

Maintenant soit $z \in \mathbb{H}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t < T^{\max}(z)$ tel que $g_t(z) \notin \mathbb{H}$. Alors la solution issue de z doit nécessairement traverser la droite \mathbb{R} . Soit

$$t_0 = \min\{t \in [0, T^{\max}(z)] \mid g_t(z) \in \mathbb{R}\}.$$

On a $t_0 > 0$ et pour tout $t \in [0, t_0)$, $g_t(z) \in \mathbb{H}$. La fonction $s \mapsto g_{t_0-s}(z)$ est solution de l'EDO

$$\frac{d\tilde{z}(s)}{ds} = -F(t_0 - s, \tilde{z}(s)). \quad (4.13)$$

Cette dernière vérifie aussi Cauchy-Lipschitz, donc la solution issue d'une condition initiale est unique. Or, comme $\tilde{z}(0) = g_{t_0}(z) \in \mathbb{R}$, le solution correspondante de (4.13) est à valeurs réelles, ce qui contredit le fait que $g_{t_0-s}(z) \in \mathbb{H}$ pour $s \in (0, t_0]$. \square

Lemme 27. *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$ tel que $T^{\max}(z) < +\infty$, on a*

$$\liminf_{\substack{t \rightarrow T^{\max}(z) \\ t < T^{\max}(z)}} |g_t(z) - \xi_t| = 0.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$ tel que $T^{\max}(z) < +\infty$. Par Cauchy-Lipschitz, lorsque $t \rightarrow T^{\max}(z)$, $(t, g_t(z))$ doit sortir de tout compact de \mathcal{D} . Donc

$$\liminf_{\substack{t \rightarrow T^{\max}(z) \\ t < T^{\max}(z)}} |g_t(z) - \xi_t| = 0 \quad \text{ou} \quad \limsup_{\substack{t \rightarrow T^{\max}(z) \\ t < T^{\max}(z)}} |g_t(z)| = +\infty.$$

Mais comme pour tout $T > 0$,

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |F(t, z)| = 0,$$

la seconde option n'est pas possible. \square

Lemme 28. *On note pour $T \geq 0$,*

$$S_T = \max_{0 \leq t \leq T} |\xi_t - \xi_0|.$$

Alors pour tout $T \geq 0$,

$$\widehat{K}_T - \xi_0 \subset \sqrt{4S_T^2 + 8T} \overline{\mathbb{D}},$$

et en particulier \widehat{K}_T est compact.

Démonstration. On peut supposer que $\xi_0 = 0$, quitte à faire une translation par $-\xi_0$. Fixons $T > 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 2S_T$. Soit

$$t_0 = t_0(z) = \sup\{t \in (0, T \wedge T^{\max}(z)) \mid \forall s \in [0, t), |g_s(z)| > 2S_T\}.$$

Par construction, $t_0 \leq T$ et si $t_0 < T$, alors $|g_{t_0}(z)| = 2S_T$. On a

$$\frac{d}{dt}|g_t(z)|^2 = 2 \operatorname{Re} \left(\overline{g_t(z)} \frac{d}{dt} g_t(z) \right) = 4 \operatorname{Re} \left(\frac{\overline{g_t(z)}}{g_t(z) - \xi_t} \right).$$

En particulier, pour tout $t \in [0, t_0)$,

$$\left| \frac{d}{dt}|g_t(z)|^2 \right| \leq 4 \frac{|g_t(z)|}{|g_t(z)| - S_T} \leq 8.$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} |g_t(z)|^2 \geq |z|^2 - 8t_0 \geq |z|^2 - 8T.$$

En particulier, si $|z| > \sqrt{4S_T^2 + 8T}$, alors $|g_{t_0}(z)| > 2S_T$. Dans ce cas $t_0 = T$ et $|g_T(z) - \xi_T| > S_T$. En particulier, $T^{\max}(z) > T$ et donc $z \notin \widehat{K}_T$. \square

Lemme 29. *Pour tout $t \geq 0$, la fonction $z \mapsto g_t(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_t$.*

Démonstration. Comme $F(t, z)$ est différentiable par rapport à z et comme le différentielle est continue en (t, z) , d'après Cauchy-Lipschitz, pour tout $t \geq 0$, la fonction $z \mapsto g_t(z)$ est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_t$. De plus, toujours par Cauchy-Lipschitz,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{d}{dt} g_t(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) \right) \frac{\partial}{\partial w} F(t, w = g_t(z)) + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{g_t(z)} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} F(t, w = g_t(z)).$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} F(t, w) = 0,$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) \right) \frac{\partial}{\partial w} F(t, w = g_t(z)).$$

Donc le couple $\left(g_t(z), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) \right)$ est solutions de l'EDO

$$\frac{d}{dt}(z_1(t), z_2(t)) = \widetilde{F}(t, z_1(t), z_2(t)), \quad (4.14)$$

où la fonction \widetilde{F} est donnée par

$$\widetilde{F}(t, z_1, z_2) = \left(F(t, z_1), z_2 \frac{\partial}{\partial w} F(t, w = z_1) \right).$$

De plus, à $t = 0$ on a la condition initiale $(z, 0)$. Or l'EDO (4.14) vérifie encore Cauchy-Lipschitz, et en particulier il y a unicité de solution étant donné une condition initiale. De plus, $t \mapsto (g_t(z), 0)$ est une solution évidente de l'EDO (4.14) issue à $t = 0$ de la condition initiale $(z, 0)$. Par unicité de solutions, on a que pour tout $t \in [0, T^{\max}(z))$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) = 0.$$

On conclut par la Proposition 25. \square

Lemme 30. *Pour tout $t \geq 0$, l'application $z \mapsto g_t(z)$ induit une transformation conforme de $\mathbb{H} \setminus K_t$ vers \mathbb{H} .*

Démonstration. Nous savons déjà que g_t est holomorphe sur $\mathbb{H} \setminus K_t$ et que l'image de $\mathbb{H} \setminus K_t$ est contenue dans \mathbb{H} (preuve similaire à celle du Lemme 26). L'injectivité de g_t résulte de Cauchy-Lipschitz. Il reste à voir que g_t est surjective de $\mathbb{H} \setminus K_t$ vers \mathbb{H} .

