

# Invariance conforme en mécanique statistique : dominos, percolation et SLE

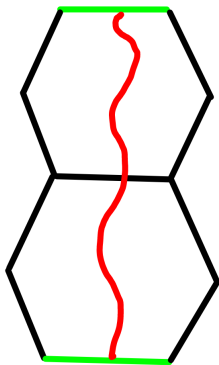
Cédric Boutillier et Titus Lupu

### 3. Percolation sur le réseau triangulaire

## 3.3. Théorie de Russo-Seymour-Welsh

### 3.3.3. Circuit ouvert dans un anneau

Vu la dernière fois:



$p = 1/2$ .  $\exists c \in (0, 1), \forall n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(\ell'_1 \stackrel{\omega, R_n}{\leftrightarrow} \ell_4) \geq c > 0.$$

Soit  $H_n$  un hexagone régulier de côté  $n$ , et soient  $H_n^{(1)}$ ,  $H_n^{(2)}$ ,  $H_n^{(3)}$ ,  $H_n^{(4)}$ ,  $H_n^{(5)}$ ,  $H_n^{(6)}$  ses translatsés:

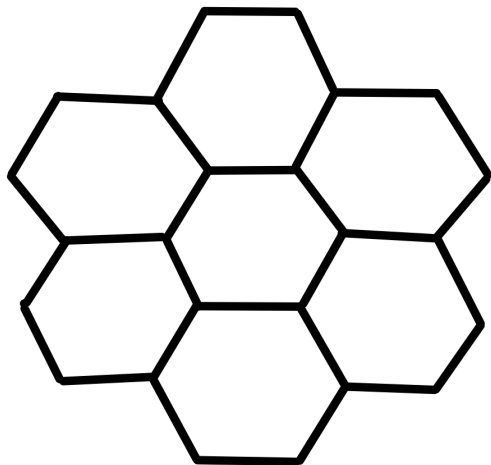
$$H_n^{(1)} = H_n + i\sqrt{3}n, \quad H_n^{(2)} = H_n + \sqrt{3}ne^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad H_n^{(3)} = H_n + \sqrt{3}ne^{i\frac{7\pi}{6}},$$

$$H_n^{(4)} = H_n - i\sqrt{3}n, \quad H_n^{(5)} = H_n + \sqrt{3}ne^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad H_n^{(6)} = H_n + \sqrt{3}ne^{i\frac{\pi}{6}}.$$

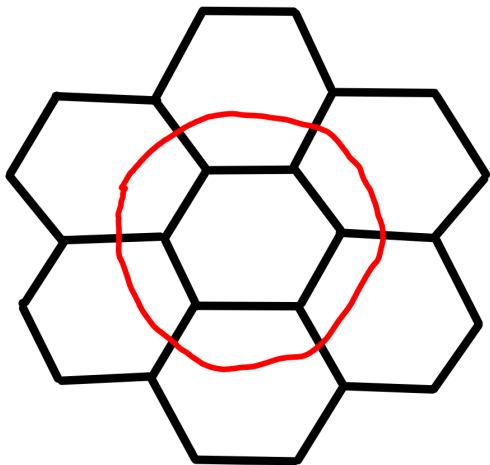
Soit  $\mathcal{A}_n$  le domaine

$$\mathcal{A}_n = H_n^{(1)} \cup H_n^{(2)} \cup H_n^{(3)} \cup H_n^{(4)} \cup H_n^{(5)} \cup H_n^{(6)}.$$

$\mathcal{A}_n$  est un domaine annulaire, c.à.d. qu'il a un trou, formé par l'intérieur de  $H_n$ .



**Proposition 5.** À  $p = 1/2$ , la probabilité qu'il existe un circuit ouvert dans  $\mathcal{A}_n$  entourant le trou de  $\mathcal{A}_n$  est bornée inférieurement, uniformément en  $n$ , par une constante strictement positive.





*Démonstration.* Soient  $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, R_n^{(3)}, R_n^{(4)}, R_n^{(5)}, R_n^{(6)}$  des "rectangles" formés par deux hexagones adjacents

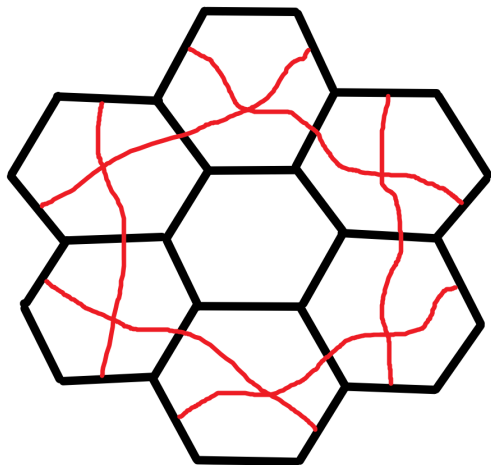
$$R_n^{(1)} = H_n^{(1)} \cup H_n^{(2)}, \quad R_n^{(2)} = H_n^{(2)} \cup H_n^{(3)}, \quad R_n^{(3)} = H_n^{(3)} \cup H_n^{(4)},$$

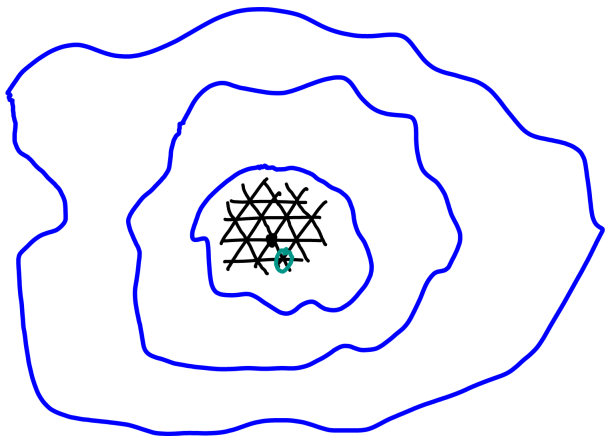
$$R_n^{(4)} = H_n^{(4)} \cup H_n^{(5)}, \quad R_n^{(5)} = H_n^{(5)} \cup H_n^{(6)}, \quad R_n^{(6)} = H_n^{(6)} \cup H_n^{(1)}.$$

Soit  $E_n^{(k)}$  l'événement qu'il y ait un croisement ouvert dans  $R_n^{(k)}$  dans le sens "difficile". Par symétrie, à  $n$  fixé, tous les événements  $E_n^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq 6$  ont même probabilité. De plus, par Russo-Seymour-Welsh, il existe une constante  $c > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(E_n^{(k)}) \geq c$ . Comme les événements  $E_n^{(k)}$  sont croissants, par l'inégalité de Harris,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq 6} E_n^{(k)}\right) \geq \prod_{1 \leq k \leq 6} \mathbb{P}(E_n^{(k)}) \geq c^6 > 0.$$

De plus, sur l'événement  $\bigcap_{1 \leq k \leq 6} E_n^{(k)}$  il y a forcément un circuit ouvert dans  $\mathcal{A}_n$  entourant le trou de  $\mathcal{A}_n$ .





**Corollaire.** À  $p = 1/2$ , il y a p.s. une infinité de circuits fermés disjoints entourant 0. En particulier, il n'y a pas de percolation à  $p = 1/2$ . Ainsi,  $p_c = 1/2$ .

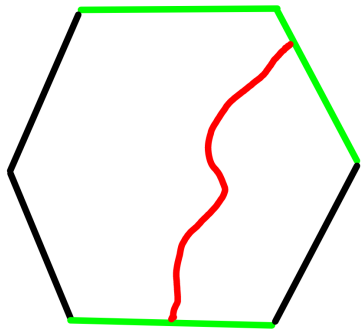
*Démonstration.* On considère  $\mathcal{A}_k$  des "anneaux" formés de 6 hexagones de taille  $3^k$  centrés en 0. Ces anneaux sont 2 à 2 disjoint, et pour chaque  $\mathcal{A}_k$ , la probabilité d'existence d'un circuit **fermé** dans  $\mathcal{A}_k$  entourant 0 est supérieure à une constante  $c' > 0$  qui ne dépend pas de  $k$ . Comme il s'agit d'une suite d'événements indépendants de probabilité minorée positivement, p.s. une infinité de tels événements est réalisée.

