

# Invariance conforme en mécanique statistique : dominos, percolation et SLE

Cédric Boutillier et Titus Lupu

# 4. Évolutions de Schramm-Loewner

Évolutions de Schramm-Loewner (Schramm-Loewner Evolutions, SLE)

Courbes aléatoires dans des domaines simplement connexes  $D \subsetneq \mathbb{C}$ .

Invariance conforme en loi et propriété de Markov spatiale.

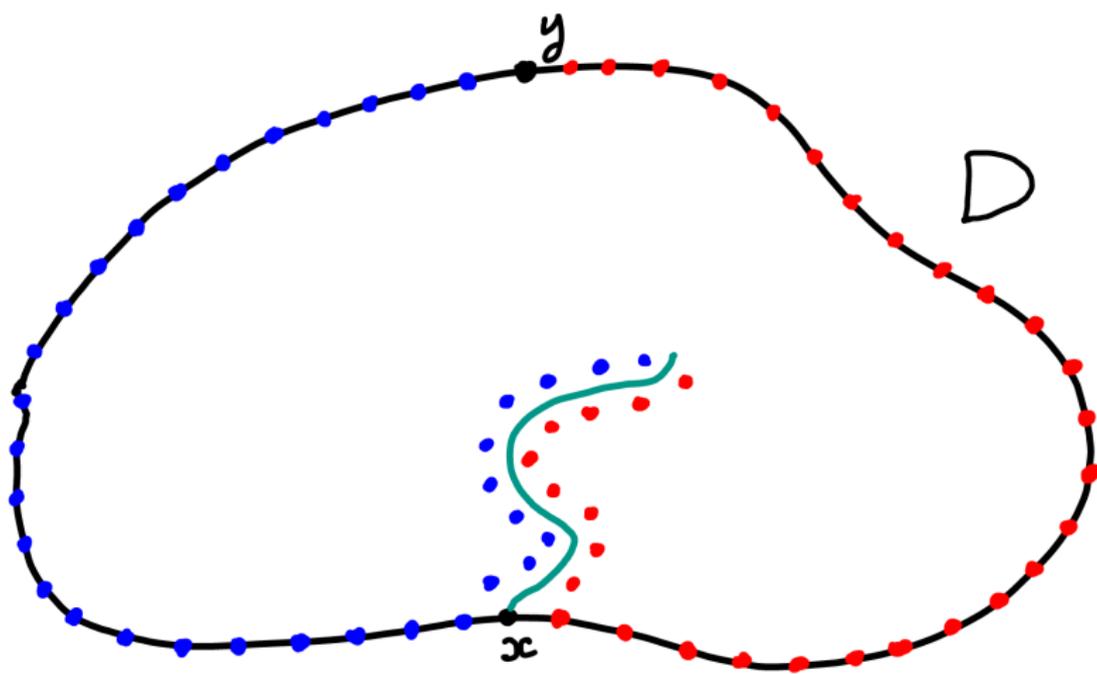
Limites d'échelle prouvées ou conjecturées d'interfaces dans des modèles de physique statistique en dimension 2: Ising critique, percolation critique, lignes de niveau du champ libre gaussien, marche aléatoire à boucles effacées, arbre couvrant uniforme, marche aléatoire auto-évitante.

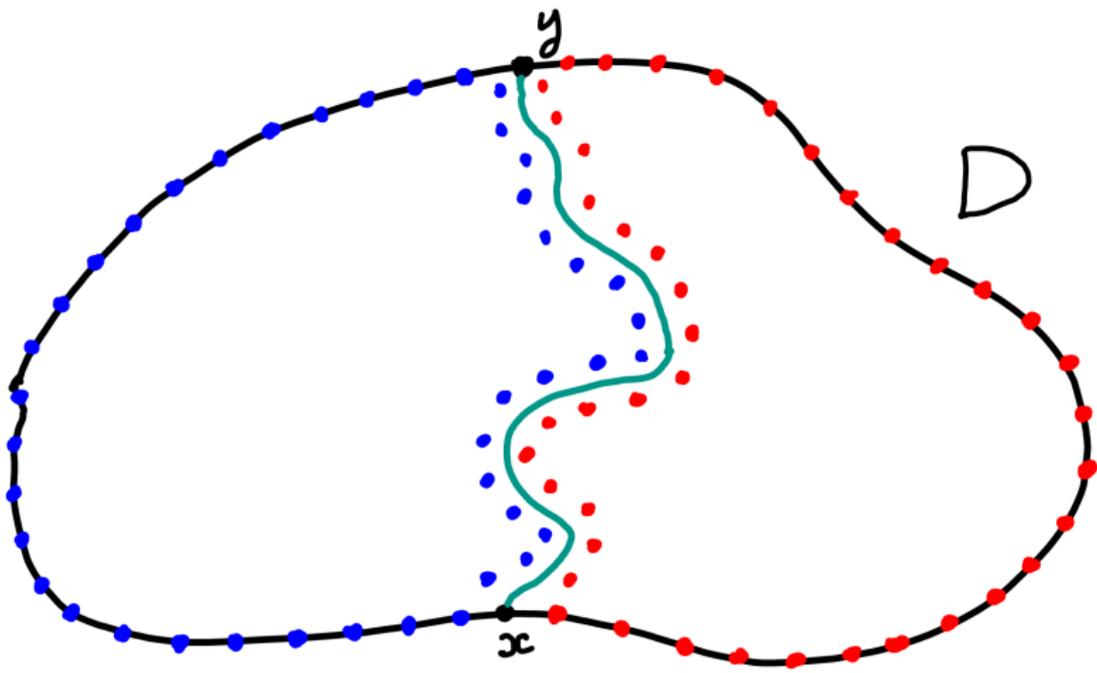
Introduits en 2000 par Oded Schramm.

La constructions repose sur les chaînes de Loewner.

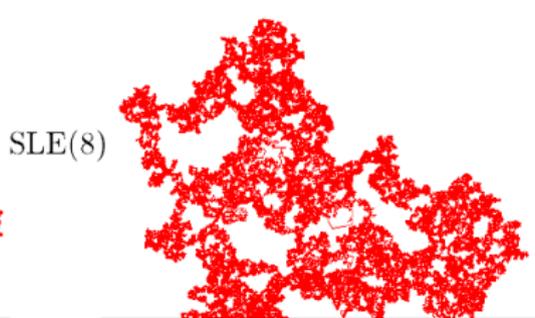
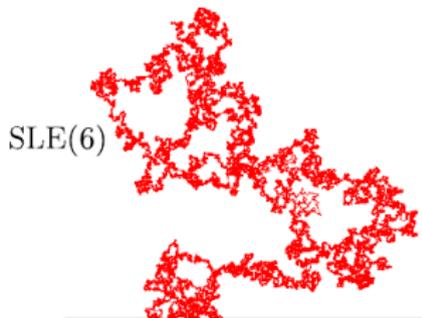
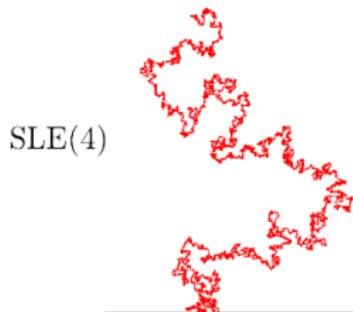
Les chaînes de Loewner ont été introduites en 1923 par Charles Loewner dans un cadre géométrique déterministe.

Idée de Schramm: utiliser le mouvement brownien comme fonction pilote dans les chaînes de Loewner.

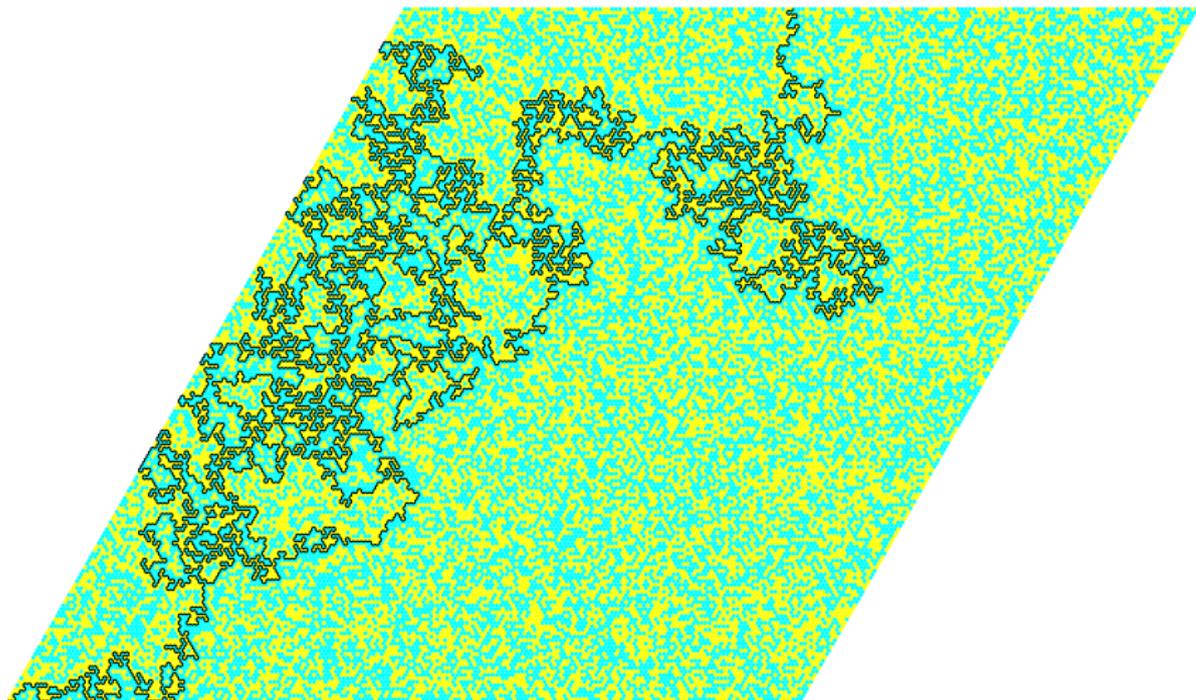




Simulation numérique des processus SLE dans le demi-plan supérieur pour différentes valeurs du paramètre.