Nous allons utiliser le renversement du temps. Fixons $T > 0$. Considérons, pour $t \in [0, T]$, l'EDO

$$\frac{dw(t)}{dt} = \check{F}_T(t, w(t)) \quad (4.15)$$

avec

$$\check{F}_T(t, w) = -F(T - t, w) = -\frac{2}{w - \xi_{T-t}}.$$

Si $w \in \mathbb{H}$ et $(f_t(w))_{0 \leq t \leq T}$ est une solution de l'EDO (4.15) sur $[0, T]$ issue de w , alors $t \mapsto f_{T-t}(w)$ vérifie l'EDO (4.12), et donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$f_{T-t}(w) = g_t(f_T(w)),$$

et en particulier

$$w = f_0(w) = g_T(f_T(w)).$$

Donc f_T donne l'image inverse par g_T . Mais il reste quand même à vérifier que les solutions maximales de l'EDO (4.15) sont bien définies sur $[0, T]$ tout entier. Ceci revient à minorer $|f_t(w) - \xi_{T-t}|$. Considérons la partie imaginaire $\text{Im}(f_t(w))$. On a

$$\frac{d}{dt} \text{Im}(f_t(w)) = -\text{Im}\left(\frac{2}{f_t(w) - \xi_{T-t}}\right) = \frac{2 \text{Im}(f_t(w))}{|f_t(w) - \xi_{T-t}|^2}.$$

En particulier, pour $w \in \mathbb{H}$, $t \mapsto \text{Im}(f_t(w))$ est croissante et donc $|f_t(w) - \xi_{T-t}| \geq \text{Im}(w) > 0$.

Notons que l'absence d'explosion des solutions en temps fini pour une condition initiale dans \mathbb{H} est ce qui différencie l'EDO inversée (4.15) de l'EDO directe (4.12). Pour l'EDO directe (4.12) on a au contraire que $t \mapsto \text{Im}(g_t(z))$ est décroissante pour $z \in \mathbb{H}$. \square

Lemme 31. *Soit $T > 0$. Alors, lorsque $|z| \rightarrow +\infty$,*

$$g_T(z) = z + \frac{2T}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \widehat{K}_T$. On a pour tout $t \in [0, T]$,

$$g_t(z) - z = \int_0^t F(s, g_s(z)) ds = \int_0^t \frac{2}{g_s(z) - \xi_s} ds. \quad (4.16)$$

Comme

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |F(s, z)| = 0,$$

on a

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |g_t(z) - z| = 0. \quad (4.17)$$

On réinjecte (4.17) dans (4.16) pour obtenir

$$g_T(z) - z = \int_0^T \frac{2}{z - \xi_t + o(1)} dt = \frac{2T}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \quad \square$$

Démonstration du Théorème 10. Nous avons déjà construit une famille croissante de compacts $(K_t)_{t \geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{H}}$. Avec le Lemme 30 nous savons que g_t induit une transformation conforme de $\mathbb{H} \setminus K_t$ vers \mathbb{H} . Comme $\mathbb{H} \setminus K_t$ est conformétement équivalent à \mathbb{H} , on obtient que $\mathbb{H} \setminus K_t$ est simplement connexe (nous n'allons pas détailler ce fait topologique intuitif) et donc K_t est une enveloppe. D'après le Lemme 31, g_t est correctement normalisé en ∞ , et donc $g_t = g_{K_t}$ et $\text{hcap}(K_t) = 2t$. L'unicité de la famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ découle de l'unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Vérifions que la famille d'enveloppes $(K_t)_{t \geq 0}$ vérifie bien la propriété de croissance locale. Le Lemme 28 implique que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \widetilde{\text{rad}}(K_t) = 0.$$

Fixons $t_0 > 0$. La famille d'enveloppes $(\overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})})_{t \geq 0}$ est celle qui est obtenue de manière similaire à partir de la fonction $(\xi_{t_0+t})_{t \geq 0}$. Donc on a également

$$\lim_{t \rightarrow 0} \widetilde{\text{rad}}(\overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})}) = 0.$$

C'est la propriété de croissance locale.

Vérifions la fonction $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est bien la fonction pilote de la famille d'enveloppes à croissance locale $(K_t)_{t \geq 0}$. Le Lemme 28 implique que

$$\{\xi_0\} = \bigcap_{t > 0} K_t.$$

Soit $t_0 > 0$. Pour obtenir que

$$\{\xi_{t_0}\} = \bigcap_{t > 0} \overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})}$$

on applique le Lemme 28 à la famille d'enveloppes $(\overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})})_{t \geq 0}$ obtenues avec la fonction $(\xi_{t_0+t})_{t \geq 0}$. \square

4.2. Processus SLE

4.2.1. Définition, invariance conforme et propriété de Markov domaniale

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard 1D issu de 0 ($W_0 = 0$). Nous allons prendre pour fonction pilote $\xi_t = \sqrt{\kappa}W_t$ où $\kappa > 0$ est un paramètre.

Définition 15. Soit $\kappa > 0$. Un processus d'enveloppes SLE_κ cordal dans \mathbb{H} de 0 à ∞ est une famille aléatoire d'enveloppes à croissance locale $(K_t)_{t \geq 0}$ dont la fonction pilote est $\xi_t = \sqrt{\kappa}W_t$.

Ces processus SLE ont été introduit par Schramm comme candidats pour limites d'échelle d'interfaces dans des modèles discrets critiques 2D [Sch00, Sch07]; voir Section 4.2.3. L'acronyme SLE signifie au choix *Schramm-Loewner Evolution* (évolution de Schramm-Loewner) ou bien *Stochastic Loewner Evolution* (évolution de Loewner stochastique).

En général, c'est une question géométrique non-triviale des savoir à partir de la fonction pilote si la famille d'enveloppes correspondante est en fait engendrée par une courbe continue ou non. Il est connu que lorsque la fonction pilote satisfait

$$\forall T > 0, \exists \varepsilon \in (0, 4), \forall 0 \leq s < t \leq T, |\xi_t - \xi_s| < (4 - \varepsilon)|t - s|^{1/2},$$

c'est-à-dire qu'elle est 1/2-hölderienne avec une constante localement < 4 , alors la famille d'enveloppes correspondante est en fait une courbe continue simple [MR05, Lin05]. Toutefois, le mouvement brownien n'est pas localement 1/2-hölderien, mais seulement 1/2 - ε -hölderien. Donc le résultat précédent ne s'applique pas au processus SLE. Néanmoins, Rohde et Schramm ont prouvé dans [RS05] que les processus SLE sont bien engendrée par des courbes continues, mais qui, suivant la valeur de κ , ne sont pas forcément simples. Nous allons admettre leur résultat.

