Rappels d’analyse complexe

Cédric Boutillier et Titus Lupu

Théorème de Morera

Définition. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et une fonction $f : D \to \mathbb{C}$. La fonction f est *holomorphe* sur D si pour tout $z_0 \in D$, la limite

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. La fonction f' est alors la *dérivée complexe* de f.

Proposition. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Soit un lacet (chemin fermé) γ dans D, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Supposons de plus que γ peut être contracté en un point par déformations continues tout en restant dans D, c'est-à-dire que γ n'entoure pas un éventuel trou de D. Alors on a

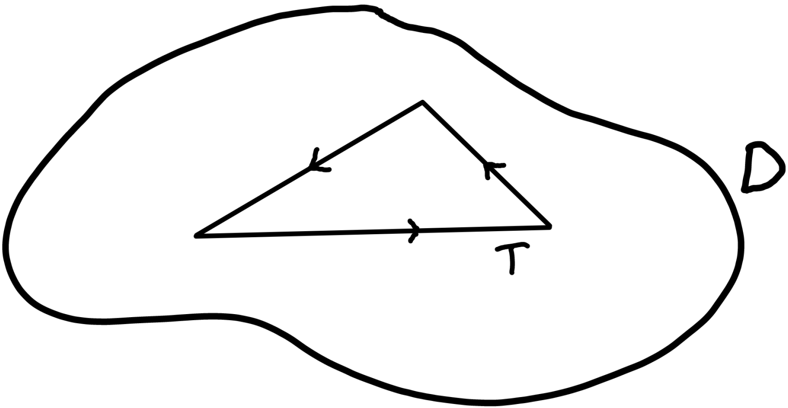
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

La réciproque du résultat précédent est vraie. En fait, il suffit de le vérifier pour seulement les γ qui sont des bords de triangles.

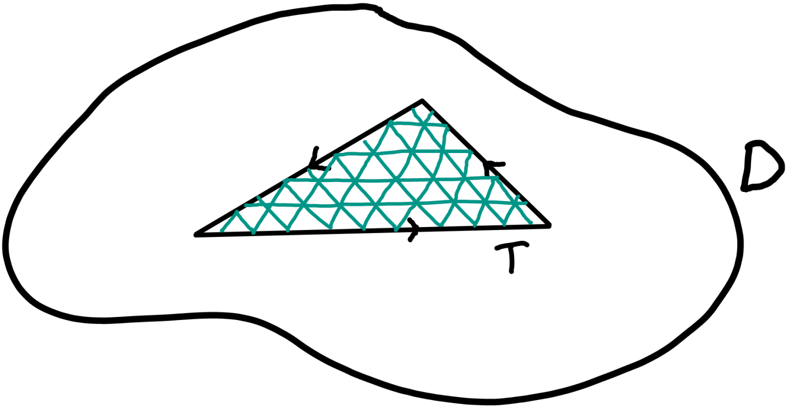
Théorème (Morera). Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur D. Si pour tout triangle rempli fermé T contenu dans D on a

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

alors f est holomorphe sur D.


D
T

On peut même se restreindre aux triangles équilatéraux dont l'un des côtés est parallèle à $\mathbb{R}$.


T
D

Équations de Cauchy-Riemann et fonctions harmoniques conjuguées

Proposition. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Soient $(u, v) = (\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))$. Alors f est holomorphe si et seulement si le système suivant est satisfait (équations de Cauchy-Riemann):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ce système est équivalent à

$$\nabla v = i \nabla u.$$

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soient $(u, v) = (\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))$. Alors u et v sont deux fonctions harmoniques sur D ($\Delta u = \Delta v = 0$). De plus,

$$\nabla v = i \nabla u.$$

On dit que u et v sont des fonctions harmoniques conjuguées.
En particulier,

$$\|\nabla v(z)\|_2 = \|\nabla u(z)\|_2 = |f'(z)|.$$

Proposition. Soit un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D tel que pour tout $z \in D$, $f(z) \neq 0$. Alors $\log|f|$ est une fonction harmonique sur D ($\Delta \log|f| = 0$).

Démonstration. Fixons $z_0 \in D$ et montrons que $\Delta \log|f| = 0$ dans un voisinage de z_0. Comme $f(z_0) \neq 0$, il existe U un voisinage ouvert de z_0 dans D, tel que pour tout $z \in U$, $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$. Alors, comme le domaine $f(U)$ n'entoure pas 0, il existe une détermination du logarithme sur $f(U)$, et par conséquent il existe une fonction holomorphe g sur U tel que pour tout $z \in U$, $f(z) = e^{g(z)}$. Alors $\log|f| = \mathrm{Re}(g)$ sur U, et $\mathrm{Re}(g)$ est harmonique sur U.