Simulation numérique de la percolation critique sur réseau triangulaire et d'une interface d'exploration.



## 4.1. Théorie de Loewner déterministe

### 4.1.1. Invariance conforme du mouvement brownien en dimension 2 et noyaux de Poisson

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$ , issu d'un point  $B_0 = z_0$ . Notons  $X_t = \operatorname{Re}(B_t)$  et  $Y_t = \operatorname{Im}(B_t)$ . Alors  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  sont deux mouvements browniens standards unidimensionnels et indépendants.

**Proposition 8.** Soit  $f$  une fonction **holomorphe** non-constante sur  $\mathbb{C}$ . Soit le changement de temps

$$A(t) = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds, \quad (1)$$

et le changement de temps inverse

$$A_{-1}(u) = \inf\{t \geq 0 \mid A(t) = u\}. \quad (2)$$

Notons

$$\tilde{B}_u = f(B_{A_{-1}(u)}).$$

Alors le processus  $(\tilde{B}_u)_{u \geq 0}$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$  issu de  $f(z_0)$ .

*Démonstration* La fonction de changement de temps  $A$  est continue. Comme  $f$  n'est pas constante, la dérivée  $f'$  n'est pas uniformément nulle sur  $\mathbb{C}$ , et donc d'après le principe des zéros isolés, les zéros de  $f'$  sont isolés, et en particulier  $A$  est p.s. strictement croissante. Donc le changement de temps inverse  $A^{-1}$  est continu. En utilisant par exemple la récurrence du mouvement brownien en dimension 2, on peut vérifier que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = +\infty$  p.s.

La formule d'Itô appliquée à  $f(B_t)$  donne

$$f(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}(\Delta f)(B_t)dt.$$

Comme  $f$  est holomorphe,  $f$  est en particulier harmonique et  $\Delta f \equiv 0$ .  
Donc  $(f(B_t))_{t \geq 0}$  est une martingale locale. On a

$$d \operatorname{Re} f(B_t) = \operatorname{Re} f'(B_t)dX_t - \operatorname{Im} f'(B_t)dY_t,$$

$$d \operatorname{Im} f(B_t) = \operatorname{Im} f'(B_t)dX_t + \operatorname{Re} f'(B_t)dY_t.$$

D'où

$$\langle \operatorname{Re} f(B_t), \operatorname{Re} f(B_t) \rangle_t = \langle \operatorname{Im} f(B_t), \operatorname{Im} f(B_t) \rangle_t = A(t),$$

$$\langle \operatorname{Re} f(B_t), \operatorname{Im} f(B_t) \rangle = 0.$$

Notons

$$\tilde{X}_u = \operatorname{Re}(\tilde{B}_u), \quad \tilde{Y}_u = \operatorname{Im}(\tilde{B}_u).$$

D'après le Théorème de Dubins-Schwarz, les processus  $(\tilde{X}_u)_{u \geq 0}$  et  $(\tilde{Y}_u)_{u \geq 0}$  sont deux mouvements browniens unidimensionnels standard. Pour conclure, il reste à voir que les deux processus sont indépendants.

On a

$$\langle \tilde{X}_u, \tilde{Y}_u \rangle_u = \langle \operatorname{Re} f(B_t), \operatorname{Im} f(B_t) \rangle_{A_{-1}(u)} = 0.$$

Soient  $k \geq 1$  un entier,  $u_k > u_{k-1} > \dots > u_0 \geq 0$  et  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ . Posons

$$\begin{aligned} M_u = \exp & \left( i\lambda_0 \tilde{X}_{u \wedge u_0} + i\mu_0 \tilde{Y}_{u \wedge u_0} + i \sum_{j=1}^k (\lambda_j (\tilde{X}_{u \wedge u_j} - \tilde{X}_{u \wedge u_{j-1}}) \right. \\ & \left. + \mu_j (\tilde{Y}_{u \wedge u_j} - \tilde{Y}_{u \wedge u_{j-1}})) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\lambda_0 + \mu_0) u \wedge u_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\lambda_j + \mu_j) (u \wedge u_j - u \wedge u_{j-1}) \right). \end{aligned}$$

Avec la formule d'Itô on vérifie que  $(M_u)_{u \geq 0}$  est une martingale locale. De plus, c'est une martingale locale bornée, donc une vraie martingale. En particulier,

$$\mathbb{E}[M_{u_k}] = \mathbb{E}[M_0] = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \exp \left( i\lambda_0 \tilde{X}_{u_0} + i\mu_0 \tilde{Y}_{u_0} + i \sum_{j=1}^k (\lambda_j (\tilde{X}_{u_j} - \tilde{X}_{u_{j-1}}) + \mu_j (\tilde{Y}_{u_j} - \tilde{Y}_{u_{j-1}})) \right) \right] \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2} (\lambda_0 + \mu_0) u_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\lambda_j + \mu_j) (u_j - u_{j-1}) \right) \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( i\lambda_0 \tilde{X}_{u_0} + i \sum_{j=1}^k \lambda_j (\tilde{X}_{u_j} - \tilde{X}_{u_{j-1}}) \right) \right] \mathbb{E} \left[ \exp \left( i\mu_0 \tilde{Y}_{u_0} + i \sum_{j=1}^k \mu_j (\tilde{Y}_{u_j} - \tilde{Y}_{u_{j-1}}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent les deux vecteurs  $(\tilde{X}_{u_0}, \tilde{X}_{u_1}, \dots, \tilde{X}_{u_k})$  et  $(\tilde{Y}_{u_0}, \tilde{Y}_{u_1}, \dots, \tilde{Y}_{u_k})$  sont indépendants. Comme c'est vrai pour tout  $k \geq 1$  et  $u_k > u_{k-1} > \dots > u_0 \geq 0$ , on obtient l'indépendance voulue des deux processus.

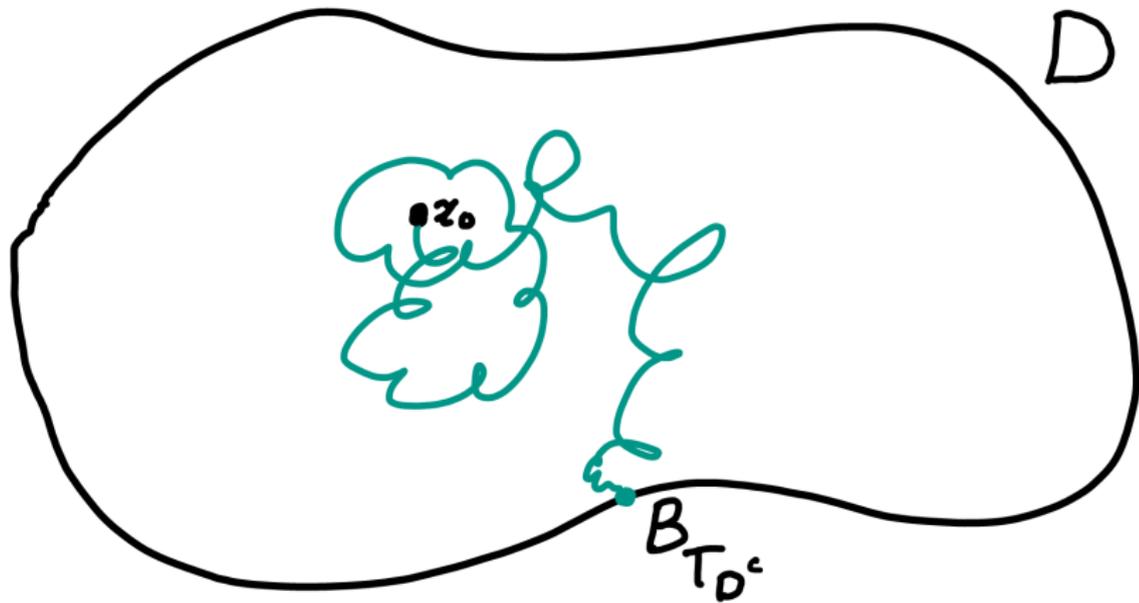
La Proposition 8 admet une généralisation lorsqu'on considère des domaines de  $\mathbb{C}$ . Soient  $D$  et  $\tilde{D}$  deux ouverts non vides de  $\mathbb{C}$ , conformément équivalents, et  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  une transformation conforme. Soit  $z_0 \in D$  et  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$  issu de  $z_0$ . On note

$$T_{D^c} = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \notin D\}.$$

Soient les changements de temps  $A$  et  $A^{-1}$  donnés par (1) et (2) respectivement, avec les conditions  $t < T_{D^c}$  et  $u < A(T_{D^c})$ .