Théorème 11 (Rohde-Schramm [RS05]). *Pour tout $\kappa > 0$, presque sûrement, le processus d'enveloppes $SLE_\kappa (K_t)_{t \geq 0}$ est engendrée par une courbe continue $(\gamma(t))_{t \geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{H}}$. Plus précisément, pour tout $t \geq 0$, $\overline{\mathbb{H}} \setminus K_t$ est l'unique composante connexe non-bornée de $\overline{\mathbb{H}} \setminus \gamma([0, t])$.*

Définition 16. Soit $\kappa > 0$. Une courbe SLE_κ cordale dans \mathbb{H} de 0 à ∞ est la courbe qui engendre le processus d'enveloppes SLE_κ correspondant.

En fait, pour $\kappa \in (0, 4]$, les courbes SLE sont simples et ne touchent pas le bord \mathbb{R} , sauf à $t = 0$. Pour $\kappa \in (4, 8)$, les courbes SLE_κ ont des points multiples et reviennent vers \mathbb{R} , mais ne remplissent pas $\overline{\mathbb{H}}$ tout entier. Pour $\kappa \geq 8$, les SLE_κ sont des courbes de Peano aléatoires qui remplissent le demi-plan $\overline{\mathbb{H}}$ tout entier. Voir Section 4.2.2 et Figure 4.1.

Dans la suite nous allons voir l'invariance en loi par changement d'échelle et la *propriété de Markov domaniale* (*domain Markov property* en anglais) pour le SLE dans le demi-plan.

Proposition 19 (Invariance d'échelle). *Soit $\kappa > 0$ et $(K_t)_{t \geq 0}$ le processus d'enveloppes SLE_κ . Soit $\lambda > 0$ une constante. Alors le processus d'enveloppes $(\lambda K_{\lambda^{-2}t})_{t \geq 0}$ est encore distribué comme un SLE_κ .*

Démonstration. Soit $\widehat{K}_t = \lambda K_{\lambda^{-2}t}$ et $\widehat{g}_t = g_{\widehat{K}_t}$. Notons que

$$\text{hcap}(\widehat{K}_t) = \lambda^2 \text{hcap}(K_{\lambda^{-2}t}) = 2t.$$

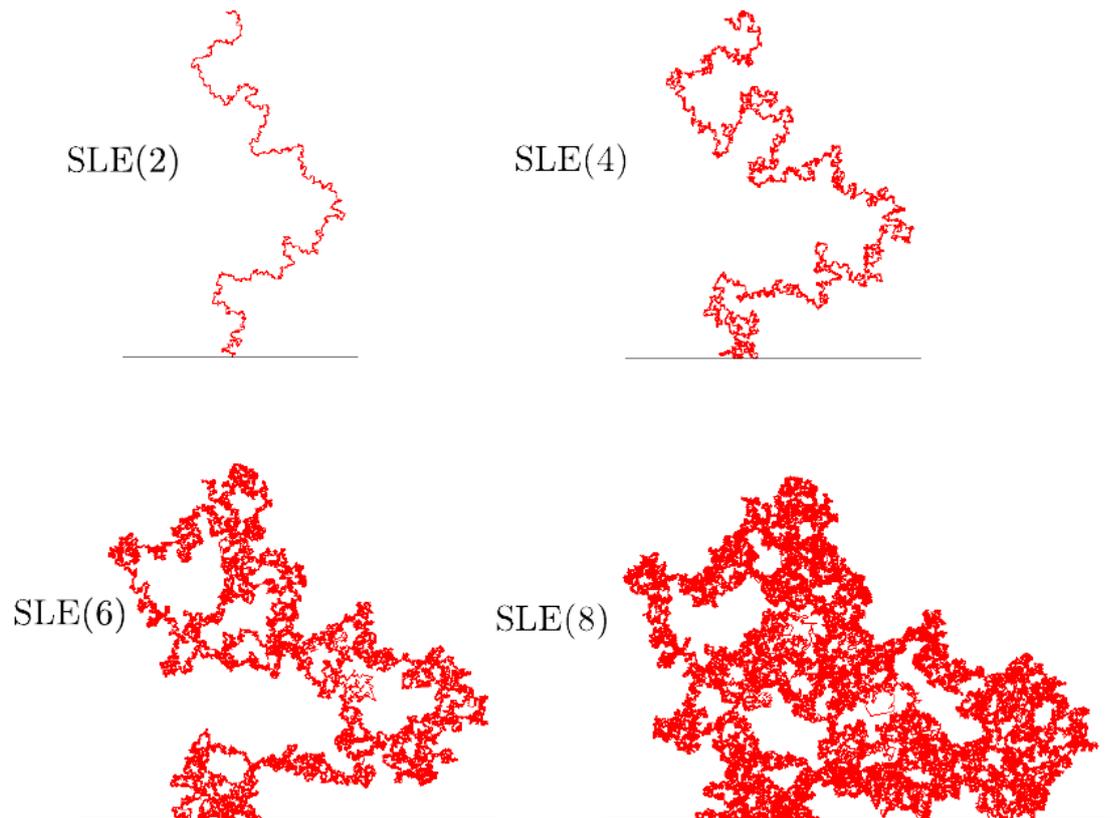


FIGURE 4.1. – Simulation numérique des courbes SLE_κ pour $\kappa \in \{2, 4, 6, 8\}$. Images fournies par Hao Wu (Université Tsinghua).

On a

$$\hat{g}_t(z) = \lambda g_{\lambda^{-2}t}(\lambda^{-1}z).$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{g}_t(z) = \frac{2}{\lambda(g_{\lambda^{-2}t}(\lambda^{-1}z) - \sqrt{\kappa}W_{\lambda^{-2}t})}.$$

Ainsi, la fonction pilote de $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$ est $(\sqrt{\kappa}\lambda W_{\lambda^{-2}t})_{t \geq 0}$, qui a même loi que $(\sqrt{\kappa}W_t)_{t \geq 0}$. \square

Proposition 20 (Propriété de Markov domaniale). *Soit $\kappa > 0$ et $(K_t)_{t \geq 0}$ le processus d'enveloppes SLE_κ . Soit $t_0 > 0$. Soit*

$$\widehat{K}_t = \overline{g_{t_0}(K_{t_0+t} \setminus K_t)} - \sqrt{\kappa}W_{t_0}.$$

Alors, conditionnellement à $(W_s)_{0 \leq s \leq t_0}$, le processus d'enveloppes $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$ est encore distribué comme un SLE_κ .