Exercice: Montrer qu'à  $p = p_c = 1/2$ , il existe  $\beta_1, \beta_2, c_1, c_2 > 0$ , tel que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{c_1}{n^{\beta_1}} \leq \mathbb{P}(0 \stackrel{\omega}{\longleftrightarrow} \partial B(0, n)) \leq \frac{c_2}{n^{\beta_2}}.$$

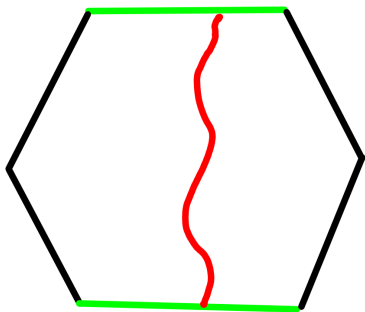
## 3.4. Formule de Cardy

### 3.4.1. Présentation de la formule de Cardy



$$p = p_c = 1/2. \quad \forall n \geq 1,$$

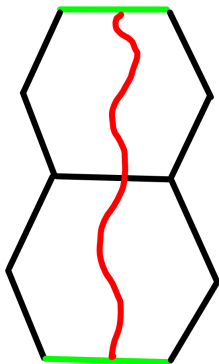
$$\mathbb{P}(\ell_1 \stackrel{\omega, H_n}{\leftrightarrow} \ell_3 \cup \ell_4) = \frac{1}{2}.$$



$p = p_c = 1/2$ .  $\exists c < C \in (0, 1), \forall n \geq 1,$

$$0 < c \leq \mathbb{P}(l_1 \stackrel{\omega, H_n}{\longleftrightarrow} l_4) \leq C < 1.$$





$p = p_c = 1/2$ .  $\exists c' < C' \in (0, 1), \forall n \geq 1$ ,

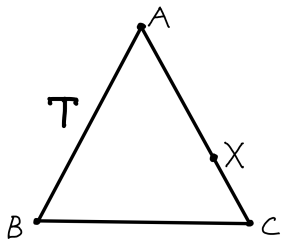
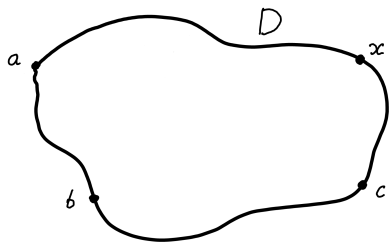
$$0 < c' \leq \mathbb{P}(\ell'_1 \stackrel{\omega, R_n}{\longleftrightarrow} \ell_4) \leq C' < 1.$$

En fait, les probabilités de croisement précédentes ont des limites explicites lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Les valeurs de ces limites ont été prédites par le physicien théoricien John Cardy. C'est la formule de Cardy. Elle a été prouvée rigoureusement par Stanislav Smirnov.

On considère le triangle équilatéral, rempli ouvert,  $\mathbf{T} = ABC$ , avec les coins

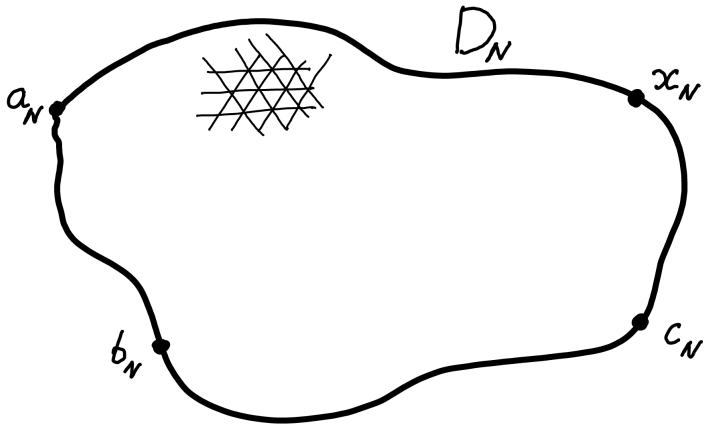
$$A = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad B = 0, \quad C = 1.$$

Soit un domaine ouvert borné  $D \subset \mathbb{C}$ . On suppose également que  $D$  est simplement connexe, c.à.d. sans trous. On suppose aussi que le bord de  $D$  est une courbe continue simple. Soient  $a, b$  et  $c$  trois points distincts sur  $\partial D$ , ordonnés dans le sens trigonométrique. Il existe alors une unique transformation conforme  $\psi : D \rightarrow \mathbf{T}$ , avec  $\psi(a) = A$ ,  $\psi(b) = B$  et  $\psi(c) = C$ . Soit  $x \in \partial D \setminus \{a, b, c\}$ , avec  $x$  situé entre  $c$  et  $a$  dans l'ordre trigonométrique. Soit  $X = \psi(x)$ .  $X$  est un point sur le côté  $(C, A)$  de  $\partial\mathbf{T}$ .

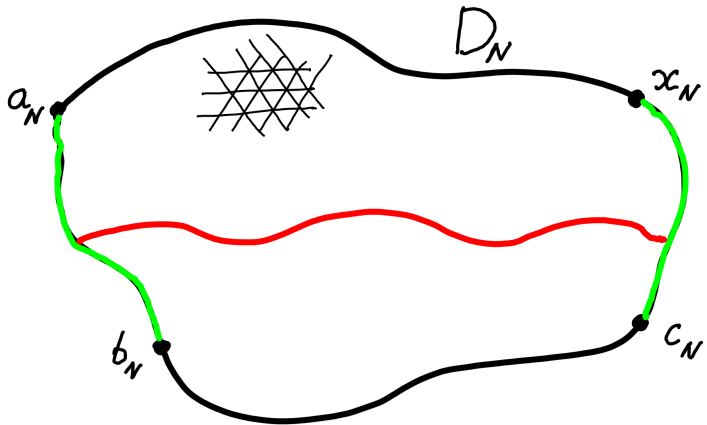


Ensuite, on considère le réseau triangulaire changé d'échelle  $\mathcal{T}_N = (\mathbb{T}_N, E_N)$ , avec  $\mathbb{T}_N = \frac{1}{N}\mathbb{T}$ , et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $D_N$  une approximation discrète du domaine continu  $D$ , avec  $D_N \subset \mathbb{T}_N$ , et  $D_N$  formant un sous-graphe connexe et sans trous. Notons par  $\partial D_N$  les sites de  $D_N$  qui ont un voisin dans  $\mathbb{T}_N \setminus D_N$ . On considère  $a_N, b_N, c_N, x_N \in \partial D_N$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = a, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} b_N = b, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} c_N = c, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} x_N = x.$$



On considère une percolation par sites  $\omega$  sur le réseau  $\mathcal{T}_N = (\mathbb{T}_N, E_N)$ , de paramètre  $p = 1/2$ . On s'intéresse à l'événement qu'il existe un croisement ouvert dans  $D_N$  entre l'arc  $a_N \widehat{b}_N$  et l'arc  $c_N \widehat{x}_N$ , qu'on dénote par  $\{a_N \widehat{b}_N \stackrel{\omega, D_N}{\longleftrightarrow} c_N \widehat{x}_N\}$ .



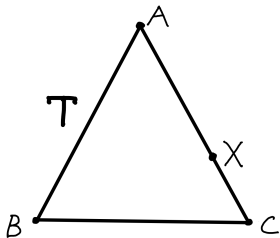
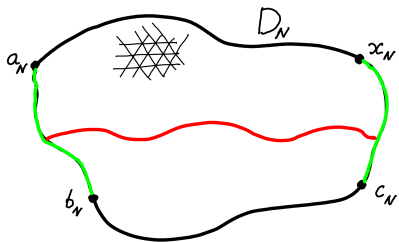


**Théorème 8** (Formule de Cardy-Smirnov]. A la limite d'échelle,

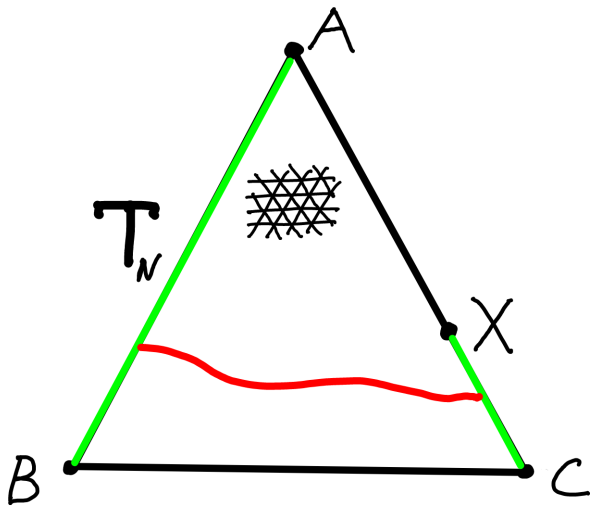
$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a_N \widehat{b}_N \xleftrightarrow{\omega, D_N} c_N \widehat{x}_N) = \frac{CX}{CA},$$

où  $CX$  et  $CA$  sont les longueurs des segments respectifs.