**Proposition 9.** Le processus  $(f(B_{A^{-1}(u \wedge A(T_{D^c}))}))_{u \geq 0}$  est distribué comme un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$  issu de  $f(z_0)$  et arrêté à la sortie de  $\tilde{D}$ .

Nous laissons la preuve en exercice.



Étant donné un domaine ouvert simplement connexe  $D$ , avec  $D \neq \mathbb{C}$ , et dont le bord  $\partial D$  est une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, on peut définir le *noyau de Poisson* dans  $D$ . Pour tout  $z \in D$ , la mesure harmonique sur  $\partial D$  à partir de  $z$  a une densité  $P_D(z, x)$  par rapport à la mesure de longueur d'arc  $dx$  sur  $\partial D$ . C'est le noyau de Poisson, et il est caractérisé par le fait que pour toute  $F : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée,

$$\mathbb{E}_z[F(B_{T_{D^c}})] = \int_{\partial D} P_D(z, x)F(x)dx.$$

L'invariance conforme du mouvement brownien en dimension 2 entraîne la covariance conforme du noyau de Poisson. Soient  $D$  et  $\tilde{D}$  deux domaines ouverts simplement connexes, différent de  $\mathbb{C}$ . On suppose que les bords  $\partial D$  et  $\partial \tilde{D}$  sont des courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Soit  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  une transformation conforme. Dans ce cas (admis) la dérivée  $f'$  se prolonge par continuité à tous les points  $x \in \partial D$  tel que  $x$  n'est pas un point de rupture de pente pour  $\partial D$ , et  $f(x)$  n'est pas un point de rupture de pente pour  $\partial \tilde{D}$ .

**Corollaire 3.** Pour tout  $z \in D$  et tout  $x \in \partial D$  tel que  $x$  n'est pas un point de rupture de pente pour  $\partial D$ , et  $f(x)$  n'est pas un point de rupture de pente pour  $\partial \tilde{D}$ , on a l'égalité

$$P_{\tilde{D}}(f(z), f(x)) = |f'(x)|^{-1} P_D(z, x).$$

*Démonstration.* Fixons  $z \in D$  et soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$  issu de  $z$ . Alors d'après Proposition 9,  $(f(B_{A^{-1}(u \wedge A(T_{D^c}))}))_{u \geq 0}$  est distribué comme un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$  issu de  $f(z_0)$  et arrêté à la sortie de  $\tilde{D}$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{D}} P_{\tilde{D}}(f(z), y) F(y) dy &= \mathbb{E}_z [F(f(B_{A^{-1}(A(T_{D^c})))))] \\ &= \mathbb{E}_z [F(f(B_{T_{D^c}}))] = \int_{\partial D} P_D(z, x) F(f(x)) dx. \end{aligned}$$

Faisons ensuite le changement de variables  $y = f(x)$ . On obtient alors

$$\int_{\partial D} P_D(z, x) F(f(x)) dx = \int_{\partial \tilde{D}} P_D(z, f^{-1}(y)) F(y) |f' \circ f^{-1}(y)|^{-1} dy.$$

Donc  $dy$ -presque partout sur  $\partial \tilde{D}$ ,

$$P_{\tilde{D}}(f(z), y) = |f' \circ f^{-1}(y)|^{-1} P_D(z, f^{-1}(y)).$$

On conclut en utilisant les propriétés de continuité de  $f'$  sur  $\partial D$ .

En utilisant le Corolaire 3, on peut exprimer le noyau de Poisson explicitement dans divers domaines. Notons

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Par symétrie par rotation, on a

$$P_{\mathbb{D}}(0, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}.$$

En utilisant les automorphismes conformes de  $\mathbb{D}$ , on obtient l'expression suivante du noyau de Poisson sur  $\mathbb{D}$ :

$$P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left( \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} \right).$$

En utilisant l'inversion  $z \mapsto z^{-1}$ , on obtient le noyau de Poisson sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ :

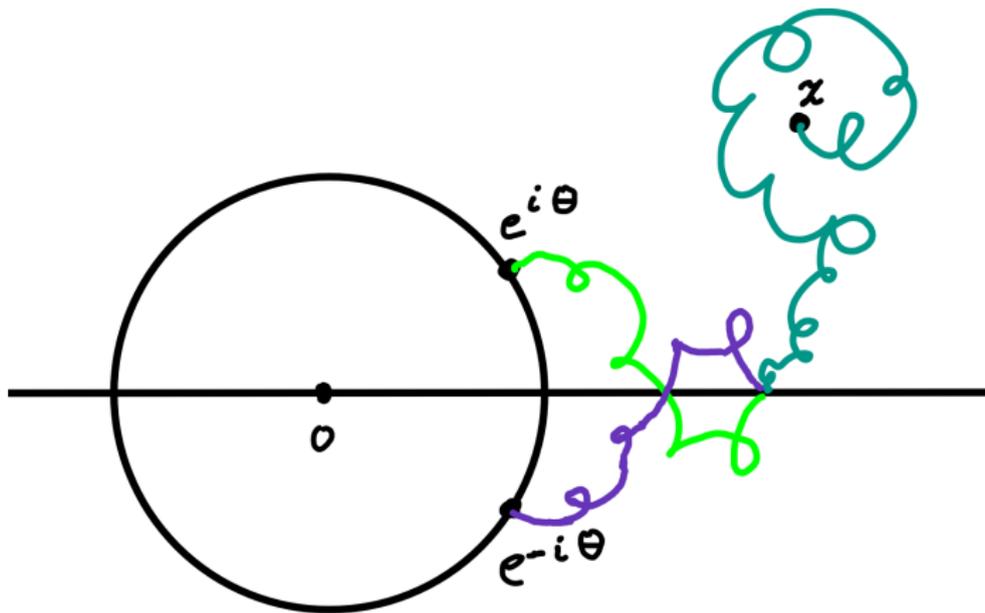
$$P_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left( \frac{1 + z^{-1}e^{i\theta}}{1 - z^{-1}e^{i\theta}} \right).$$

Ensuite, on peut obtenir la restriction du noyau de Poisson sur  $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  à  $\partial\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$  en utilisant le principe de réflexion pour le mouvement brownien:

$$P_{\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) = P_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) - P_{\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{-i\theta}).$$

En effet, si une trajectoire brownienne partant de  $z \in \mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  touche  $\mathbb{R}$  avant  $\overline{\mathbb{D}}$ , alors à partir de là elle a même probabilité infinitésimale conditionnelle de sortir de  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  par  $e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , que par  $e^{-i\theta}$ . Dans la suite nous allons seulement utiliser que lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ ,

$$P_{\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}}}(z, e^{i\theta}) = \frac{2 \sin(\theta) \operatorname{Im}(z)}{\pi |z|^2} (1 + O(|z|^{-1})).$$



Notons aussi qu'en utilisant les transformations conformes de  $\mathbb{D}$  vers  $\mathbb{H}$ , on obtient le noyau de Poisson dans  $\mathbb{H}$ :

$$P_{\mathbb{H}}(z, x) = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z - x|^2}.$$

## 4.1.2. Enveloppes et capacité de demi-plan

Rappelons les notations

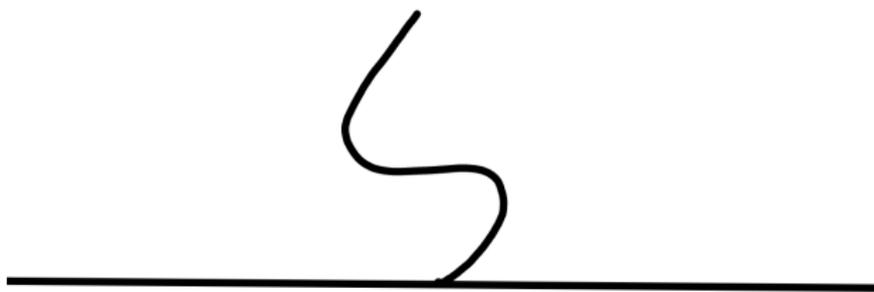
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

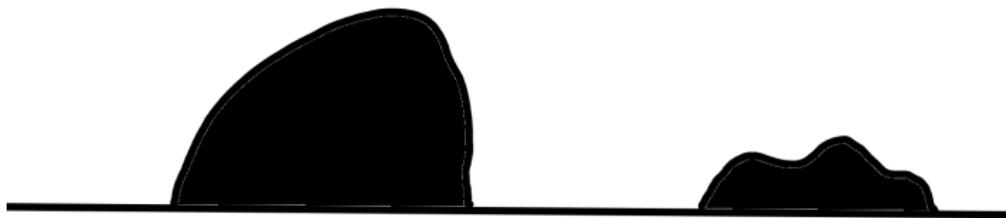
Nous allons considérer des enveloppes dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$ .