Démonstration. Soit $\hat{g}_t = g_{\widehat{K}_t}$. On a

$$\hat{g}_t(z) = g_{t_0+t} \circ g_{t_0}^{-1}(z + \sqrt{\kappa}W_{t_0}) - \sqrt{\kappa}W_{t_0}.$$

Ensuite, en différentiant \hat{g}_t , on vérifie que la fonction pilote de $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$ est $(\sqrt{\kappa}(W_{t_0+t} - W_{t_0}))_{t \geq 0}$, qui a même loi que $(\sqrt{\kappa}W_t)_{t \geq 0}$ et est indépendante de $(W_s)_{0 \leq s \leq t_0}$. \square

En fait, la propriété de Markov domaniale et l'invariance d'échelle permettent de caractériser le SLE dans le demi-plan.

Proposition 21. *Soit $(K_t)_{t \geq 0}$ une famille aléatoire d'enveloppes à croissance locale paramétrées par la capacité de demi-plan ($\text{hcap}(K_t = 2t)$). Soit $(\xi_t)_{t \geq 0}$ sa fonction pilote. On suppose les deux propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $t_0 > 0$, la distribution conditionnelle de la famille d'enveloppes $(g_{t_0}(K_{t_0+t} \setminus K_t) - \xi_{t_0})_{t \geq t_0}$, étant donné $(\xi_s)_{0 \leq s \leq t_0}$, est la même que la distribution de $(K_t)_{t \geq 0}$.*
2. *Pour tout $\lambda > 0$, la famille d'enveloppes $(\lambda K_{\lambda^{-2}t})_{t \geq 0}$ a même distribution que $(K_t)_{t \geq 0}$.*

Alors $(K_t)_{t \geq 0}$ est soit un processus d'enveloppes SLE_κ pour un $\kappa > 0$, soit une demi-droite verticale déterministe issue de 0 (cas $\kappa = 0$).

Démonstration. La propriété 1. implique que le processus stochastique $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires. C'est donc un processus de Lévy issu de 0. De plus, il est à trajectoires continus. Donc on peut l'écrire $\xi_t = \sqrt{\kappa}W_t + at$, pour un $\kappa \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}$. La propriété 2. implique que le processus stochastique $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est invariant en loi par scaling brownien. D'où $a = 0$. \square

Dans la suite, nous allons définir les *courbes SLE* dans les domaines simplement connexes généraux.

Soit $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, un ouvert simplement connexe. Soient x et y deux points distincts de ∂D . On suppose aussi le bord ∂D est une courbe continue simple au voisinage de x et au voisinage de y . Notons par $\mathcal{T}^{x,y}$ l'ensemble des transformations conformes ψ du demi-plan \mathbb{H} vers D tel que $\psi(0) = x$ et $\psi(\infty) = y$. Voir Proposition 31 pour l'extension des transformations conformes jusqu'au bord. En fait, l'ensemble $\mathcal{T}^{x,y}$ forme une famille à un paramètre.

Lemme 32. *L'ensemble $\mathcal{T}^{x,y}$ a la structure suivante :*

1. Si $\psi \in \mathcal{T}^{x,y}$ et $\lambda > 0$, alors l'application $z \mapsto \psi(\lambda z)$ est encore dans $\mathcal{T}^{x,y}$.
2. Inversement, si ψ et $\tilde{\psi}$ sont deux éléments de $\mathcal{T}^{x,y}$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $\tilde{\psi}(z) = \psi(\lambda z)$.

Démonstration. Le point 1. est évident. Pour le point 2., on utilise le fait que $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ est un automorphisme conforme du demi-plan \mathbb{H} qui fixe 0 et ∞ . Donc il est forcément de la forme $z \mapsto \lambda z$, pour un $\lambda > 0$. Voir Proposition 29. \square

Définition 17. Soit $\kappa > 0$. La courbe SLE_κ cordale dans D de x vers y est l'image d'une courbe SLE_κ cordale dans \mathbb{H} de 0 vers ∞ par une transformation conforme $\psi \in \mathcal{T}^{x,y}$. L'invariance d'échelle (Proposition 19) et le Lemme 32 assurent que cette courbe SLE_κ dans D est bien définie en loi, modulo les changements de paramétrisation par le temps.

L'invariance d'échelle dans le demi-plan (Proposition 19) implique immédiatement l'invariance conforme en loi dans un domaine général.

Corollaire 5. *La courbe SLE_κ est invariante en loi, modulo les changements de paramétrisation par le temps, par les automorphismes conformes de D qui fixent x et y .*

On peut définir une courbe SLE_κ si x ou y (ou les deux) est un point multiple du bord ∂D . Dans ce cas là il faut en plus préciser de quel côté on approche les point correspondant. Par exemple, prenons $D = \mathbb{H} \setminus \{is \mid 0 \leq s \leq 1\}$, $x = i/2$ et $y = \infty$. Alors x est un point double de D . Il y a deux mesures de probabilités SLE_κ de $i/2$ vers ∞ , l'une partant à gauche de $i/2$, et l'autre partant à droite de $i/2$. Voir DESSIN.

DESSIN

4.2.2. Autres propriétés des processus SLE

Voici quelques propriétés des courbes SLE, pour la culture.

1. Phases du SLE : on considère les courbes SLE_κ dans \mathbb{H} de 0 à ∞ .
 - Si $\kappa \in (0, 4]$, alors la courbe SLE_κ est p.s. simple et ne touche pas le bord \mathbb{R} sauf au temps initial.
 - Si $\kappa \in (4, 8)$, alors la courbe SLE_κ a p.s. des points multiples et touche \mathbb{R} aussi en dehors de 0, mais ne remplit pas $\overline{\mathbb{H}}$.
 - Si $\kappa \geq 8$, alors SLE_κ est une courbe de Peano aléatoire qui remplit p.s. $\overline{\mathbb{H}}$ tout entier.