La formule de Cardy-Smirnov assure que la limite des probabilités des croisements est invariante par transformations conformes du domaine  $D$ . En effet, la formule s'exprime à partir de quantités obtenues après uniformisation par la transformation conforme  $\psi$ .



Pour commencer, nous allons faire la preuve dans le cas où le domaine  $D$  est en fait le triangle  $\mathbf{T}$  et  $a = A$ ,  $b = B$ ,  $c = C$ ,  $x = X$ . On dénote par  $\mathbf{T}_N$  le triangle équilatéral discret  $\mathbf{T}_N = \mathbb{T}_N \cap \overline{\mathbf{T}}$ .

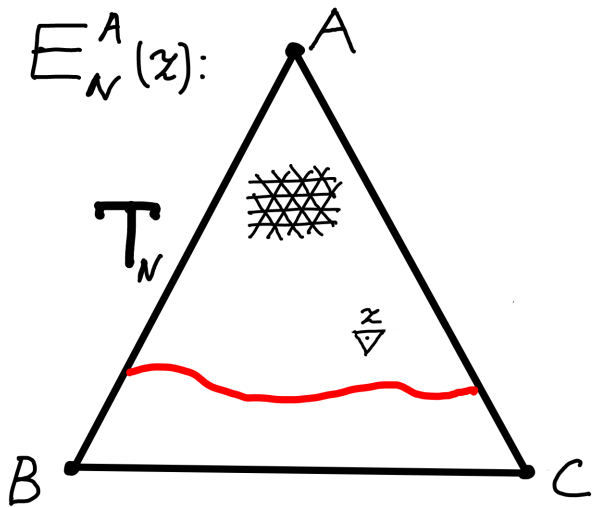


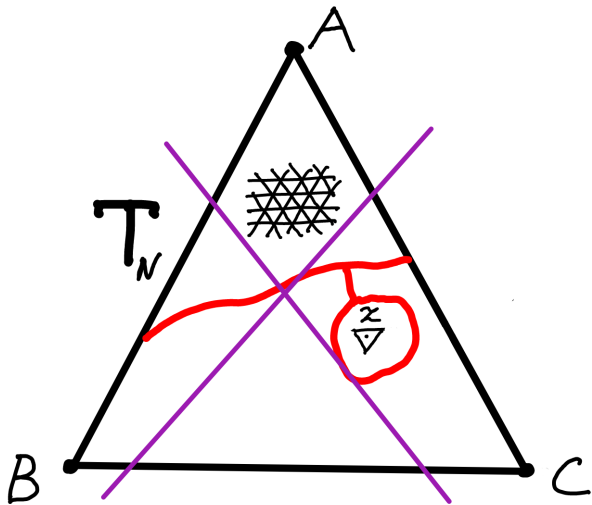
## 3.4.2. Un résultat de compacité

On travaille dans le triangle  $\mathbf{T}_N$ . On identifie une face de  $\mathbf{T}_N$  avec son centre  $z$ , qui est un sommet du réseau hexagonal dual. On dénote par  $E_N^A(z)$  l'événement qu'il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin ouvert **auto-évitant** de  $[A, B]$  vers  $[A, C]$  qui sépare  $z$  de  $[B, C]$ . De manière similaire on définit les événements  $E_N^B(z)$  et  $E_N^C(z)$ . Soient les probabilités

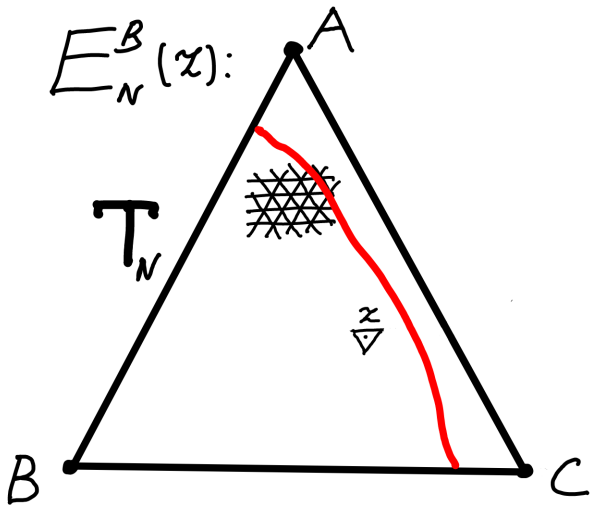
$$H_N^A(z) = \mathbb{P}(E_N^A(z)), \quad H_N^B(z) = \mathbb{P}(E_N^B(z)), \quad H_N^C(z) = \mathbb{P}(E_N^C(z)).$$

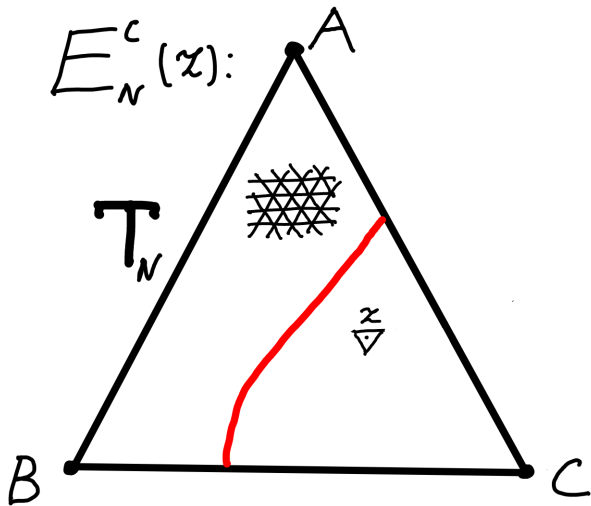
Si  $z$  est une face qui est tout à droite du triangle  $\mathbf{T}_N$ , adjacente au côté  $[A, C]$ , et  $z_B$  est son coin en bas à droite, alors  $E_N^A(z)$  est exactement l'événement qu'il existe un croisement ouvert dans  $\mathbf{T}_N$  joignant le côté  $[A, B]$  au segment  $[C, z_B]$ .











Les fonctions  $H_N^A$ ,  $H_N^B$  et  $H_N^C$  ont été définies sur les centres des faces de  $\mathbf{T}_N$ , qui sont aussi les sommets du réseau hexagonal dual. On peut les étendre en des fonctions continues sur tout le grand triangle fermé  $\overline{\mathbf{T}}$  de manière suivante. Sur les arêtes du réseau hexagonal dual on interpole de manière linéaire. Ensuite, à l'intérieur des faces du du réseau hexagonal dual on prends l'extension harmonique. Par construction ces fonctions sont à valeurs dans  $[0, 1]$ . Dans la suite nous allons montrer que les suites  $(H_N^J)_{N \geq 1}$ , pour  $J \in \{A, B, C\}$ , sont relativement compactes dans  $\mathcal{C}(\overline{\mathbf{T}})$ , l'espace des fonction continues sur  $\overline{\mathbf{T}}$  muni de la norme uniforme, et admettent donc des valeurs d'adhérence. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, il faut montrer que les suites sont équicontinues. En fait, à l'aide de la théorie de Russo-Seymour-Welsh, nous allons montrer qu'elles sont uniformément Hölder.

**Lemme 12.** Il existe des constantes  $c, \beta > 0$  tel que pour tout  $N \geq 1$  et  $z, z' \in \overline{\mathbf{T}}$ ,  $|H_N^A(z') - H_N^A(z)| \leq c|z' - z|^\beta$ . De même pour  $H_N^B$  et  $H_N^C$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver le résultat pour  $z$  et  $z'$  centres de faces de  $\mathbf{T}_N$ . On a

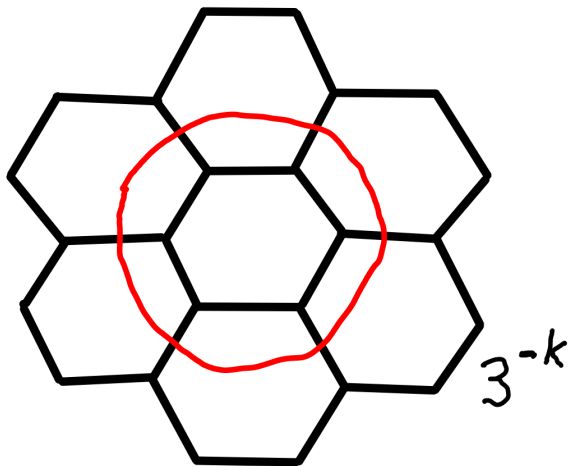
$$|H_N^A(z') - H_N^A(z)| \leq \mathbb{P}(E_N^A(z') \Delta E_N^A(z)),$$