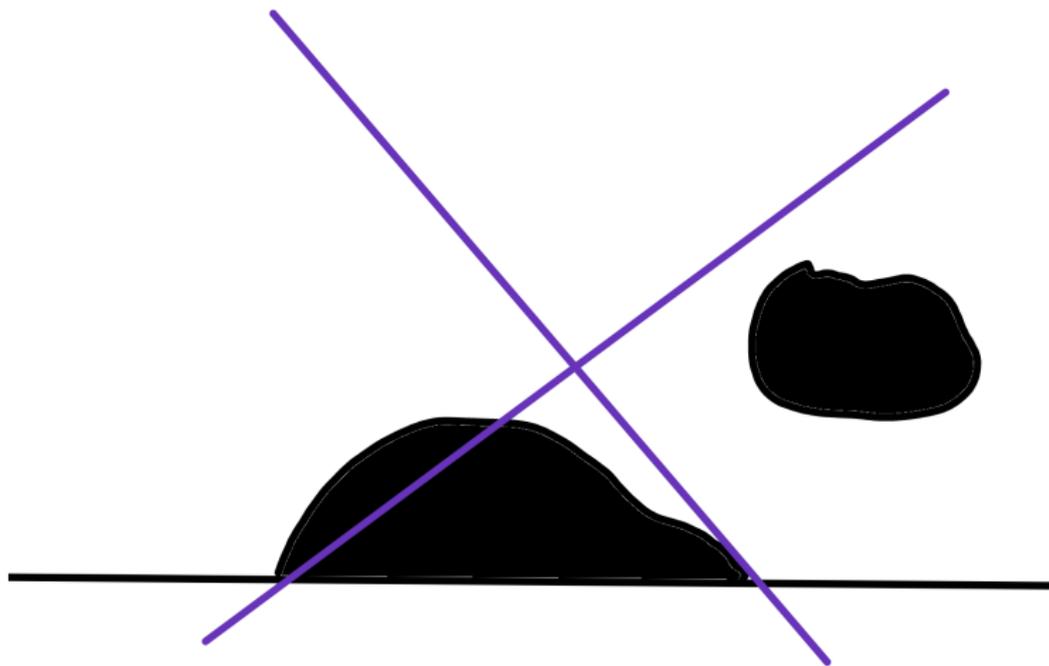
**Définition 11.** Un sous-ensemble compact  $K$  de  $\overline{\mathbb{H}}$  est une *enveloppe* (*hull* en anglais) si  $\mathbb{H} \setminus K$  est connexe et simplement connexe.

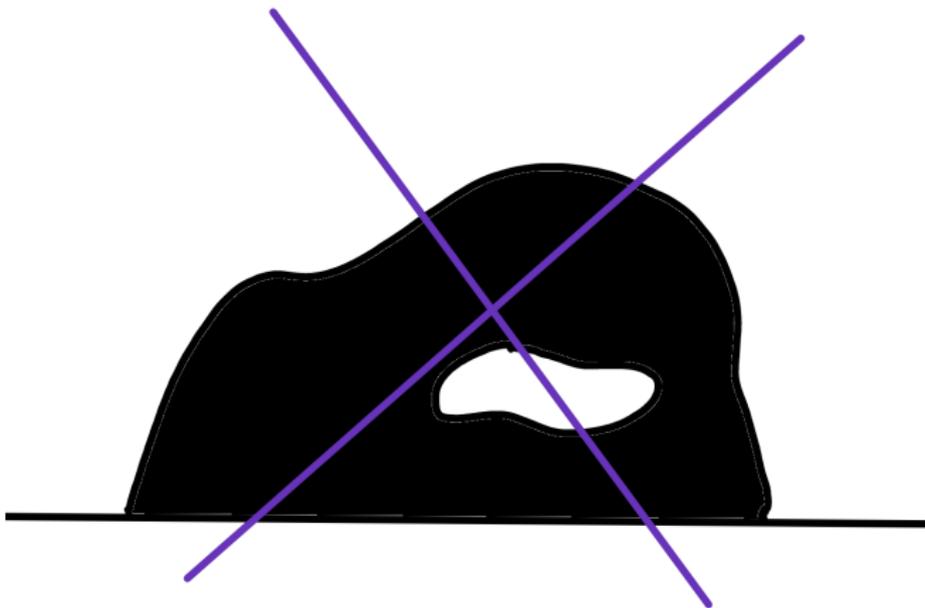
Si  $K$  est une enveloppe, alors  $\mathbb{H} \setminus K$  est conformément équivalent à  $\mathbb{H}$  par le théorème d'uniformisation de Riemann.











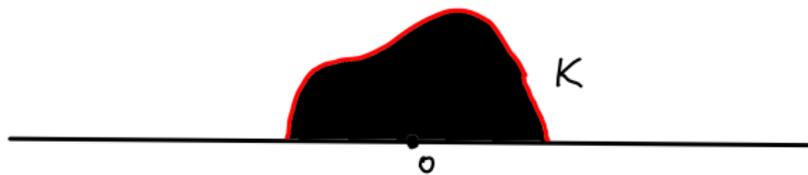
Nous allons considérer en particulier les transformations conformes  $f : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$  tel que  $f(\infty) = \infty$  et décrire leur développement asymptotique au voisinage de  $\infty$ . Notons aussi que dans la suite nous n'allons pas distinguer deux enveloppes  $K$  et  $K'$  si  $K \cap \mathbb{H} = K' \cap \mathbb{H}$ .

**Proposition 10.** Soit  $K$  une enveloppe et  $f : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$  une transformation conforme tel que  $f(\infty) = \infty$ . Alors il existe  $\lambda > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$  tel que, lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ ,

$$f(z) = \lambda z + x + \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \quad (3)$$

De plus, pour tout choix de  $\lambda > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une unique transformation conforme  $f : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$  tel que (3) soit satisfaite avec ces valeurs particulières de  $\lambda$  et  $x$ , et un  $C$  dépendant de  $\lambda$  et  $x$ .

$\infty$



$\infty$



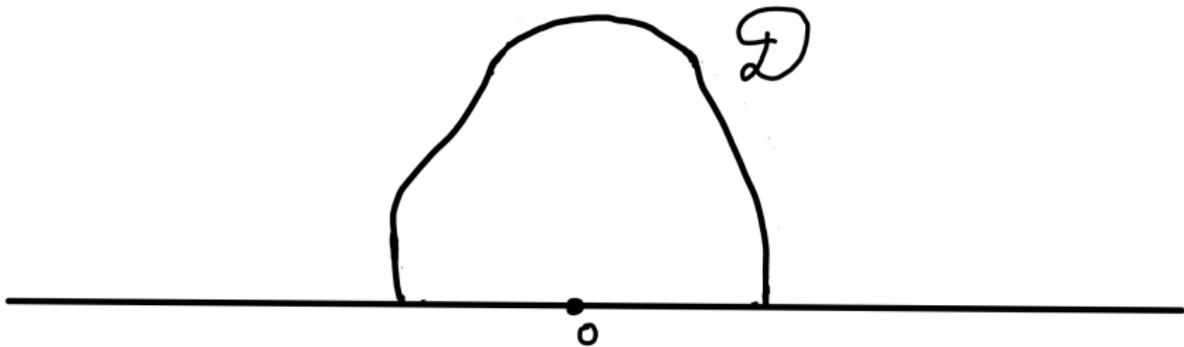
*Démonstration.* On considère l'inversion  $\psi(z) = -z^{-1}$  qui induit un automorphisme conforme de  $\mathbb{H}$ . Notons que  $\psi \circ \psi(z) = z$ , et que  $\psi(\infty) = 0$ . Soit  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \psi$ . Alors  $\tilde{f}$  est une transformation conforme de  $\mathcal{D} = \psi(\mathbb{H} \setminus K)$  vers  $\mathbb{H}$ , avec  $\tilde{f}(0) = 0$ . Le bord  $\partial\mathcal{D}$  contient un intervalle ouvert  $J$  autour de 0 dans  $\mathbb{R}$ . D'après le principe de prolongement des transformations conformes au bord,  $\tilde{f}$  se prolonge par continuité à  $\mathcal{D} \cup J'$ , où  $J'$  est un sous-intervalle ouvert de  $J$  contenant 0. De plus,  $\tilde{f}(J') \subset \partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$ . Donc on peut appliquer le principe de réflexion de Schwarz à  $\tilde{f}$ , pour étendre  $\tilde{f}$  en une fonction holomorphe dans un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ . En particulier, on peut écrire un développement limité à trois termes au voisinage de 0:

$$\tilde{f}(w) = aw + bw^2 + cw^3 + O(|w|^4).$$

De plus, comme  $\tilde{f}(J') \subset \mathbb{R}$ , on a  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$\infty$

$\mathcal{D}$



Vérifions qu'en fait  $a > 0$ . D'une part,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-1} \tilde{f}(ri) = ai.$$

Or, pour tout  $r$  assez petit,  $\tilde{f}(ri) \in \mathbb{H}$ . Donc  $a \geq 0$ . Supposons par l'absurde que  $a = 0$ . Comme  $\tilde{f}$  n'est pas uniformément nulle au voisinage de 0, il existe  $n \geq 2$  et  $v \in \mathbb{R}^*$  tel qu'au voisinage de 0,  $\tilde{f}(z) \sim vz^n$ . Dans le cas où  $v > 0$ , on considère  $\tilde{f}(re^{i3\pi/(2n)})$ , et on a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n} \tilde{f}(re^{i3\pi/(2n)}) = -iv.$$

Or, comme  $n \geq 2$ ,  $re^{i3\pi/(2n)} \in \mathbb{H}$ , et donc pour  $r$  assez petit,  $\tilde{f}(re^{i3\pi/(2n)}) \in \mathbb{H}$ . On aboutit à une contradiction. Dans le cas où  $v < 0$ , on considère  $\tilde{f}(re^{i\pi/(2n)})$  à la place. Conclusion:  $a \neq 0$  et  $a > 0$ .