2. Si γ est une courbe SLE_κ dans \mathbb{H} de 0 à ∞ paramétrée par la capacité de demi-plan, alors p.s., $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\gamma(t)| = \infty$. En général, dans un domaine simplement connexe D , une courbe SLE_κ de x vers y converge vers y .
3. Réversibilité : dans un domaine simplement connexe D , si on renverse le temps pour une courbe SLE_κ de x vers y , alors on obtient en loi une courbe SLE_κ de y vers x (modulo les changements de paramétrisation par le temps).
4. Dimension : la dimension de Hausdorff d'une courbe SLE_κ est p.s. égale à $1 + \kappa/8$ si $\kappa \in (0, 8)$, et égale à 2 si $\kappa \geq 8$.

4.2.3. Limites d'échelle de modèles discrets

Voici quelques valeurs remarquables de κ pour lesquelles il a été prouvé, ou seulement conjecturé, que les courbes SLE_κ sont limites d'échelle d'interfaces de modèles discrets en dimension 2. Ces valeurs remarquables de κ sont $\{2, 8/3, 3, 4, 16/3, 6, 8\}$.

- $\kappa = 2$: Il a été prouvé que SLE_2 est limite d'échelle de marche aléatoire à boucles effacées 2D (Lawler-Schramm-Werner [Sch00, LW03]).
- $\kappa = 8/3$: La courbe $\text{SLE}_{8/3}$ vérifie la propriété de *restriction conforme* (Lawler-Schramm-Werner [LSW03]). Elle "ressemble" (relation d'absolue continuité) aussi au bord extérieur d'une trajectoire brownienne 2D (Lawler-Schramm-Werner [LSW03]). Il est conjecturé que $\text{SLE}_{8/3}$ limite d'échelle de la marche aléatoire auto-évitante uniforme (conjecture ouverte).
- $\kappa = 3$: Il a été prouvé que SLE_3 est limite d'échelle d'interface dans le modèle d'Ising critique 2D avec conditions au bord Dobrushin (Smirnov et al. [Smi10, CS12]). La preuve a été donnée pour les graphes isoradiaux, qui contiennent le réseau triangulaire, le réseau hexagonal et le réseau carré.
- $\kappa = 4$: La courbe SLE_4 peut être vue comme une *ligne de niveau* du champ libre gaussien 2D sur domaine continu (Schramm-Sheffield [SS13]). Il a été également prouvé que SLE_4 est aussi limite d'échelle d'interface dans un champ libre gaussien discret sur réseau (Schramm-Sheffield [SS09]). Le SLE_4 est également limite d'échelle du processus d'exploration harmonique (*harmonic explorer*, Schramm-Sheffield [SS05]). Il a été conjecturé que le SLE_4 est limite d'interface dans le modèle de doubles dimères. C'est lié à la convergence de la fonction de hauteur de dimères vers le champ libre gaussien. Cette dernière conjecture est ouverte, mais il y a déjà un certain nombre de résultats partiels dans cette direction REF.
- $\kappa = 16/3$: Il a été prouvé que SLE_3 est limite d'échelle de bords d'amas de percolation FK-Ising critique 2D (Fortuin-Kasteleyn random cluster model avec $q = 2$). La preuve a été donnée pour les graphes isoradiaux (Smirnov et al. [Smi10, CS12]). Le modèle de FK-Ising est lié au modèle d'Ising par le couplage d'Edwards-Sokal, et les résultats de convergence pour $\kappa = 16/3$ et pour $\kappa = 3$ sont très fortement liés.
- $\kappa = 6$: Le SLE_6 vérifie la propriété de *localité*. Il a été montré que le SLE_6 est limite d'échelle d'interface séparant les sites ouverts et les sites fermés dans la percolation de Bernoulli critique sur réseau triangulaire (Smirnov [Smi01]). C'est lié à l'invariance

conforme de la percolation critique sur réseau triangulaire et à la formule de Cardy-Smirnov. Il est conjecturé que la convergence est valide pour la percolation critique sur d'autres réseaux, comme le réseau carré ou le réseau hexagonal. Mais à ce jour il n'y a pas de preuve de cela, pas plus qu'il n'y a de preuve de la formule de Cardy pour d'autres réseaux.

- $\kappa = 8$: Il a été prouvé que le SLE_8 est limite d'échelle de la fonction de contour d'un arbre couvrant uniforme 2D (Lawler-Schramm-Werner [Sch00, LW03]).

A. Analyse complexe et transformations conformes

A.1. Fonctions holomorphes et théorème de Morera

Nous commençons par rappeler la notion de *fonction holomorphe*.

Définition 18. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction f est *holomorphe* sur D si pour tout $z_0 \in D$, la limite

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. La fonction f' est alors la *dérivée complexe* de f .

Notons que l'ouvert D doit être non-vide. Nous n'allons pas le préciser à chaque fois.

Étant donné f une fonction à valeurs complexes sur D et un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, avec γ \mathcal{C}^1 par morceaux, l'*intégrale curviligne* de f le long de γ est

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Si θ est un changement de paramétrisation, c'est à dire un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ vers $[a, b]$, et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \theta$, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Le chemin γ est dit *fermé* (également appelé *lacet*), si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Proposition 22. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D . Soit un lacet (chemin fermé) γ dans D , \mathcal{C}^1 par morceaux. Supposons de plus que γ peut être contracté en un point par déformations continues tout en restant dans D , c'est-à-dire que γ n'entoure pas un éventuel trou de D . Alors on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \tag{A.1}$$

La réciproque du théorème précédent est vraie. En fait, il suffit de vérifier (A.1) pour seulement les γ qui sont des bords de triangles.

Théorème 12 (Morera). *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur D . Si pour tout triangle rempli fermé T contenu dans D on a*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

alors f est holomorphe sur D .

Rappelons également le principe des zéros isolés pour une fonction holomorphe, et son corollaire sur l'unicité du prolongement analytique.

Théorème 13 (zéros isolés). *Soit un ouvert **connexe** $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D . On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Alors pour tout $z \in D$ tel que $f(z) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $w \in B(z, \varepsilon) \setminus \{z\}$, $f(w) \neq 0$.*

Corollaire 6. *Soit un ouvert **connexe** $D \subset \mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur D . Supposons qu'il existe une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ avec $z_n \in D$, qui converge vers un $z_\infty \in D$, et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = g(z_n)$. Alors pour tout $z \in D$, $f(z) = g(z)$.*

A.2. Indice, intégrale de Cauchy et développement en série entière

Proposition 23. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors la quantité*

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

est à valeurs dans \mathbb{Z} . C'est l'indice de γ autour de z_0 .