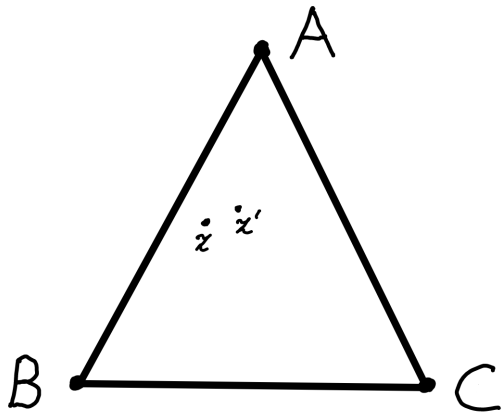
où  $\Delta$  est la différence symétrique. Or, l'événement  $E_N^A(z') \Delta E_N^A(z)$  ne peut pas être réalisé s'il existe un circuit ouvert auto-évitant  $\gamma$  qui entoure à la fois  $z$  et  $z'$ , et qui les sépare de  $[B, C]$ . On considère  $\mathcal{A}_k$  des "anneaux" formés de 6 hexagones de taille  $3^{-k}$  dont le bord intérieur entoure à la fois  $z$  et  $z'$  et dont le bord extérieur les sépare de  $[B, C]$ . Ces anneaux sont 2 à 2 disjoint, et pour chaque  $\mathcal{A}_k$ , la probabilité d'existence d'un circuit ouvert non-contractible dans  $\mathcal{A}_k$  est supérieure à une constante  $c' > 0$  qui ne dépend pas de  $N$ ,  $k$ ,  $z$  ou  $z'$ . D'où

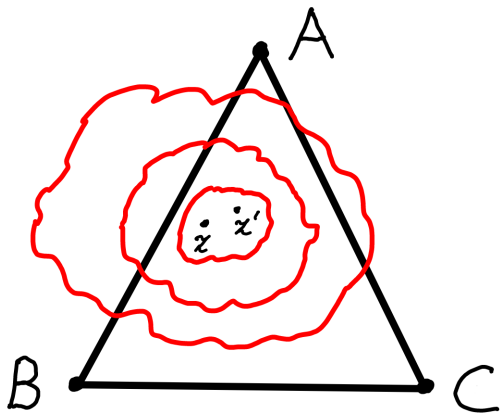
$$\mathbb{P}(E_N^A(z') \Delta E_N^A(z)) \leq (1 - c')^{n(N, z, z')},$$

où  $n(N, z, z')$  est le nombre d'anneaux de type  $\mathcal{A}_k$  qu'on peut coller tout en respectant les contraintes. Ensuite,  $n(N, z, z')$  est de l'ordre de  $\log(\delta(z, z'))_+ / \log(3)$ , où

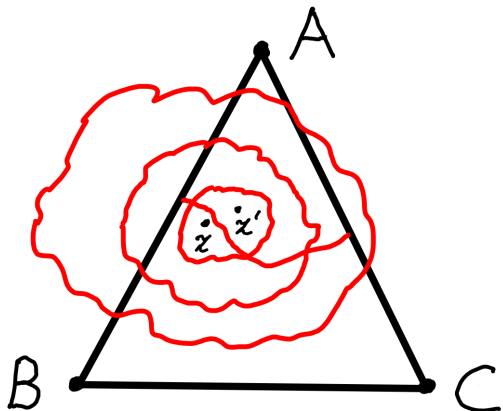
$$\delta(z, z') = \max \left( \frac{d(z, [B, C])}{|z' - z|}, \frac{d(z', [B, C])}{|z' - z|} \right).$$



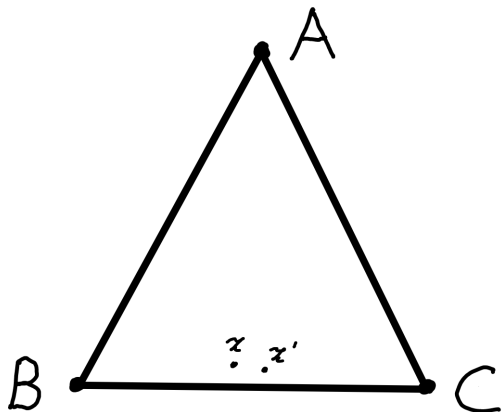


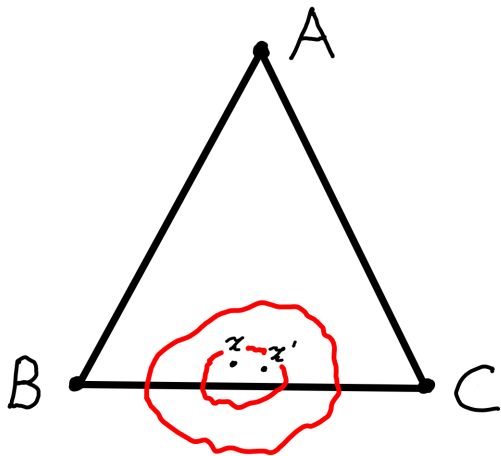


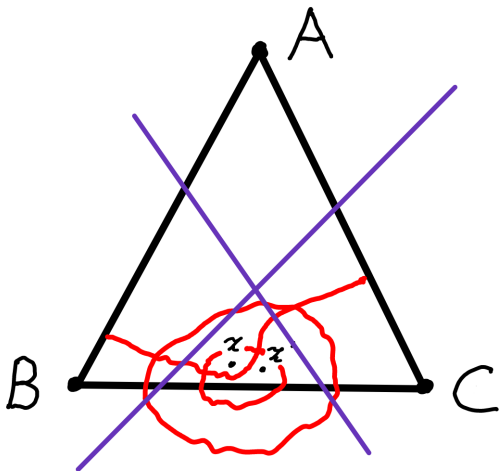


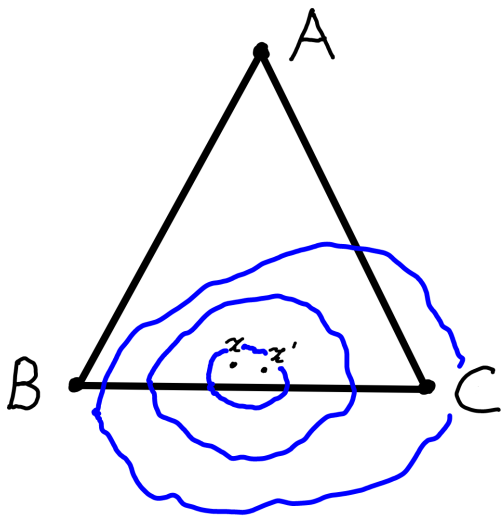


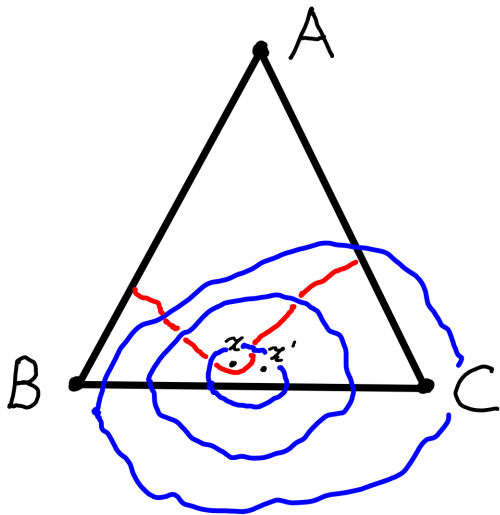
Ceci donne la propriété d'Hölder uniforme lorsque  $z$  ou  $z'$  ne sont pas trop près de  $[B, C]$ , mais un autre argument est nécessaire si  $z$  et  $z'$  sont proches de  $[B, C]$ . En fait, l'événement  $E_N^A(z') \Delta E_N^A(z)$  ne peut pas non plus être réalisé s'il existe un circuit fermé  $\gamma$  qui entoure à la fois  $z$  et  $z'$  et qui les sépare de  $[A, B]$  ou  $[A, C]$ . On répète ici le raisonnement précédent avec les "anneaux" hexagonaux emboîtés.