Le développement limité en 0 pour  $\tilde{f}$  induit un développement asymptotique pour  $f = \psi \circ \tilde{f} \circ \psi$  près de  $\infty$ . Après calcul, on trouve

$$f(z) = \lambda z + x + \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

avec

$$\lambda = a^{-1} > 0, \quad x = a^{-2}b \in \mathbb{R}, \quad C = a^{-3}(b^2 - ac) \in \mathbb{R}.$$

Si on a une transformation conforme  $f$  avec un développement (3) et si on prend d'autres valeurs  $\hat{\lambda} > 0$  et  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ , alors  $\hat{\lambda}\lambda^{-1}f + \hat{x} - \hat{\lambda}\lambda^{-1}x$  est encore une transformation conforme de  $\mathbb{H} \setminus K$  vers  $\mathbb{H}$  et satisfait un développement asymptotique avec  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{x}$ .

Si  $f$  et  $\hat{f}$  sont deux transformations conformes  $\mathbb{H} \setminus K$  vers  $\mathbb{H}$  satisfaisant

$$f(z) = \hat{f}(z) + O(|z|^{-1}) = \lambda z + x + O(|z|^{-1}),$$

alors  $\hat{f} \circ f^{-1}$  est un automorphisme conforme de  $\mathbb{H}$ , avec, au voisinage de  $\infty$ ,  $\hat{f} \circ f^{-1}(z) = z + O(|z|^{-1})$ . D'après la structure générale des automorphismes conformes de  $\mathbb{H}$ , on a  $\hat{f} \circ f^{-1}(z) = z$ , et donc  $\hat{f} = f$ .

Dans la suite, nous allons associer à une enveloppe  $K$  l'unique transformation conforme  $g_K$  de  $\mathbb{H} \setminus K$  vers  $\mathbb{H}$  satisfaisant au voisinage de  $\infty$

$$g_K(z) = z + \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

La valeur  $C$ , dépendant de  $K$ , est ce qu'on appelle la *capacité de demi-plan* de  $K$ .

**Définition 12.** Étant donnée une enveloppe  $K$ , sa *capacité de demi-plan* (*half-plane capacity* en anglais) est

$$\text{hcap}(K) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} z(g_K(z) - z).$$

Ainsi,

$$g_K(z) = z + \frac{\text{hcap}(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \quad (4)$$

A priori,  $\text{hcap}(K) \in \mathbb{R}$ , mais nous allons voir dans la suite que  $\text{hcap}(K) \geq 0$  et que  $\text{hcap}(K) = 0$  si et seulement si  $K \subset \mathbb{R}$ .

Mais regardons d'abord comment change  $\text{hcap}(K)$  lorsqu'on applique à  $K$  une dilatation ou une translation horizontale.

**Proposition 11.** Soit  $K$  une enveloppe. Alors pour tout  $\lambda > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{hcap}(\lambda K + x) = \lambda^2 \text{hcap}(K).$$

*Démonstration.* En effet, on peut vérifier que

$$g_{\lambda K+x}(z) = \lambda g_K(\lambda^{-1}(z - x)) + x,$$

et on regarde le terme en  $z^{-1}$  dans le développement de  $g_{\lambda K+x}(z)$ .

**Proposition 12.** Soient deux enveloppes  $K$  et  $K'$  avec  $K \subset K'$ . Soit  $\tilde{K} = \overline{g_K(K' \setminus K)}$ . Alors

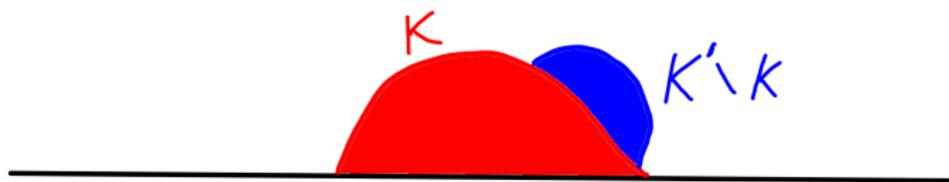
$$\text{hcap}(K') = \text{hcap}(K) + \text{hcap}(\tilde{K}).$$

*Démonstration.* L'application  $g_{K'} \circ g_K^{-1}$  induit une transformation conforme de  $\mathbb{H} \setminus \tilde{K}$  vers  $\mathbb{H}$ . De plus, on a le développement asymptotique

$$g_{K'} \circ g_K^{-1}(z) = z + \frac{\text{hcap}(K') - \text{hcap}(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

Donc  $g_{K'} \circ g_K^{-1}$  coïncide avec  $g_{\tilde{K}}$  sur  $\mathbb{H} \setminus \tilde{K}$  et

$$\text{hcap}(\tilde{K}) = \text{hcap}(K') - \text{hcap}(K).$$



**Proposition 13.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{C}$ . Notons  $\mathbb{E}_z$  l'espérance par rapport à  $(B_t)_{t \geq 0}$  lorsque  $B_0 = z$ . Étant donné un fermé  $F \subset \mathbb{C}$ , on note par  $T_F$  le premier temps d'atteinte de  $F$ :

$$T_F = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \in F\}.$$

Soit  $K \subset \overline{\mathbb{H}}$  une enveloppe. On a les propriétés suivantes.

- ① Pour tout  $z \in \mathbb{H} \setminus K$ ,

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(g_K(z)) + \mathbb{E}_z [\operatorname{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})]. \quad (5)$$

- ② On a

$$\operatorname{hcap}(K) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \mathbb{E}_{iy} [\operatorname{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})].$$

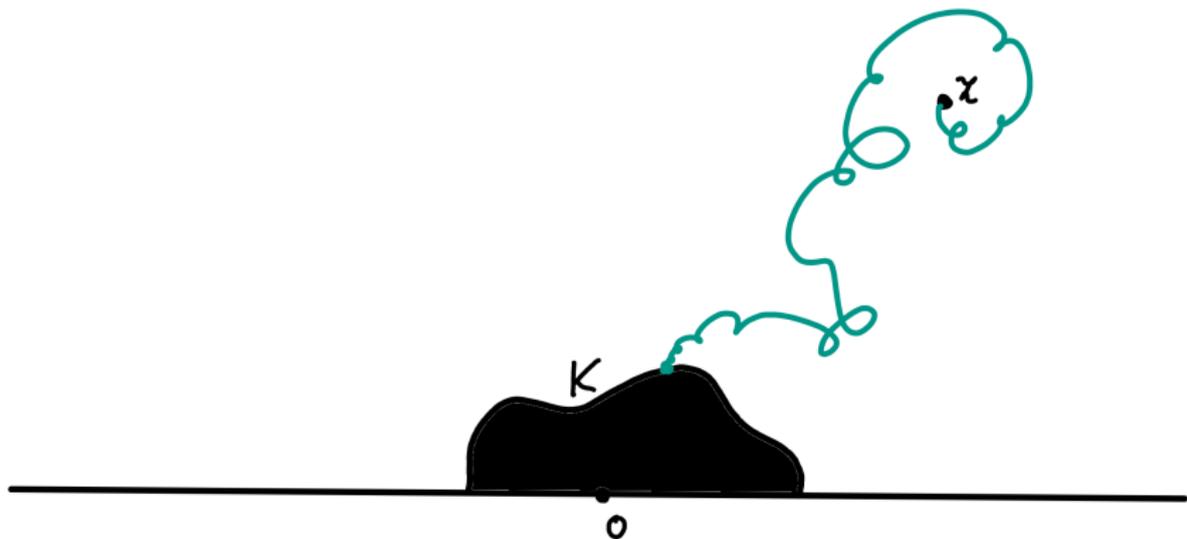
- ③ Si de plus  $K \subset \overline{\mathbb{D}}$ , alors

$$\operatorname{hcap}(K) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}} [\operatorname{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] \sin(\theta) d\theta. \quad (6)$$

*Démonstration.* 1. La fonction  $v(z) = \operatorname{Im}(z - g_K(z))$  est une fonction harmonique sur  $\mathbb{H} \setminus K$ , en tant que partie imaginaire d'une fonction holomorphe. De plus, par (4),  $v(z)$  est bornée. Donc  $v(B_t)$  est une martingale bornée, et par théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}_z[v(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = \operatorname{Im}(z - g_K(z)).$$

Comme  $\operatorname{Im}(g_K(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})) = 0$ , on obtient (5).