Si $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, alors $\text{Ind}_\gamma(z_0)$ vaut n si γ fait n fois le tour de z_0 dans le sens trigonométrique. $\text{Ind}_\gamma(z_0)$ vaut $-n$ si γ fait n fois le tour de z_0 dans le sens inverse (aiguilles d'une montre). L'indice $\text{Ind}_\gamma(z_0)$ vaut 0 si γ peut être séparé de z_0 par déformations continues et sans toucher z_0 .

Théorème 14 (Cauchy). *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D . Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ et admet des dérivées complexes de tout ordre (notées $f^{(n)}$). Soit $z_0 \in D$ et γ un lacet dans $D \setminus \{z_0\}$, \mathcal{C}^1 par morceaux. Supposons de plus que γ peut être contracté en un point par déformations continues tout en restant dans D , c'est-à-dire que γ n'entoure pas un éventuel trou de D . Alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \text{Ind}_\gamma(z_0) f(z_0),$$

et pour tout $n \geq 1$ entier,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \text{Ind}_\gamma(z_0) \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Rappelons aussi qu'une fonction holomorphe peut être développée en série entière au voisinage de tout point de son domaine de définition.

Proposition 24. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D . Soit $z_0 \in D$. Alors pour tout $z \in D$ tel que $|z - z_0| < d(z_0, \mathbb{C} \setminus D)$, on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n,$$

avec convergence absolue de la série.

A.3. Équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques conjuguées

Étant donnée une fonction f de deux variables réelles (x, y) , on va noter par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ ses dérivées partielles. On identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 par $z = x + iy$. Soient $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ les opérateurs différentiels suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Notons que

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta. \quad (\text{A.2})$$

Proposition 25. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Alors f est holomorphe si et seulement si pour tout $z \in D$,*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Dans ce cas, pour tout $z \in D$,

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Démonstration. Fixons $z \in D$ et prenons $w \in \mathbb{C}$ avec $|w|$ petit. On a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Comme f est différentiable au point z , on a

$$f(z + w) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)w + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{w} + o(|w|),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(z + w) - f(z)}{w} = \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \frac{\bar{w}}{w} + o(1).$$

Donc si on a (A.3) au point z , alors f admet une dérivée complexe en z qui est $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$. Réciproquement, si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \neq 0$, alors f n'admet pas de dérivée complexe en z car \bar{w}/w ne converge pas quand $w \rightarrow 0$. \square

Corollaire 7. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D . Alors f est harmonique sur D ($\Delta f = 0$), et en particulier $\operatorname{Re}(f)$ and $\operatorname{Im}(f)$ sont des fonctions harmoniques sur D .*

Démonstration. D'après (A.2),

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 4 \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0. \quad \square$$

Dans (A.3) on peut considérer séparément les parties réelle et imaginaire. On aboutit alors à un système de deux équations différentielles, appelées équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{A.4})$$

Le système (A.4) est satisfait par $(u, v) = (\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f))$ pour f holomorphe.

Pour $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, on note ∇u le gradient de u , qu'on identifie également avec son affixe complexe dans \mathbb{C} . Le système (A.4) signifie exactement que

$$\nabla v = i \nabla u,$$

c'est-à-dire que ∇v est l'image de ∇u par rotation d'angle $\pi/2$. En particulier, les lignes de niveau de u sont des lignes de gradient de v et réciproquement. On peut résumer ce qui précède dans la proposition suivante.

Proposition 26. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et u et v deux fonctions différentiables sur D à valeurs réelles. Supposons que le couple (u, v) satisfait les équations de Cauchy-Riemann (A.4) sur D . Alors la fonction $f = u + iv$ est holomorphe sur D . En particulier, u et v sont harmoniques sur D , et pour tout $z \in D$,*

$$\nabla v(z) = i \nabla u(z), \quad \|\nabla v(z)\|_2 = \|\nabla u(z)\|_2 = |f'(z)|.$$

On dit que u et v satisfaisant (A.4) sont des *fonctions harmoniques conjuguées*.

Rappelons également que le log du module d'une fonction holomorphe sans zéros est harmonique.

Proposition 27. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D tel que pour tout $z \in D$, $f(z) \neq 0$. Alors $\log |f|$ est une fonction harmonique sur D ($\Delta \log |f| = 0$).*

Démonstration. Fixons $z_0 \in D$ et montrons que $\Delta \log |f| = 0$ dans un voisinage de z_0 . Comme $f(z_0) \neq 0$, il existe U un voisinage ouvert de z_0 dans D , tel que pour tout $z \in U$, $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$. Alors, comme le domaine $f(U)$ n'entoure pas 0, il existe une détermination du logarithme sur $f(U)$, et par conséquent il existe une fonction holomorphe g sur U tel que pour tout $z \in U$, $f(z) = e^{g(z)}$. Alors $\log |f| = \operatorname{Re}(g)$ sur U , et $\operatorname{Re}(g)$ est harmonique sur U . \square

A.4. Principe de réflexion de Schwarz

Soit \mathbb{H} le demi-plan ouvert supérieur :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}. \quad (\text{A.5})$$

Soit J un ouvert non-vide de \mathbb{R} et D un sous-ensemble ouvert de \mathbb{H} tel que pour tout $x \in J$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset D$. Soit D' l'image de D par réflexion d'axe horizontal \mathbb{R} , et soit

$$\widehat{D} = D \cup D' \cup J.$$

Alors \widehat{D} est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C} invariant par réflexion d'axe horizontal.

Soit f une fonction holomorphe sur D . On suppose de plus le suivant :

1. f se prolonge continument à $D \cup J$.
2. Pour tout $x \in J$, $f(x) \in \mathbb{R}$, où $f(x)$ désigne le prolongement de f à x par continuité.

Soit \hat{f} la fonction suivante définie sur \widehat{D} :

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D \cup J, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in D'. \end{cases}$$

Théorème 15 (Schwarz). *Sous les hypothèses précédentes, la fonction \hat{f} est holomorphe sur \widehat{D} .*

Démonstration. Vérifions d'abord que \hat{f} est continue sur \widehat{D} . Clairement, \hat{f} est continue sur $D \cup J$ et sur D' . De plus, pour tout $x \in J$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in D'}} \hat{f}(z) = \overline{f(x)} = f(x).$$

Donc \hat{f} est continue sur \widehat{D} .