Principe de réflexion de Schwarz

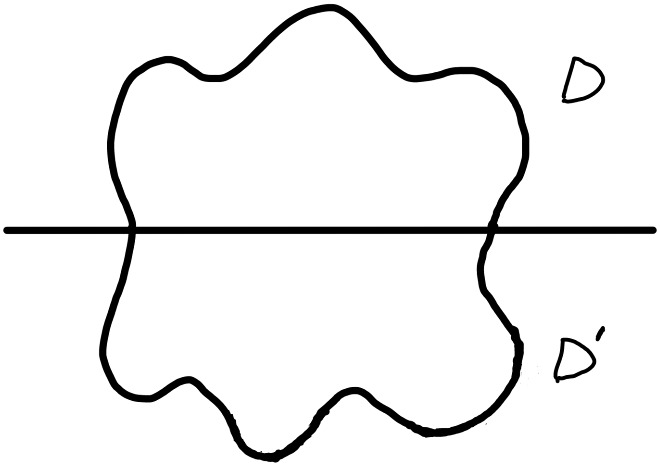
Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan ouvert supérieur:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}. \tag{1}$$

Soit J un ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ et D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{H}$ tel que pour tout $x \in J$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset D$. Soit D' l'image de D par réflexion d'axe horizontal $\mathbb{R}$, et soit

$$\widehat{D} = D \cup D' \cup J.$$

Alors $\widehat{D}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par réflexion d'axe horizontal.


D
D'

Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose de plus le suivant:

1. f se prolonge continument à $D \cup J$.
2. Pour tout $x \in J$, $f(x) \in \mathbb{R}$, où $f(x)$ désigne le prolongement de f à x par continuité.

Soit $\hat{f}$ la fonction suivante définie sur $\widehat{D}$:

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D \cup J, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in D'. \end{cases}$$

Théorème (Schwarz). Sous les hypothèses précédentes, la fonction $\hat{f}$ est holomorphe sur $\widehat{D}$.

Démonstration. Vérifions d'abord que $\hat{f}$ est continue sur $\widehat{D}$. Clairement, $\hat{f}$ est continue sur $D \cup J$ et sur D'. De plus, pour tout $x \in J$,

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in D'}} \hat{f}(z) = \overline{\overline{f(x)}} = f(x).$$

Donc $\hat{f}$ est continue sur $\widehat{D}$.
Pour vérifier que $\hat{f}$ est holomorphe, nous allons appliquer le théorème de Morera. Soit T un triangle rempli fermé contenu dans $\widehat{D}$. Montrons que

$$\int_{\partial T} \hat{f} = 0.$$

Nous allons distinguer les cas suivants:

1. $T \subset D$.
2. $T \subset D'$.
3. $T \cap D' = \emptyset$, mais $T \cap J \neq \emptyset$.
4. $T \cap D = \emptyset$, mais $T \cap J \neq \emptyset$.
5. $T \cap D \neq \emptyset$ et $T \cap D' \neq \emptyset$.

Clairement, $\hat{f}$ est holomorphe sur D. Donc dans le cas 1, l'intégrale curviligne est nulle. En fait, $\hat{f}$ est aussi holomorphe sur D'. En effet, pour $z \in D'$,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z})} = 0.$$

Donc dans le cas 2, l'intégrale curviligne est également nulle.

Supposons qu'on est dans le cas 3. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le translaté vertical de T, $T + i\varepsilon$, est contenu dans D. Comme $\hat{f}$ est continue, on a

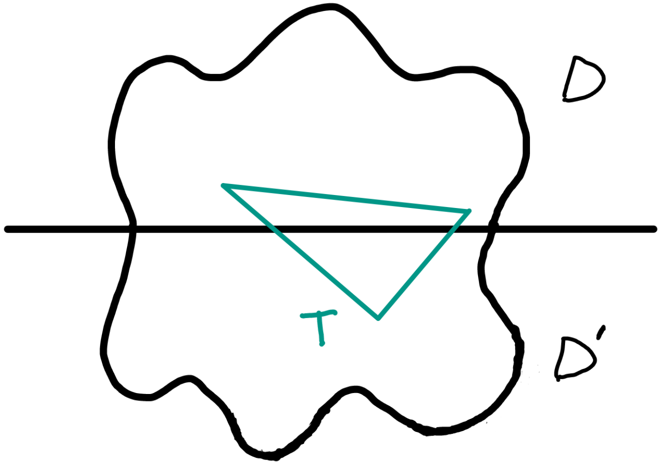
$$\int_{\partial T} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial T + i\varepsilon} \hat{f} = 0.$$