2. Par (4), on a

$$g_K(iy) = iy - i \frac{\text{hcap}(K)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

En combinant avec (5), on obtient

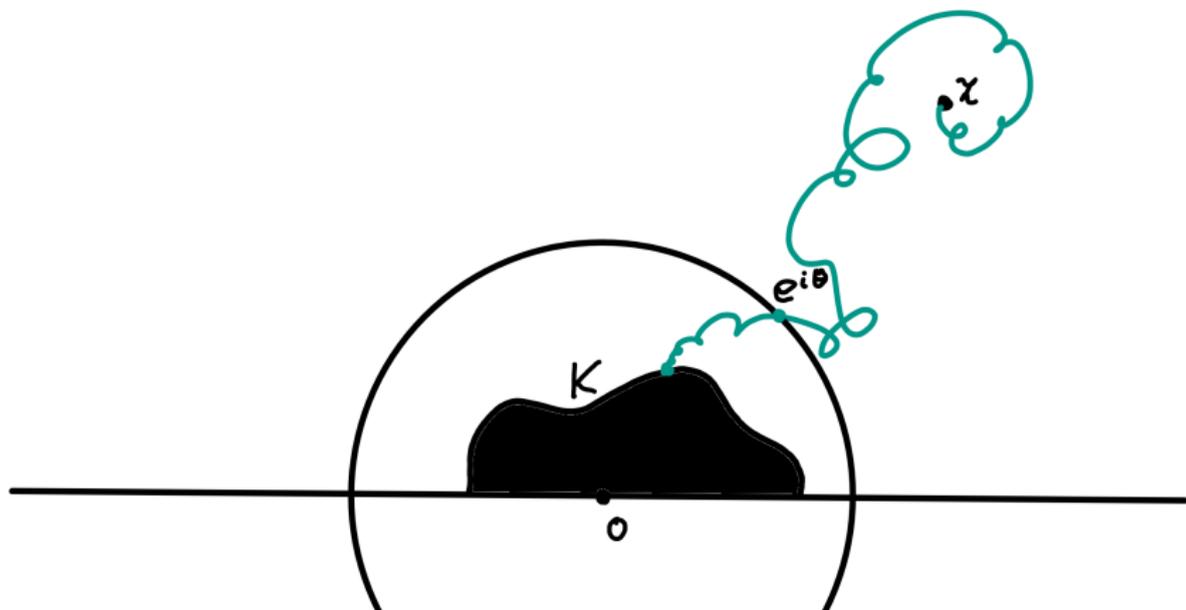
$$\mathbb{E}_{iy} [\text{Im} (B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = \frac{\text{hcap}(K)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

3. Rappelons que  $P_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}}$  désigne le noyau de Poisson sur  $\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}$ . Comme  $K \subset \mathbb{D}$ , par propriété de Markov forte, on a pour  $y > 1$ :

$$y \mathbb{E}_{iy} [\operatorname{Im} (B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = y \int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}} [\operatorname{Im} (B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] P_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}}(iy, e^{i\theta}) d\theta.$$

En effet, pour arriver sur  $K$  avant de toucher sur  $\mathbb{R}$ , le mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  doit d'abord passer par le demi-cercle  $\{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq \pi\}$ . On conclut en appliquant le développement asymptotique

$$P_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) = \frac{2 \sin(\theta) \operatorname{Im}(z)}{\pi |z|^2} (1 + O(|z|^{-1})).$$



L'identité (6), le scaling de  $\text{hcap}(K)$  par dilatations (Proposition 11), ainsi que la Proposition 12 impliquent immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 4.** Pour toute enveloppe  $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ ,  $\text{hcap}(K) \geq 0$ . De plus,  $\text{hcap}(K) = 0$  si et seulement si  $K \subset \mathbb{R}$ . Si  $K$  et  $K'$  sont deux enveloppes tel que  $K \subset K'$ , alors  $\text{hcap}(K) \leq \text{hcap}(K')$ . De plus,  $\text{hcap}(K) = \text{hcap}(K')$  si et seulement si  $K' \subset K \cup \mathbb{R}$ .

Ainsi, la capacité de demi-plan est une manière de mesurer la taille d'une enveloppe  $K$  vue depuis l'infini  $+i\infty$ .

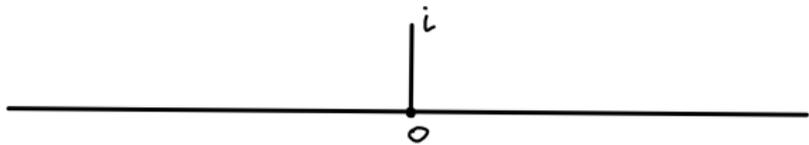
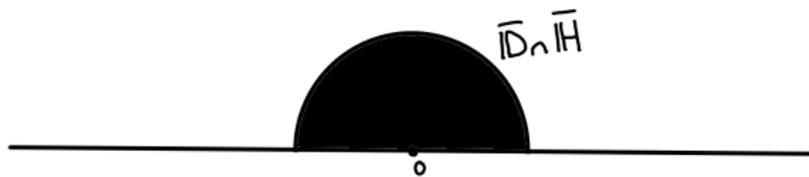
Voici deux exemples simples où la valeur de  $\text{hcap}$  est connue explicitement.

Le demi-disque: Si  $K = \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}$ , alors  $g_K(z) = z + z^{-1}$ , et donc  $\text{hcap}(K) = 1$ .

Le segment vertical: Si  $K = \{iy \mid 0 \leq y \leq 1\}$ , alors

$$g_K(z) = \sqrt{z^2 + 1} = z + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

et donc  $\text{hcap}(K) = 1/2$ .

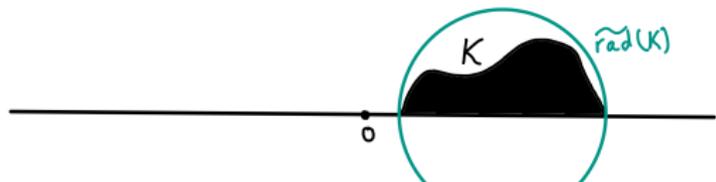
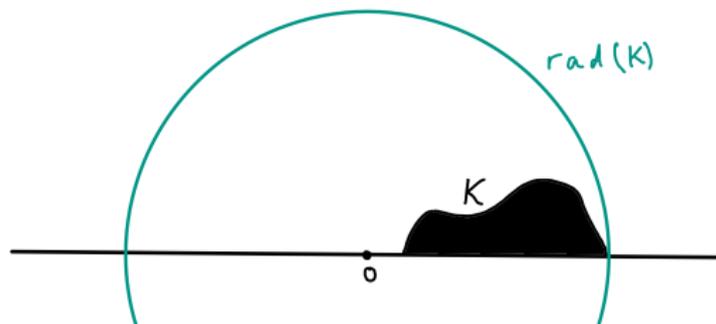


### 4.1.3. Deux estimées

Étant donnée une enveloppe  $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ , nous allons noter

$$\text{rad}(K) = \max\{|z| \mid z \in K\}, \quad \widetilde{\text{rad}}(K) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \text{rad}(K - x).$$

Dans cette section nous allons montrer deux estimées portant sur  $g_K$ . La première estimée vise à borner la distance  $|g_K(z) - z|$ . Notons que la transformation  $g_K$  se prolonge continument à  $\overline{\mathbb{H}} \setminus K$ . Ceci est dû au principe de prolongement des transformations conformes au bord.



**Proposition 14.** Soit une enveloppe  $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ . Alors pour tout  $x > \text{rad}(K)$ ,

$$g_K(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \pi y \left[ \frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy} (B_{T_{\mathbb{R} \cup K}} \in [x, +\infty)) \right],$$

où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien sur  $\mathbb{C}$ . De manière symétrique, pour tout  $x < -\text{rad}(K)$ ,

$$g_K(x) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \pi y \left[ \frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy} (B_{T_{\mathbb{R} \cup K}} \in (-\infty, x]) \right].$$

*Démonstration.* Considérons d'abord  $\mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [x, +\infty))$ , c.à.d. on ne prends pas  $K$  en compte. D'après l'expression du noyau de Poisson dans  $\mathbb{H}$ ,

$$\frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [x, +\infty)) = \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [0, x]) = \int_0^x \frac{y}{\pi(y^2 + a^2)} da.$$

D'où

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \pi y \left[ \frac{1}{2} - \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [x, +\infty)) \right] = x. \quad (7)$$

Décomposons maintenant  $g_K$  en partie réelle et partie imaginaire:  $g_K = u_K + iv_K$ . Par invariance conforme du mouvement brownien plan (Proposition 9), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{iy}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}} \in [x, +\infty)) &= \mathbb{P}_{g_K(iy)}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [g_K(x), +\infty)) \\ &= \mathbb{P}_{iv_K(iy)}(B_{T_{\mathbb{R}}} \in [g_K(x) - u_K(iy), +\infty)). \end{aligned}$$

Or, lorsque  $y \rightarrow +\infty$ ,  $g_K(iy) = iy - i \operatorname{hcap}(K)y^{-1} + O(y^{-2})$ . En particulier,  $v_K(iy) \sim y$  et  $u_K(iy) = O(y^{-2})$ . On conclut donc par (7).

**Proposition 15** (Première estimée.) Soit une enveloppe  $K \subset \overline{\mathbb{H}}$ . On a:

- ① Si  $\text{rad}(K) \leq 1$ , alors pour tout  $x > 1$ ,

$$x \leq g_K(x) \leq x + \frac{1}{x},$$

et pour tout  $x < -1$ ,

$$x + \frac{1}{x} \leq g_K(x) \leq x.$$

- ② Pour tout  $z \in \mathbb{H} \setminus K$ ,

$$|g_K(z) - z| \leq 3\widetilde{\text{rad}}(K).$$

*Démonstration.* 1. Soit  $x > 1$ , le cas  $x < -1$  étant symétrique. La Proposition 14 implique que  $g_K(x)$  est monotone croissant par rapport à  $K$ . Ainsi,  $g_K(x)$  est minimisé lorsque  $K \subset [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ , et alors  $g_K(x) = x$ . D'autre part, sous la contrainte  $\text{rad}(K) \leq 1$ ,  $g_K(x)$  est maximisé lorsque  $K = \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}$ . Or  $g_{\overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}}(x) = x + x^{-1}$ .