Pour vérifier que \hat{f} est holomorphe, nous allons appliquer le théorème de Morera (Théorème 12). Soit T un triangle rempli fermé contenu dans \widehat{D} . Montrons que

$$\int_{\partial T} \hat{f} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Nous allons distinguer les cas suivants :

1. $T \subset D$.
2. $T \subset D'$.
3. $T \cap D' = \emptyset$, mais $T \cap J \neq \emptyset$.
4. $T \cap D = \emptyset$, mais $T \cap J \neq \emptyset$.
5. $T \cap D \neq \emptyset$ et $T \cap D' \neq \emptyset$.

Clairement, \hat{f} est holomorphe sur D . Donc dans le cas 1 la condition (A.6) est satisfaite. En fait, \hat{f} est aussi holomorphe sur D' . En effet, pour $z \in D'$,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z})} = 0.$$

Donc dans le cas 2 la condition (A.6) est également satisfaite. Supposons qu'on est dans le cas 3. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le translaté vertical de T , $T + i\varepsilon$, est contenu dans D . Comme \hat{f} est continue, on a

$$\int_{\partial T} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial T + i\varepsilon} \hat{f} = 0.$$

Le cas 4 est le symétrique de 3. Traitons maintenant le cas 5. Dans ce cas, la droite \mathbb{R} divise le triangle T en deux polygones, $K = \overline{T \cap D}$ et $K' = \overline{T \cap D'}$. On a

$$\int_{\partial T} \hat{f} = \int_{\partial K} \hat{f} + \int_{\partial K'} \hat{f},$$

où les frontières ∂T , ∂K et $\partial K'$ sont orientées dans le sens trigonométrique. Enfin,

$$\int_{\partial K} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K + i\varepsilon} \hat{f} = 0, \quad \int_{\partial K'} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K' - i\varepsilon} \hat{f} = 0. \quad \square$$

A.5. Transformations conformes

Rappelons la notion de *transformation conforme*.

Définition 19. Soit D et \tilde{D} deux ouverts non-vides de \mathbb{C} . une fonction f est une transformation conforme de D vers \tilde{D} si f est une bijection entre D et \tilde{D} et f est holomorphe sur D . Alors nécessairement, pour tout $z \in D$, $f'(z) \neq 0$. De plus l'inverse de f , f^{-1} , est holomorphe sur \tilde{D} et est une transformation conforme de \tilde{D} vers D .

Notons que si on prends deux ouverts D et \tilde{D} arbitraires, il n'existe pas nécessairement de transformation conforme de D vers \tilde{D} . Si une telle transformation conforme existe, alors D et \tilde{D} sont dits *conformément équivalents*.

Rappelons la notions de domaine *simplement connexe*. Il s'agit de domaine sans trous.

Définition 20. Soit un ouvert non-vide $D \subset \mathbb{C}$. D est dit *simplement connexe* si D est connexe et $\mathbb{C} \setminus D$ est soit vide, soit connexe et non-borné.

Notons par \mathbb{D} le disque unité :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Théorème 16 (Riemann). *Soit D un ouvert non-vide de \mathbb{C} . Alors D est conformément équivalent au disque unité \mathbb{D} (c.à.d. il existe une transformation conforme de \mathbb{D} vers D) si et seulement si D est simplement connexe et $D \neq \mathbb{C}$.*

Plus bas nous rappelons quels sont les automorphismes conformes de \mathbb{D} , c.à.d. les transformations conformes de \mathbb{D} vers \mathbb{D} .

Proposition 28. *Les automorphismes conformes de \mathbb{D} sont les fonctions de la forme*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z + a}{\bar{a}z + 1},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$. En particulier, les automorphismes conformes de \mathbb{D} forment un groupe de Lie de dimension 3.

Il est à noter que les automorphismes conformes de \mathbb{D} se prolongent en des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\bar{\mathbb{D}}$.

\mathbb{H} désigne le demi-plan supérieur (A.5).

Proposition 29. *Les transformations conformes de \mathbb{D} vers \mathbb{H} sont les fonctions de la forme*

$$f(z) = x - i\lambda \frac{e^{i\theta}z + i}{e^{i\theta}z - i}, \quad (\text{A.7})$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'inverse d'une transformation conforme (A.7) est donné par

$$f^{-1}(w) = ie^{-i\theta} \frac{w - x - i\lambda}{w - x + i\lambda}.$$

Les automorphismes conformes de \mathbb{H} sont les fonctions de la forme

$$f(z) = x + \lambda z,$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, ainsi que les fonctions de la forme

$$f(z) = x - \lambda \frac{az}{z - a},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Lemme 33. *Soient $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}$. Il existe un unique automorphisme conforme f de \mathbb{H} dont le prolongement au bord satisfait $f(\infty) = \infty$, $f(x_1) = \tilde{x}_1$ et $f(x_2) = \tilde{x}_2$.*

Démonstration. Les automorphismes conformes de \mathbb{H} avec $f(\infty) = \infty$ sont ceux de la forme $f(z) = x + \lambda z$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Pour satisfaire les deux autres conditions, il faut prendre

$$\lambda = \frac{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}{x_2 - x_1}, \quad x = \tilde{x}_1 - \lambda x_1. \quad \square$$

Proposition 30. *Soient $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{D}$, 2 à 2 distincts, et $w_1, w_2, w_3 \in \partial\mathbb{D}$, 2 à 2 distincts. Supposons de plus que les triplets z_1, z_2, z_3 et w_1, w_2, w_3 sont chacun ordonnés dans le sens trigonométrique sur le cercle $\partial\mathbb{D}$. Alors il existe un unique automorphisme conforme de \mathbb{D} tel que $f(z_i) = w_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Démonstration. Soit

$$\psi(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

ψ induit une transformation conforme de \mathbb{H} vers \mathbb{D} . Soit f un automorphisme conforme de \mathbb{D} . On pose

$$g(z) = \psi^{-1}(\bar{w}_3 f(z_3 \psi(z))).$$

g est alors un automorphisme conforme de \mathbb{H} , et f satisfait $f(z_i) = w_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ si et seulement si $g(\infty) = \infty$ et

$$g(\psi^{-1}(z_1 \bar{z}_3)) = \psi^{-1}(w_1 \bar{w}_3), \quad g(\psi^{-1}(z_2 \bar{z}_3)) = \psi^{-1}(w_2 \bar{w}_3).$$