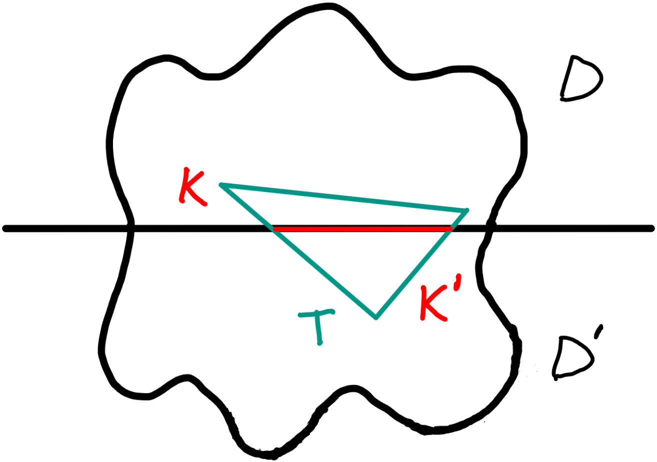
Le cas 4 est le symétrique de 3. Traitons maintenant le cas 5. Dans ce cas, la droite $\mathbb{R}$ divise le triangle T en deux polygones, $K = \overline{T \cap D}$ et $K' = \overline{T \cap D'}$. On a

$$\int_{\partial T} \hat{f} = \int_{\partial K} \hat{f} + \int_{\partial K'} \hat{f},$$

où les frontières ∂T, ∂K et $\partial K'$ sont orientées dans le sens trigonométrique. Enfin,

$$\int_{\partial K} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K + i\varepsilon} \hat{f} = 0, \qquad \int_{\partial K'} \hat{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K' - i\varepsilon} \hat{f} = 0.$$


D
D'
T


K
K'
T
D
D'

Transformations conformes

Définition. Soient D et $\widetilde{D}$ deux ouverts non-vides de $\mathbb{C}$. Une fonction f est une transformation conforme de D vers $\widetilde{D}$ si f est une bijection entre D et $\widetilde{D}$ et f est holomorphe sur D. Alors nécessairement, pour tout $z \in D$, $f'(z) \neq 0$. De plus l'inverse de f, f^{-1}, est holomorphe sur $\widetilde{D}$ et est une transformation conforme de $\widetilde{D}$ vers D.

Notons que si on prends deux ouverts D et $\widetilde{D}$ arbitraires, il n'existe pas nécessairement de transformation conforme de D vers $\widetilde{D}$. Si une telle transformation conforme existe, alors D et $\widetilde{D}$ sont dits *conformément équivalents*.

Rappelons la notion de domaine *simplement connexe*. Il s'agit de domaine sans trous.

Définition. Soit un ouvert non-vide $D \subset \mathbb{C}$. D est dit *simplement connexe* si D est connexe et $\mathbb{C} \setminus D$ est soit vide, soit connexe et non-borné.

Notons par $\mathbb{D}$ le disque unité:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}.$$

Théorème (Riemann). Soit D un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$. Alors D est conformément équivalent au disque unité $\mathbb{D}$ (c.à.d. il existe une transformation conforme de $\mathbb{D}$ vers D) si et seulement si D est simplement connexe et $D \neq \mathbb{C}$.

Plus bas nous rappelons quels sont les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$, c.à.d. les transformations conformes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$.

Proposition. Les automorphisme conformes de $\mathbb{D}$ sont les fonctions de la forme

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{\bar{a}z+1},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$. En particulier, les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$ forment un groupe de Lie de dimension 3.