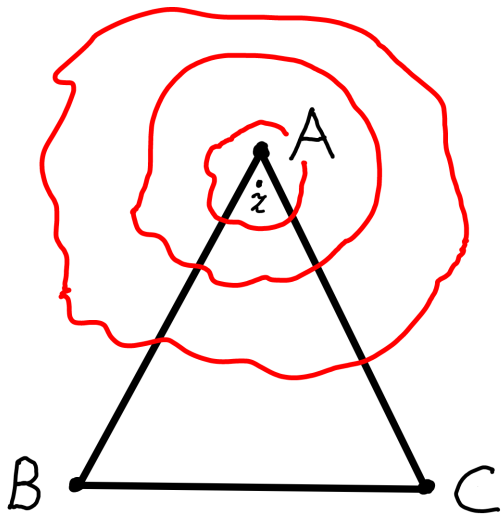
**Lemme 13.** Soit  $(H^A, H^B, H^C)$  une valeur d'adhérence de  $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$ . Alors

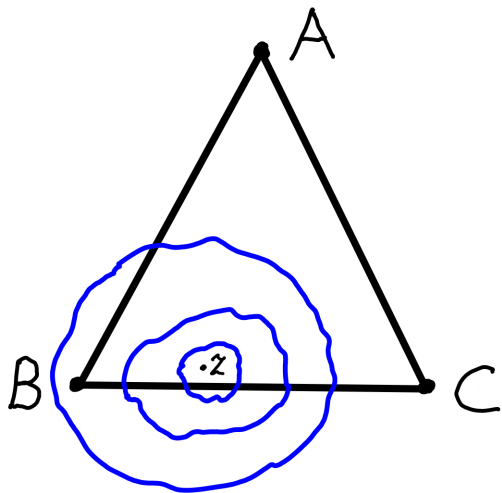
$$H^A(A) = H^B(B) = H^C(C) = 1.$$

De plus,  $H^A$  est nulle sur  $[B, C]$ ,  $H^B$  est nulle sur  $[A, C]$  et  $H^C$  est nulle sur  $[A, B]$ .

*Démonstration.* Le résultat se déduit de la théorie de Russo-Seymour-Welsh. Pour borner  $H_N^A(z)$  inférieurement, on regarde la probabilité qu'il existe un circuit ouvert  $\gamma$  auto-évitant qui entoure à la fois  $z$  et  $A$  et qui les sépare de  $[B, C]$ . Pour cela on utilise des anneaux emboîtés comme dans la preuve du Lemme 12. Pour borner  $H_N^A(z)$  supérieurement, on regarde la probabilité qu'il existe un circuit fermé  $\gamma$  qui entoure  $z$ , intersecte  $[B, C]$  et sépare  $z$  de  $[A, B]$  ou  $[A, C]$ .



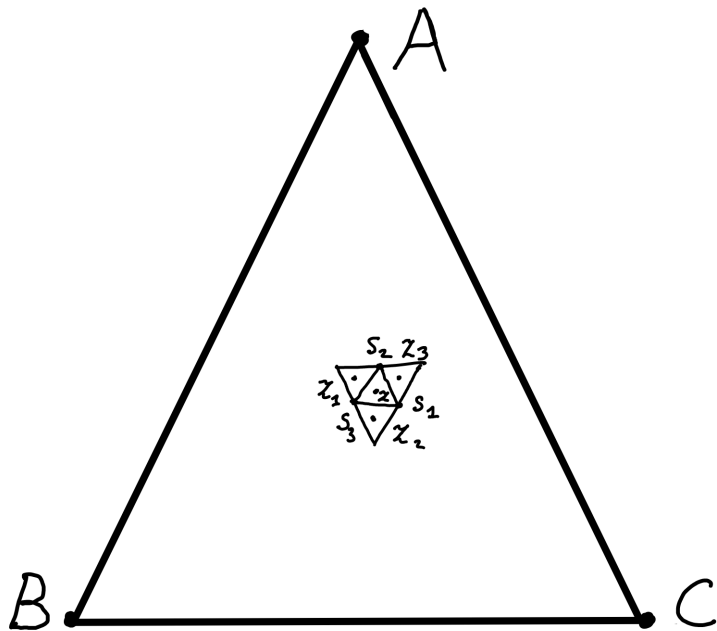




### 3.4.3. Le lemme de changement de couleur

Nous avons vu que la suite  $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$  admet des limites sous-séquentielles pour la norme uniforme. Il reste à montrer qu'elle converge et identifier la limite. Nous allons voir que la limite est donnée par les coordonnées barycentriques dans le triangle  $ABC$ . Dans cette Section nous allons présenter l'argument clé de Smirnov qui est de nature combinatoire.

On rappelle qu'on identifie les faces de  $\mathbf{T}_N$  avec leurs centres. Soit  $z$  une telle face, et  $z_1, z_2, z_3$  les trois faces adjacentes, dans l'ordre trigonométrique. Soient  $s_1, s_2$  et  $s_3$  les trois coins de la face  $z$ , avec  $s_i$  opposé à  $z_i$ .

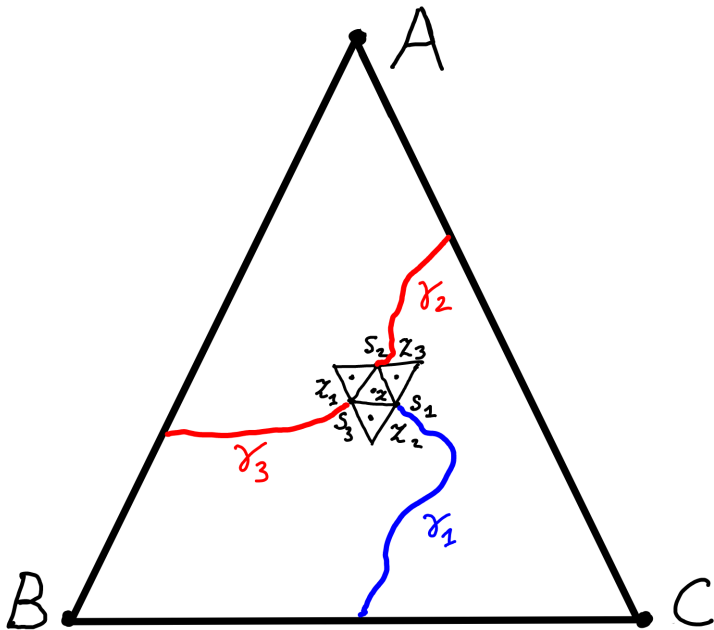


**Lemme 14** (Smirnov). Supposons que la face  $z$  est telle que ses voisins  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sont encore dans  $\mathbf{T}$ . Alors

$$\mathbb{P}(E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z)) = \mathbb{P}(E_N^B(z_2) \setminus E_N^B(z)) = \mathbb{P}(E_N^C(z_3) \setminus E_N^C(z)). \quad (1)$$

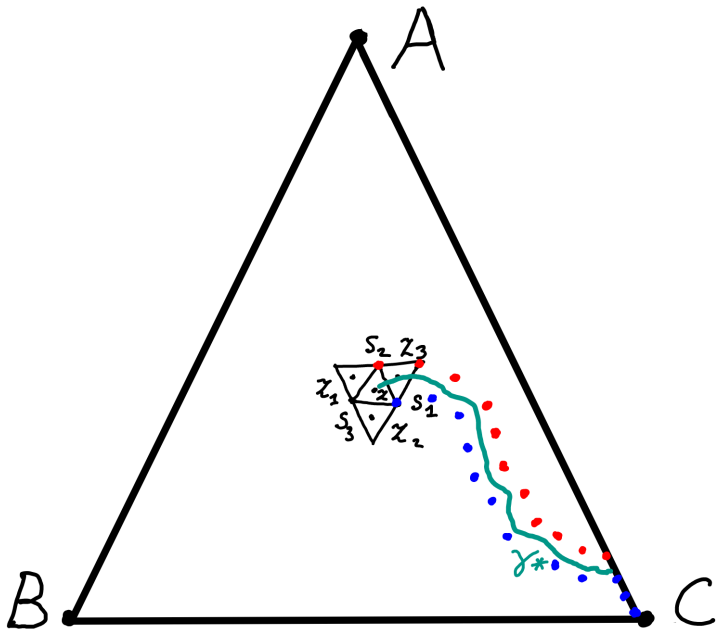
*Démonstration.* Étudions l'événement  $E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z)$ . Cet événement est équivalent aux conditions suivantes:

- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant fermé  $\gamma_1$  reliant  $s_1$  et  $[B, C]$ .
- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant ouvert  $\gamma_2$  reliant  $s_2$  et  $[A, C]$ .
- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant ouvert  $\gamma_3$  reliant  $s_3$  et  $[A, B]$ .
- Les trois chemins  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  ne s'intersectent pas.