2. Montrons d'abord que pour tout  $z \in \mathbb{H} \setminus K$ ,  $|g_K(z) - z| \leq 3 \operatorname{rad}(K)$   
Ensuite, on utilise que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|g_K(z) - z| = |g_{K-x}(z-x) - (z-x)|$$

et on optimise par rapport à  $x$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\operatorname{rad}(K) = 1$ . En effet,

$$|g_K(z) - z| = \operatorname{rad}(K) |g_{\operatorname{rad}(K)^{-1}K}(\operatorname{rad}(K)^{-1}z) - \operatorname{rad}(K)^{-1}z|.$$

On considère sur  $\mathbb{H} \setminus K$  la fonction  $f(z) = |g_K(z) - z|$ . Alors la fonction  $\log f$  est harmonique sur

$$\{z \in \mathbb{H} \setminus K \mid f(z) > 0\}.$$

Donc, par principe du maximum,  $f$  n'atteint pas son suprémum sur  $\mathbb{H} \setminus K$ , à moins d'être constante. De plus, par (4),  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$ . Donc,

$$\sup_{\mathbb{H} \setminus K} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \setminus K \\ d(z, \partial(\mathbb{H} \setminus K)) < \varepsilon}} f(z).$$

Or, d'après 1., pour tout  $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ,  
 $|g_K(x) - x| \leq |x|^{-1} \leq 1$ . De plus, les valeurs d'adhérence de  $g_K(z)$   
 lorsque  $d(z, \partial(\mathbb{H} \setminus K) \cap \overline{\mathbb{D}}) \rightarrow 0$ , sont contenues dans l'intervalle réel  
 $[g_K((-1)^-), g_K(1^+)]$ . Or, d'après 1.,

$$[g_K((-1)^-), g_K(1^+)] \subset [-2, 2].$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{z \in \mathbb{H} \setminus K \\ d(z, \partial(\mathbb{H} \setminus K) \cap \overline{\mathbb{D}}) < \varepsilon}} f(z) \leq 2 + 1 = 3.$$

Donc  $\sup_{\mathbb{H} \setminus K} f \leq 3$ , ce qui conclut.

La deuxième estimée vise à borner de manière plus précise l'erreur en  $O(|z|^{-2})$  dans le développement asymptotique (4):

$$g_K(z) = z + \frac{\text{hcap}(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

**Lemme 24.** Soient  $R' > R > 0$ . Soit  $f$  une fonction harmonique réelle sur le disque  $R'\mathbb{D}$ . Alors

$$\|(\nabla f)(0)\|_2 \leq C \frac{1}{R} \sup_{R\partial\mathbb{D}} |f|,$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de  $(R, R')$ .

*Démonstration.* Comme  $f$  est harmonique, pour tout  $z \in R\mathbb{D}$ ,

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) P_{\mathbb{D}}(R^{-1}z, e^{i\theta}) d\theta,$$

où  $P_{\mathbb{D}}$  est le noyau de Poisson sur le disque unité  $\mathbb{D}$ . D'où

$$(\nabla f)(z) = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \nabla_1 P_{\mathbb{D}}(R^{-1}z, e^{i\theta}) d\theta,$$

où  $\nabla_1 P_{\mathbb{D}}$  désigne le gradient de  $P_{\mathbb{D}}$  par rapport à la première variable. Ceci conclut.

**Proposition 16.**(Deuxième estimée.) Il existe une constante  $c > 0$  tel que pour toute enveloppe  $K \subset \overline{\mathbb{H}}$  et tout  $z \in \mathbb{H} \setminus K$  avec  $|z| \geq 2 \operatorname{rad}(K)$ ,

$$\left| g_K(z) - z - \frac{\operatorname{hcap}(K)}{z} \right| \leq c \frac{\operatorname{rad}(K) \operatorname{hcap}(K)}{|z|^2}.$$

*Démonstration.* Par dilatation, on peut supposer que  $\text{rad}(K) = 1$ . Soit la fonction

$$h(z) = g_K(z) - z - \frac{\text{hcap}(K)}{z},$$

qui est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{H} \setminus K$ . Soit  $v(z) = \text{Im}(h(z))$ . Soit  $z \in \mathbb{H} \setminus K$ . D'après (5),

$$\text{Im}(g_K(z) - z) = -\mathbb{E}_z [\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] = -\int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}} [\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] P_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) d\theta.$$

En utilisant le développement asymptotique pour  $P_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{D}}(z, e^{i\theta})$ , on obtient que

$$\text{Im}(g_K(z) - z) = -\frac{2 \text{Im}(z)}{\pi |z|^2} \int_0^\pi \mathbb{E}_{e^{i\theta}} [\text{Im}(B_{T_{\mathbb{R} \cup K}})] \sin(\theta) (1 + O(|z|^{-1})) d\theta.$$

En combinant avec (6), on obtient que pour tout  $z \in \mathbb{H} \setminus (3/2\mathbb{D})$ ,

$$|v(z)| \leq C \frac{\text{hcap}(K) \text{Im}(z)}{|z|^3}$$

pour une constante  $C > 0$ .

Avec le Lemme 24, on obtient que pour tout  $z \in \mathbb{H} \setminus (2\mathbb{D})$ ,

$$\|(\nabla v)(z)\|_2 \leq C' \frac{\text{hcap}(K)}{|z|^3}.$$

Or  $\|(\nabla v)(z)\|_2 = |h'(z)|$ . Ainsi on a une borne sur  $|h'|$ . Soit  $y \geq 2$ . Comme  $\lim_{\infty} h = 0$ , on a

$$h(iy) = -i \int_y^{+\infty} h'(ia) da.$$

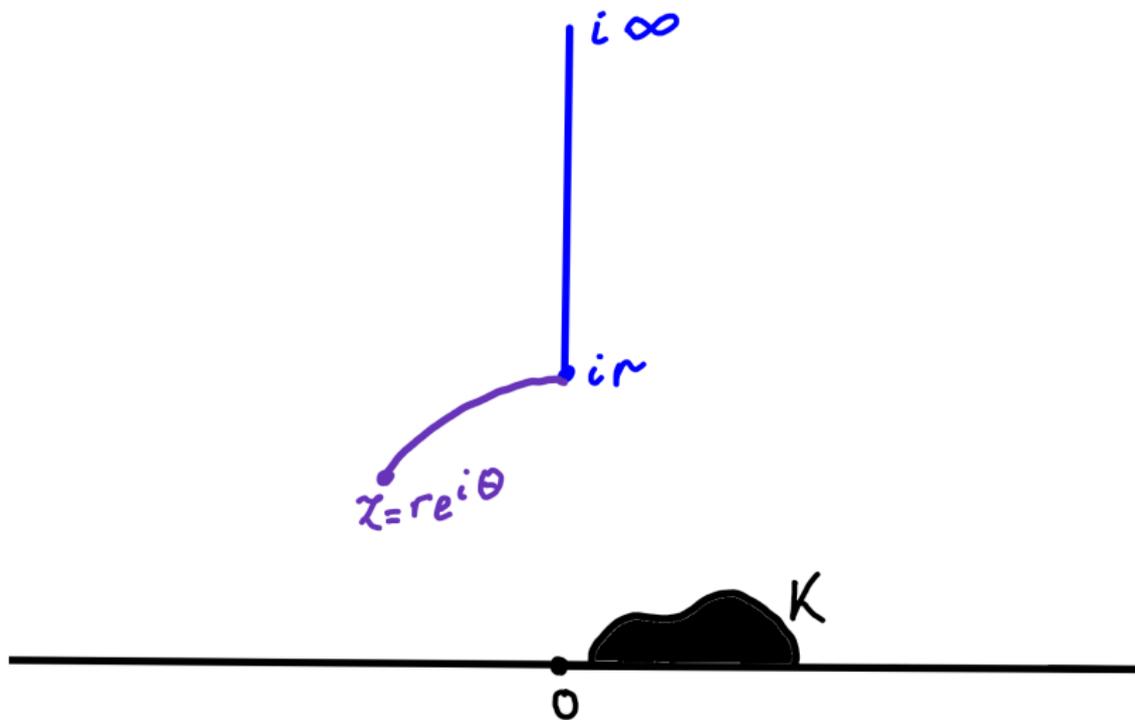
D'où

$$|h(iy)| \leq C'' \frac{\text{hcap}(K)}{y^2}.$$

De manière similaire, pour  $z = re^{i\theta}$  avec  $r \geq 2$ , on intègre  $h'$  le long de l'arc de cercle joignant  $ir$  et  $re^{i\theta}$ , et on obtient

$$|h(re^{i\theta})| \leq |h(ir)| + C''' \frac{\text{hcap}(K)}{r^2}.$$

Ceci conclut la preuve.



## 4.1.4. Famille d'enveloppes à croissance locale et équation de Loewner

Dans cette section nous allons faire croître des enveloppes  $K_t$  dans le demi-plan de manière continue et déduire l'équation différentielle, due à Loewner, satisfaite par  $g_{K_t}$ .