Il est à noter que les automorphismes conformes de $\mathbb{D}$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

$\mathbb{H}$ désigne le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Proposition. Les transformations conformes de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{H}$ sont les fonctions de la forme

$$f(z) = x - i\lambda \frac{e^{i\theta} z + i}{e^{i\theta} z - i},$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'inverse d'une telle transformation conforme est donné par

$$f^{-1}(w) = ie^{-i\theta} \frac{w - x - i\lambda}{w - x + i\lambda}.$$

Les automorphismes conformes de $\mathbb{H}$ sont les fonctions de la forme

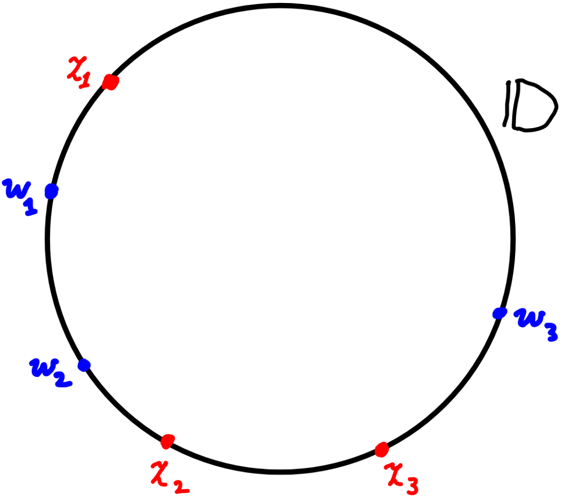
$$f(z) = x + \lambda z,$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, ainsi que les fonctions de la forme

$$f(z) = x - \lambda \frac{az}{z - a},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Proposition. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{D}$, 2 à 2 distincts, et $w_1, w_2, w_3 \in \partial\mathbb{D}$, 2 à 2 distincts. Supposons de plus que les triplets z_1, z_2, z_3 et w_1, w_2, w_3 sont chacun ordonnés dans le sens trigonométrique sur le cercle $\partial\mathbb{D}$. Alors in existe un unique automorphisme conforme de $\mathbb{D}$ tel que $f(z_i) = w_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

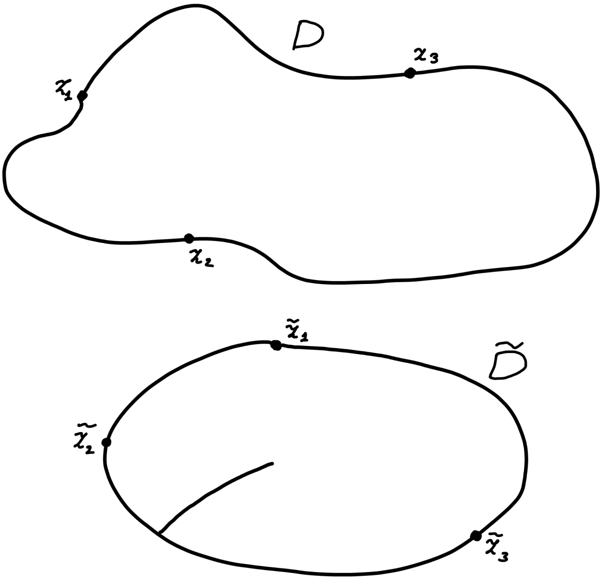


x_1
w_1
w_2
x_2
x_3
w_3
$\mathbb{D}$

Le résultat suivant n'est pas un rappel. Il s'agit en réalité du résultat le plus avancé de ce chapitre. Nous allons l'admettre.

Proposition. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, avec $D \neq \mathbb{C}$. Soit $z \in \partial D$. Supposons qu'au voisinage de z, ∂D est une courbe continue simple, c'est-à-dire sans points multiples. Alors pour toute transformation conforme f de D vers $\mathbb{D}$, f se prolonge par continuité à un voisinage de z dans $\overline{D}$.

Proposition. Soient D et $\widetilde{D}$ deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$, avec $D \neq \mathbb{C}$ et $\widetilde{D} \neq \mathbb{C}$. Soient z_1, z_2, z_3 trois points 2 à 2 distinct sur ∂D et $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ trois points 2 à 2 distinct sur $\partial \widetilde{D}$. On suppose que z_1, z_2, z_3, respectivement $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$, se placent dans l'ordre trigonométrique sur ∂D, respectivement $\partial \widetilde{D}$. On suppose également qu'au voisinage de z_1, z_2 et z_3, respectivement $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ et $\tilde{z}_3$, le bord ∂D, respectivement $\partial \widetilde{D}$, est une courbe continue simple. Alors il existe une unique transformation conforme f de D vers $\widetilde{D}$ qui se prolonge par continuité à un voisinage de z_1, z_2 et z_3 dans $\overline{D}$, avec pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $f(z_i) = \tilde{z}_i$.


D
x_3
x_1
x_2
$\tilde{x}_1$
$\tilde{D}$
$\tilde{x}_2$
$\tilde{x}_3$