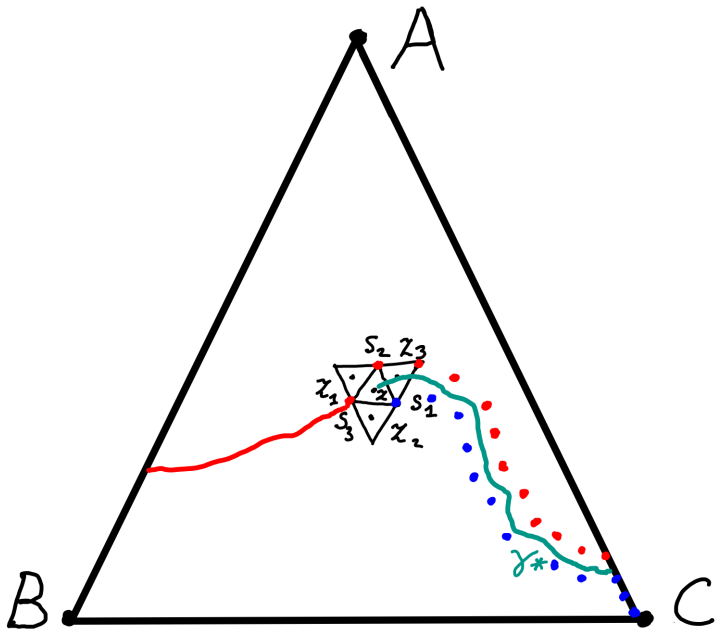
Soit  $\widetilde{E}$  l'événement qu'il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant fermé  $\gamma_1$  reliant  $s_1$  et  $[B, C]$ , ainsi qu'un chemin auto-évitant ouvert  $\gamma_2$  reliant  $s_2$  et  $[A, C]$ . On a  $E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z) \subset \widetilde{E}$ . On peut découvrir l'événement  $\widetilde{E}$  de manière suivante. On lance une exploration à partir de  $C$ : on a un chemin  $\gamma^*$  sur le réseau hexagonal dual avec des sites fermés de même côté que  $B$  et des sites ouverts de même côté que  $A$ . L'événement  $\widetilde{E}$  est caractérisé par le fait que l'exploration découvre les sites  $s_1$  et  $s_2$  et  $\gamma^*$  emprunte l'arête duale à  $\{s_1, s_2\}$  avant que  $(A, B)$  soit atteint. On arrête alors l'exploration lorsque  $\gamma^*$  visite  $\{s_1, s_2\}$ .

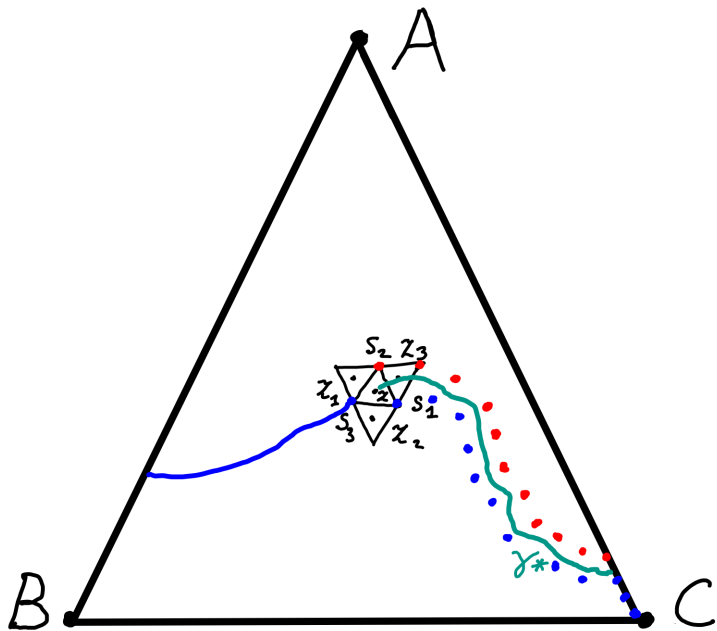


Soit  $S$  l'ensemble des sites découverts lors de l'exploration. Comme  $p = 1/2$ , on a que

$$\mathbb{P}\left(s_3 \xleftrightarrow{\omega, \mathbf{T}_N \setminus S} [A, B] \middle| (\omega_s)_{s \in S}\right) = \mathbb{P}\left(s_3 \xleftrightarrow{\bar{\omega}, \mathbf{T}_N \setminus S} [A, B] \middle| (\omega_s)_{s \in S}\right).$$

C'est la propriété de changement de couleur.





Par conséquent, l'événement  $E_N^A(z_1) \setminus E_N^A(z)$  à la même probabilité que l'événement défini par les conditions suivantes:

- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant fermé  $\gamma_1$  reliant  $s_1$  et  $[B, C]$ .
- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant ouvert  $\gamma_2$  reliant  $s_2$  et  $[A, C]$ .
- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant **fermé**  $\gamma_3$  reliant  $s_3$  et  $[A, B]$ .
- Les trois chemins  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  ne s'intersectent pas.

En échangeant sites ouverts et sites fermés, c'est encore la même probabilité que pour l'événement défini par

- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant ouvert  $\gamma_1$  reliant  $s_1$  et  $[B, C]$ .
- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant fermé  $\gamma_2$  reliant  $s_2$  et  $[A, C]$ .
- Il existe dans  $\mathbf{T}_N$  un chemin auto-évitant ouvert  $\gamma_3$  reliant  $s_3$  et  $[A, B]$ .
- Les trois chemins  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  ne s'intersectent pas.

Ce dernier événement est exactement  $E_N^B(z_2) \setminus E_N^B(z)$ . Ainsi on obtient la première égalité dans (1). La deuxième s'obtient de manière similaire.

### 3.4.4. Holomorphic à la limite



Pour  $z$  une face de  $\mathbf{T}_N$ , pour  $\eta$  tel que  $z + \eta$  est une face voisine de  $z$  et pour  $J \in \{A, B, C\}$ , notons

$$h_N^J(z, \eta) = \mathbb{P}(E_N^J(z + \eta) \setminus E_N^J(z)).$$

On a

$$H_N^J(z + \eta) - H_N^J(z) = h_N^J(z, \eta) - h_N^J(z + \eta, -\eta).$$

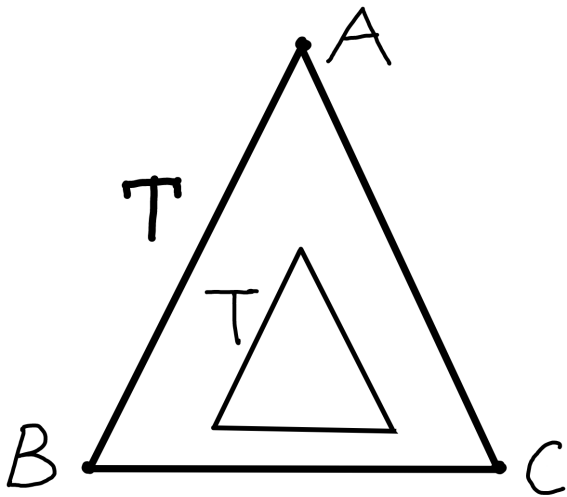
**Lemme 15.** Il existe des constantes  $c, \epsilon > 0$  tel que pour tout  $N \geq 1$  et pour toutes  $z$  et  $z + \eta$  faces adjacentes de  $\mathbf{T}_N$ ,  $h_N^J(z, \eta) \leq cN^{-\epsilon}$ .

*Démonstration.* Ceci découle de la théorie de Russo-Seymour-Welsh de la même manière que Lemme 12.

Soit  $T$  un triangle équilatéral rempli ouvert à l'intérieur de  $\mathbf{T}$ , de côtés parallèles aux axes. Supposons aussi que  $T$  "pointe vers le haut", le cas où il "pointe vers le bas" étant similaire. Soit  $T_N$  une approximation de  $T$  de telle sorte que  $T_N$  est un triangle équilatéral dans  $\mathbf{T}_N$ . Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des faces de  $T_N$  qui "pointent vers le bas".

Dans la suite nous allons noter  $\tau = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . Soit  $\eta \in \{i/(\sqrt{3}N), i\tau/(\sqrt{3}N), i\tau^2/(\sqrt{3}N)\}$ , de sorte que si la face  $z$  est dans  $\mathcal{D}$ ,  $z + \eta$  est une face adjacente. Notons par  $I_N^\eta$ :

$$I_N^\eta = \sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^A(z + \eta) - H_N^A(z)) - \sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^B(z + \eta\tau) - H_N^B(z)).$$



**Lemme 16.** Lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , on a  $|I_N^\eta| = O(N^{1-\epsilon})$ , avec  $\epsilon$  donné par Lemme 15.