On peut de plus vérifier que

$$\psi^{-1}(z_1 \bar{z}_3) < \psi^{-1}(z_2 \bar{z}_3), \quad \psi^{-1}(w_1 \bar{w}_3) < \psi^{-1}(w_2 \bar{w}_3).$$

Donc d'après le Lemme 33, un tel g satisfaisant les trois conditions existe et est unique, et donc f existe et est unique également. \square

Le résultat suivant n'est pas un rappel. Il s'agit en réalité du résultat le plus avancé de ce chapitre. Nous allons l'admettre. Pour une preuve, voir [Pom92, Chapitre 2].

Proposition 31. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, avec $D \neq \mathbb{C}$. Soit $z \in \partial D$. Supposons qu'au voisinage de z , ∂D est une courbe continue simple, c'est-à-dire sans points multiples. Alors pour toute transformation conforme f de D vers \mathbb{D} , f se prolonge par continuité à un voisinage de z dans \bar{D} .*

Enfin, notons que la Proposition 30 s'étend à d'autres domaines simplement connexes.

Proposition 32. *Soient D et \tilde{D} deux ouverts simplement connexes de \mathbb{C} , avec $D \neq \mathbb{C}$ et $\tilde{D} \neq \mathbb{C}$. Soient z_1, z_2, z_3 trois points 2 à 2 distinct sur ∂D et $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ trois points 2 à 2 distinct sur $\partial \tilde{D}$. On suppose que z_1, z_2, z_3 , respectivement $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$, se placent dans l'ordre trigonométrique sur ∂D , respectivement $\partial \tilde{D}$. On suppose également qu'au voisinage de z_1, z_2 et z_3 , respectivement \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 et \tilde{z}_3 , le bord ∂D , respectivement $\partial \tilde{D}$, est une courbe continue simple. Alors il existe une unique transformation conforme f de D vers \tilde{D} qui se prolonge par continuité à un voisinage de z_1, z_2 et z_3 dans \bar{D} , avec pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $f(z_i) = \tilde{z}_i$.*

B. Pavages par dominos

B.1. Structure de treillis des pavages par dominos

B.2. Démonstration du théorème de Kasteleyn

B.3. Matrix-tree theorem

B.4. Bijection de Temperley

Bibliographie

- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes : I. Crystals and mazes. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 53(3):629–641, 1957.
- [BN16] N. Berestycki and J. Norris. Lectures on Schramm–Loewner Evolution. <http://www.statslab.cam.ac.uk/~james/Lectures/sle.pdf>, 2016.
- [BP93] R. Burton and R. Pemantle. Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances. *Ann. Probab.*, 21(3):1329–1371, 1993.
- [Car92] J. L. Cardy. Critical percolation in finite geometries. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 25:L201–L206, 1992.
- [CS12] D. Chelkak and S. Smirnov. Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables. *Inventiones Mathematicae*, 189:515–580, 2012.
- [Gri99] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 1999.
- [Kas61] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice : I. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27:1209–1225, 1961.
- [Kas63] P. W. Kasteleyn. Dimer statistics and phase transitions. *J. Math. Phys.*, 4:287–293, 1963.
- [Ken97] R. Kenyon. Local statistics of lattice dimers. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(5):591–618, 1997.
- [Kir47] G. Kirchhoff. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik*, 148:497–508, 1847.
- [Kup98] G. Kuperberg. An exploration of the permanent-determinant method. *Electron. J. Combin.*, 5(1):R46, 1998.
- [Law05] G. F. Lawler. *Conformally invariant processes in the plane*, volume 114 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [Lin05] J. R. Lind. A sharp condition for Loewner equation to generate slits. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 30:143–158, 2005.
- [Loe23] C. Loewner. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I. *Math. Ann.*, 89:103–121, 1923.
- [LSW02] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Werner. One-arm exponent for critical 2D percolation. *Electron. J. Probab.*, 7(2):1–13, 2002.

- [LSW03] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Wendelin. Conformal restriction : the chordal case. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(4):917–955, 2003.
- [LW03] O. Lawler, G. F. and Schramm and W. Wendelin. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Ann. Probab.*, 32(1B):939–995, 2003.
- [Lé21] T. Lévy. Convergence de mesures, Grandes déviations, Percolation. Notes de cours disponibles sur <https://www.lpsm.paris/pageperso/levy/thlim.html>, 2021.
- [MR05] D. E. Marshall and S. Rohde. The Loewner differential equation and slit mappings. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(4):763–778, 2005.
- [MS16] J. Miller and S. Sheffield. Imaginary geometry I : Interacting SLEs. *Probab. Theory Related Fields*, 164(3-4):553–705, 2016.
- [Per69] J. K. Percus. One more technique for the dimer problem. *J. Math. Phys.*, 10:1881, 1969.
- [Pom92] C. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [RS05] S. Rohde and O. Schramm. Basic properties of SLE. *Ann. Math.*, 161(2):883–924, 2005.
- [Sch00] O. Schramm. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel J. Math.*, 118:221–288, 2000.
- [Sch07] O. Schramm. Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems. In *Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30, 2006*, pages 513–543. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2007.
- [Smi01] S. Smirnov. Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits. *C. R. Acad. Sci. Paris - Series I*, 333:239–244, 2001.
- [Smi10] S. Smirnov. Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic spin structures in the Ising model. *Ann. Math.*, 172:1435–1467, 2010.
- [SS05] O. Schramm and S. Sheffield. Harmonic explorer and its convergence to SLE_4 . *Ann. Probab.*, 33(6):2127–2148, 2005.
- [SS09] O. Schramm and S. Sheffield. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field. *Acta Math.*, 202(1):21, 2009.
- [SS13] O. Schramm and S. Sheffield. A contour line of the continuum Gaussian free field. *Probab. Theory Related Fields*, 157(1-2):47–80, 2013.
- [Wer09] W. Werner. *Percolation et modèle d’Ising*, volume 16 of *Cours spécialisés*. Société Mathématique de France, 2009.