*Démonstration.* D'une part, on a

$$\begin{aligned}\sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^A(z + \eta) - H_N^A(z)) &= \sum_{z \in \mathcal{D}} (h_N^A(z, \eta) - h_N^A(z + \eta, -\eta)) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{D}} (h_N^B(z, \eta\tau) - h_N^B(z + \eta, -\eta\tau)),\end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité on a appliqué l'identité (1). D'autre part

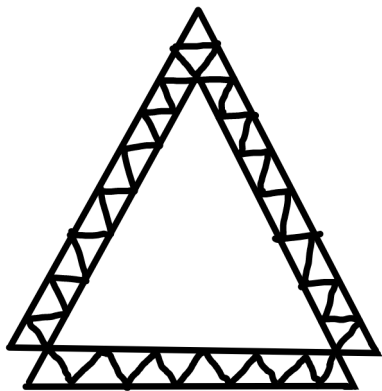
$$\sum_{z \in \mathcal{D}} (H_N^B(z + \eta\tau) - H_N^B(z)) = \sum_{z \in \mathcal{D}} (h_N^B(z, \eta\tau) - h_N^B(z + \eta\tau, -\eta\tau)).$$

Du coup,

$$\begin{aligned} I_N^\eta &= \sum_{z \in \mathcal{D}} h_N^B(z + \eta\tau, -\eta\tau) - \sum_{z \in \mathcal{D}} h_N^B(z + \eta, -\eta\tau) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{D} + \eta\tau} h_N^B(z, -\eta\tau) - \sum_{z \in \mathcal{D} + \eta} h_N^B(z, -\eta\tau) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |I_N^\eta| &\leq \sum_{z \in (\mathcal{D} + \eta\tau) \Delta (\mathcal{D} + \eta)} |h_N^B(z, -\eta\tau)| \\ &\leq cN^{-\epsilon} |(\mathcal{D} + \eta\tau) \Delta (\mathcal{D} + \eta)| = O(N^{1-\epsilon}). \end{aligned}$$





Soit  $(H^A, H^B, H^C)$  une valeur d'adhérence de la suite de fonctions  $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$ .

**Lemme 17.** On a les égalités suivantes des intégrales curvilignes:

$$\int_{\partial T} H^A(z) dz = \tau^{-1} \int_{\partial T} H^B(z) dz = \tau^{-2} \int_{\partial T} H^C(z) dz. \quad (2)$$

*Démonstration.* Montrons la première égalité dans (2). La deuxième est similaire. Soit

$$\Sigma_N = -N^{-1} \left( I_N^{i/(\sqrt{3}N)} + \tau I_N^{i\tau/(\sqrt{3}N)} + \tau^2 I_N^{i\tau^2/(\sqrt{3}N)} \right).$$

D'après Lemme 16, on a  $|\Sigma_N| = O(N^{-\epsilon})$ , et en particulier  $\Sigma_N$  converge vers 0. Mais d'autre part, on peut montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Sigma_N = \int_{\partial T} H^A(z) dz - \tau^{-1} \int_{\partial T} H^B(z) dz$$

le long de la sous-suite correspondant à la valeur d'adhérence  $(H^A, H^B, H^C)$ .

En effet, tous les termes  $H_N^J(z)$  dans  $\Sigma_N$  pour  $z \in \mathcal{D}$  disparaissent car ils sont multipliés par  $1 + \tau + \tau^2 = 0$ . Il en est de même pour tous les termes  $H_N^J(z')$  lorsque  $z'$  est une face pointant vers le haut dans  $T_N$ , qui n'est pas adjacente au bord de  $T_N$ . En effet, ce terme apparaît alors trois fois, une fois pour chaque voisin de  $z'$ . Les seuls  $z'$  pour lesquels cette simplification ne s'effectue pas sont les faces de  $T_N$  orientées vers le haut, qui se trouvent au bord. Pour une face  $z'$  se trouvant au bord mais pas dans un coin, le terme en  $H_N^J(z')$  apparaît deux fois, et pour un coin, une seule fois. Par exemple, pour une face  $z'$  qui se trouve sur le bord inférieur de  $T_N$  et qui n'est pas un coin,  $H_N^A(z')$  sera en facteur de  $-N^{-1}(\tau + \tau^2) = N^{-1}$ , et  $H_N^B(z')$  sera en facteur de  $-\tau^{-1}N^{-1}$ , et donc il restera le terme

$$N^{-1}H_N^A(z') - \tau^{-1}N^{-1}H_N^B(z').$$

Soient les fonctions

$$F_0 = H^A + H^B + H^C, \quad F_1 = H^A + \tau H^B + \tau^2 H^C.$$

**Proposition 6.** Les fonctions  $F_0$  et  $F_1$  sont holomorphes sur  $\mathbf{T}$ .

*Démonstration.* L'égalité (2) assure que

$$\int_{\partial T} F_0(z) dz = \int_{\partial T} F_1(z) dz = 0.$$

Ceci est valable pour tout triangle équilatéral  $T$  contenu dans  $\mathbf{T}$  avec les côtés parallèles aux axes, qu'il pointe vers le haut ou vers le bas. On conclut alors avec le théorème de Morera. En effet, tout triangle peut être approximé par un pavage par triangles équilatéraux.

### 3.4.5. Identification des fonctions limite

Grâce à Proposition 6, nous pouvons identifier de manière unique les valeurs d'adhérence  $H^A$ ,  $H^B$  et  $H^C$  et obtenir ainsi la convergence. A ce stade, il n'y a plus de probabilités et c'est un exercice d'analyse complexe.

**Lemme 18.** Pour tout  $z \in \overline{\mathbf{T}}$ ,  $F_0(z) = 1$ .

*Démonstration.* La fonction  $F_0$  est d'une part holomorphe sur  $\mathbf{T}$ , mais d'autre part elle est à valeurs réelles. Ceci implique que c'est en fait une constante. Par exemple,

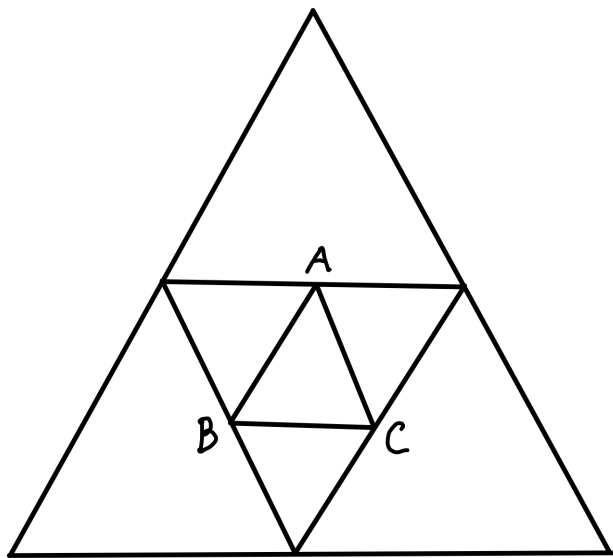
$$|F'_0(z)| = \|(\nabla \operatorname{Im}(F_0))(z)\|_2 = 0.$$

Par ailleurs, d'après Lemme 13,  $F_0(A) = F_0(B) = F_0(C) = 1$ .

**Lemme 19.** La fonction  $F_1$  peut être étendue en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  tout entier.

*Démonstration.*  $F_1$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbf{T}$  qui s'étend continument à  $(B, C)$ . D'autre part, sur  $(B, C)$ ,  $H^A = 0$  et  $H^B + H^C = 1$ . Donc sur  $(B, C)$ ,  $F_1$  prend des valeurs sur la droite joignant  $\tau$  et  $\tau^2$ . En particulier, la fonction  $i(F_1 + 1/2)$  est à valeurs réelles. D'après le principe de réflexion de Schwarz, la fonction  $i(F_1 + 1/2)$ , et donc  $F_1$  aussi, peut être étendue en une fonction holomorphe sur  $\mathbf{T} \cup (B, C) \cup \mathbf{T}'$ , où  $\mathbf{T}'$  est l'image de  $\mathbf{T}$  par réflexion d'axe  $\mathbb{R}$ . En faisant de manière similaire des réflexions par rapport à  $(A, B)$  et  $(A, C)$ , on obtient que  $F_1$  s'étend en une fonction holomorphe sur un triangle équilatéral plus grand, avec les coins  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ,  $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $-1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Ensuite on continue à faire des réflexions de Schwarz dans des triangles équilatéraux de plus en plus grands.





**Lemme 20.** Les fonction  $H^A$ ,  $H^B$  et  $H^C$  sont harmoniques sur  $\mathbf{T}$ .

*Démonstration.* On a

$$\operatorname{Re}(F_1) = H^A - \frac{1}{2}(H^B + H^C) = H^A - \frac{1}{2}(1 - H^A) = \frac{3}{2}H^A - \frac{1}{2}.$$

Donc  $H^A$  est harmonique en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe. De manière similaire,  $H^B$  et  $H^C$  sont harmoniques.

Considérons maintenant les gradients  $\nabla H^A$ ,  $\nabla H^B$  et  $\nabla H^C$ , qu'on identifie aussi à leurs affixes complexes.

**Lemme 21.** Pour tout  $z \in \overline{\mathbf{T}}$ ,  $(\nabla H^B)(z) = \tau(\nabla H^A)(z)$ , c.à.d.  $(\nabla H^B)(z)$  est l'image de  $(\nabla H^A)(z)$  par rotation d'angle  $2\pi/3$ . De même,  $(\nabla H^C)(z) = \tau(\nabla H^B)(z)$  et  $(\nabla H^A)(z) = \tau(\nabla H^C)(z)$ .

*Démonstration.* On a

$$\operatorname{Re}(F_1) = \frac{3}{2}H^A - \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}(F_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(H^B - H^C).$$

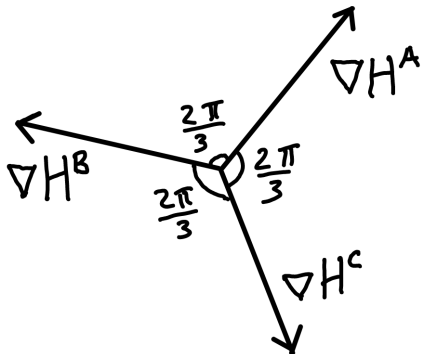
D'après les équations de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\nabla H^B - \nabla H^C) = i\frac{3}{2}\nabla H^A.$$

D'autre part, comme  $F_0$  est constante,

$$\nabla H^A + \nabla H^B + \nabla H^C = 0.$$

Ensemble ceci implique le résultat désiré.



**Lemme 22.** Pour tout  $z \in \partial\mathbf{T}$ ,  $(\nabla H^A)(z)$  est orthogonal à  $[B, C]$ ,  $(\nabla H^B)(z)$  est orthogonal à  $[A, C]$ , et  $(\nabla H^C)(z)$  est orthogonal à  $[A, B]$ .

*Démonstration.* Considérons le cas où  $z \in [B, C]$ , les autres cas étant similaires. Comme  $H^A$  est nulle sur  $[B, C]$  (Lemme 13),  $(\nabla H^A)(z)$  est orthogonal à  $[B, C]$ . Ensuite, Lemme 21 implique les autres relations, pour  $(\nabla H^B)(z)$  et  $(\nabla H^C)(z)$ .

**Lemme 23.** Soit une fonction  $u$  sur  $\overline{\mathbf{T}}$  satisfaisant les conditions suivantes:

- 1  $u$  est continue sur  $\overline{\mathbf{T}}$ .
- 2  $u$  est harmonique sur  $\mathbf{T}$ .
- 3  $\nabla u$  se prolonge par continuité à  $\partial\mathbf{T}$ .
- 4 Pour tout  $z \in \partial\mathbf{T}$ ,  $(\nabla u)(z)$  est orthogonal à  $[B, C]$ .
- 5  $u(A) = 0$ .
- 6  $u$  est nulle sur  $[B, C]$ .

Alors  $u$  est nulle sur  $\overline{\mathbf{T}}$ .

Par intégration par parties,

$$\int_T \|\nabla u\|_2^2 = - \int_T u \Delta u + \int_{\partial T} u \partial_{\bar{n}} u = \int_{\partial T} u \partial_{\bar{n}} u = \int_{\partial T \setminus [B,C]} u \partial_{\bar{n}} u,$$

où le bord  $\partial T$  est orienté dans le sens trigonométrique et  $\partial_{\bar{n}} u$  est la dérivée normale sortante. Donc pour montrer que  $u$  est nulle sur  $\bar{T}$ , il suffit de montrer que

$$\int_{[A,B]} u \partial_{\bar{n}} u = \int_{[C,A]} u \partial_{\bar{n}} u = 0.$$

Notons par  $\partial_{\bar{t}} u$  la dérivée tangentielle de  $u$ . La condition 4. implique que sur  $[A, B]$ ,

$$\partial_{\bar{n}} u = -\frac{1}{\sqrt{3}} \partial_{\bar{t}} u.$$

Ainsi,

$$\int_{[A,B]} u \partial_{\bar{n}} u = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{[A,B]} u \partial_{\bar{t}} u = -\frac{1}{2\sqrt{3}} (u(B)^2 - u(A)^2) = 0.$$

De même pour le segment  $[C, A]$ .

**Proposition 7.** Pour tout  $z \in \overline{\mathbf{T}}$ , le triplet  $(H^A(z), H^B(z), H^C(z))$  correspond aux coordonnées barycentriques de  $z$  dans les triangle  $ABC$ . Il est caractérisé par

$$H^A(z) + H^B(z) + H^C(z) = 1, \quad H^A(z)e^{i\frac{\pi}{3}} + H^B(z) \times 0 + H^C(z) \times 1 = z.$$

*Démonstration.* Notons par  $u^A$ ,  $u^B$  et  $u^C$  les fonctions qui donnent les coordonnées barycentriques. Alors la fonction  $H^A - u^A$  satisfait les hypothèses du Lemme 23, et par conséquent  $H^A - u^A = 0$ . De manière similaire,  $H^B = u^B$  et  $H^C = u^C$ .

Ainsi nous avons établi la convergence de la suite  $(H_N^A, H_N^B, H_N^C)_{N \geq 1}$  et avons identifié la limite. Ceci prouve aussi la formule de Cardy dans le cas du triangle  $\mathbf{T}$ . En effet,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\widehat{AB} \stackrel{\omega, \mathbf{T}_N}{\longleftrightarrow} \widehat{CX}) = H^A(X) = \frac{CX}{CA}.$$



*Remarque.* Il est possible de court-circuiter les arguments présentés dans cette section pour identifier les fonctions  $H^A$ ,  $H^B$  et  $H^C$ . On sait que la fonction  $F_1$  est holomorphe sur  $\mathbf{T}$ , et le fait que  $H^A + H^B + H^C = 1$  implique que l'image de  $\overline{\mathbf{T}}$  par  $F_1$  est contenue dans le triangle rempli fermé avec les sommets  $1$ ,  $\tau$  et  $\tau^2$ . De plus, il est simple de voir que  $F_1$  établit une bijection entre les bords des deux triangles. Ensuite on peut invoquer un résultat plus avancé, le *principe de correspondance des bords*, pour établir qu'en fait  $F_1$  est une transformation conforme entre le triangle  $\mathbf{T}$  et le triangle rempli ouvert avec les sommets  $1$ ,  $\tau$  et  $\tau^2$ . De plus, cette transformation conforme est uniquement déterminée par les conditions  $F_1(A) = 1$ ,  $F_1(B) = \tau$  et  $F_1(C) = \tau^2$ . Il s'agit donc d'une similitude affine  $F_1(z) = \alpha z + \beta$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  appropriés. Ceci permet d'identifier  $H^A$ ,  $H^B$  et  $H^C$ .

### 3.4.6. Le cas d'un domaine général

Le cas d'un domaine  $D$  simplement connexe borné général se prouve de la même manière. On remplace les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  par les points du bord  $a_N$ ,  $b_N$  et  $c_N$ , et les côtés du triangle  $ABC$  par les arcs correspondants sur le bord de  $D_N$ . On définit les fonctions  $H_N^{a_N}$ ,  $H_N^{b_N}$  et  $H_N^{c_N}$  de la même manière que  $H^A$ ,  $H^B$  et  $H^C$ . On montre la relative compacité à l'aide de la théorie de Russo-Seymour-Welsh. Le lemme de changement de couleur de Smirnov marche encore. Il permet d'établir que pour toute limite sous-séquentielle, les fonctions  $H^a + H^b + H^c$ , ainsi que  $H^a + \tau H^b + \tau^2 H^c$ , sont holomorphes sur  $D$ . Avec les conditions aux bord, ceci est suffisant pour montrer que

$$H^a = H^A \circ \psi, \quad H^b = H^B \circ \psi, \quad H^c = H^C \circ \psi.$$