**Définition 13.** Soit une famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  dans  $\overline{\mathbb{H}}$  tel que pour tous  $t \geq s \geq 0$ ,  $K_s \subset K_t$ . On dit que  $(K_t)_{t \geq 0}$  satisfait la *propriété de croissance locale* si pour tout  $T > 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [0, T]} \widetilde{\text{rad}}(g_{K_t}(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)) = 0.$$

**Lemme 25.** Si la famille croissante d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  satisfait la propriété de croissance locale, alors la fonction  $t \mapsto \text{hcap}(K_t)$  est continue (et croissante) sur  $[0, +\infty)$ .

*Démonstration.* La croissance de  $\text{hcap}(K_t)$  est due à la croissance de  $K_t$  pour l'inclusion. D'après la Proposition 12, pour  $t > s \geq 0$ ,

$$\text{hcap}(K_t) = \text{hcap}(K_s) + \text{hcap}(g_{K_s}(K_t)).$$

Or

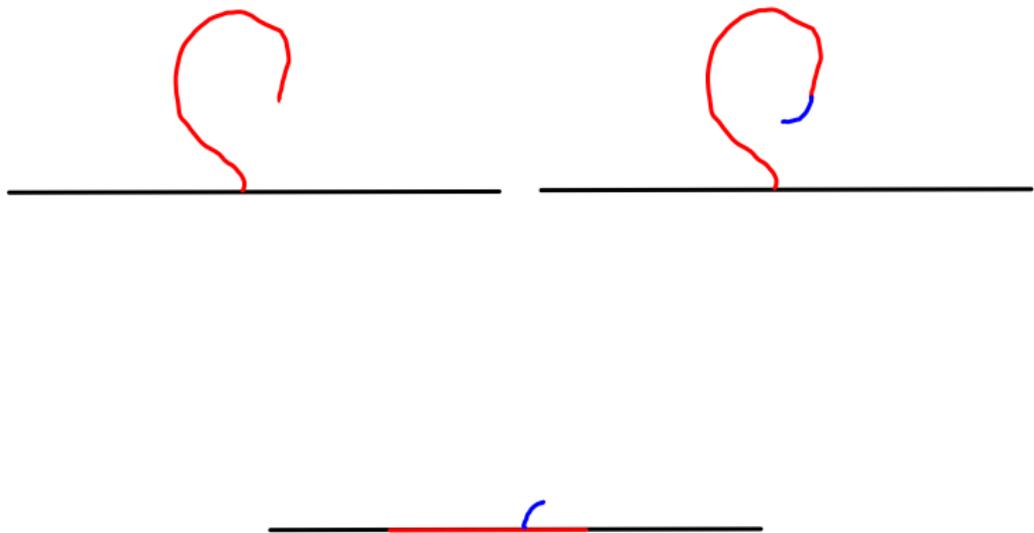
$$\begin{aligned} \text{hcap}(g_{K_s}(K_t)) &= \text{hcap}(g_{K_s}(K_t \setminus K_s)) \\ &\leq \widetilde{\text{rad}}(g_{K_s}(K_t \setminus K_s))^2 \text{hcap}(\overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{H}}) = \widetilde{\text{rad}}(g_{K_s}(K_t \setminus K_s))^2. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la propriété de croissance locale.

Avant de continuer, donnons des exemples de famille d'enveloppes à croissance locale. L'énoncé suivant est donné sans démonstration, qui reposerait sur l'estimée de Beurling.

**Proposition 17.** 1. Soit  $(\gamma(t))_{t \geq 0}$  une courbe continue simple dans  $\overline{\mathbb{H}}$ , c.à.d. l'application  $t \mapsto \gamma(t)$  est continue injective. On suppose de plus que  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t > 0$ ,  $\gamma(t) \in \mathbb{H}$ . Soit  $K_t$  l'enveloppe  $\gamma([0, t])$  (trace de la courbe jusqu'au temps  $t$ ). Alors la famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  vérifie la propriété de croissance locale, et de plus  $\text{hcap}(K_t)$  est strictement croissante.

Exemple de famille d'enveloppes à croissance locale.

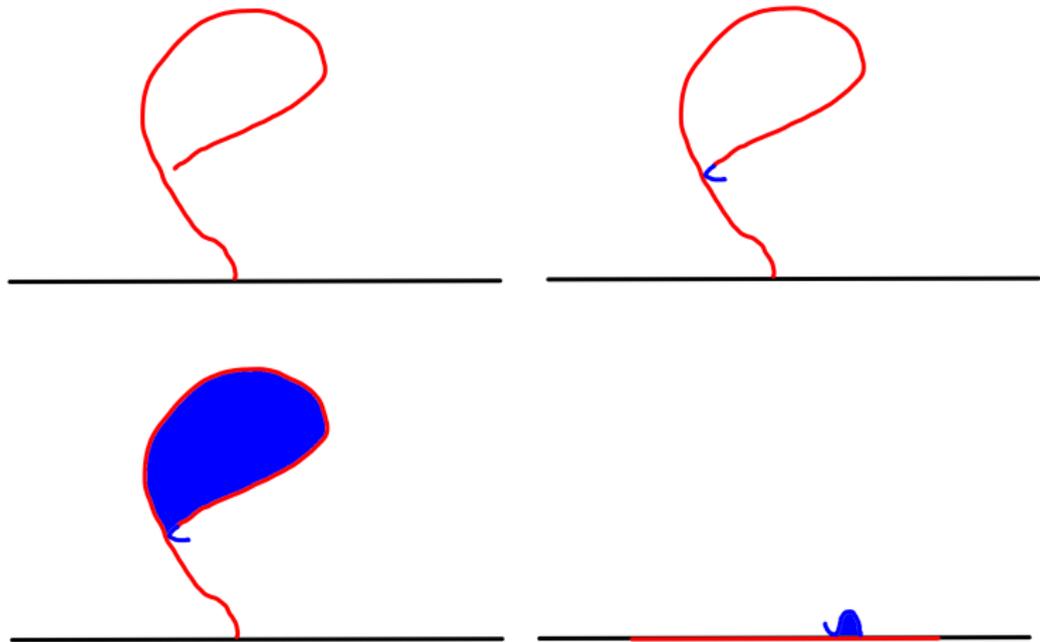


2. Plus généralement, soit  $(\gamma(t))_{t \geq 0}$  une courbe continue dans  $\overline{\mathbb{H}}$ , sans hypothèse de simplicité. On suppose que  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(t)$  étant autorisée de revenir vers  $\mathbb{R}$  pour  $t > 0$ . On dénote par  $K_t$  le complémentaire dans  $\overline{\mathbb{H}}$  de l'unique composante connexe non-bornée de  $\overline{\mathbb{H}} \setminus \gamma([0, t])$ . En d'autres termes,  $K_t$  est obtenue en prenant la courbe  $\gamma([0, t])$  et en remplissant les régions renfermées par  $\gamma([0, t])$ , et  $K_t$  est une enveloppe par construction. On suppose que pour tout  $s \geq 0$ , la mesure de Lebesgue de l'ensemble des temps

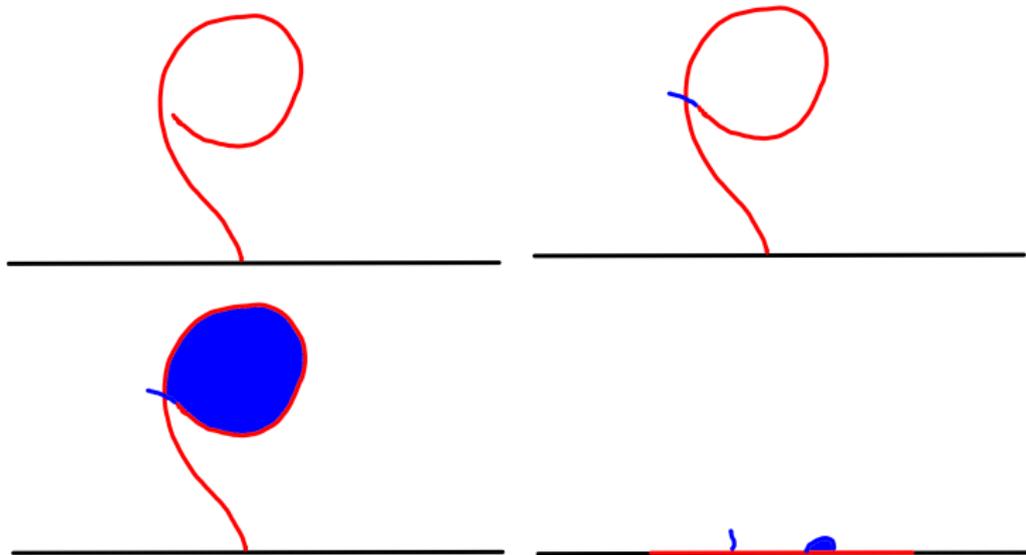
$$\{t \geq 0 \mid \gamma(t) \in K_s\}.$$

est nulle. On suppose de plus que pour tout  $t > 0$ , et pour tous  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$  assez petits,  $\gamma(t - \varepsilon)$  et  $\gamma(t + \varepsilon')$  peuvent être joints par un chemin dans  $\overline{\mathbb{H}} \setminus K_{t-\varepsilon}$  dont longueur tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \vee \varepsilon' \rightarrow 0$ . Dans des termes plus intuitifs, cela signifie que la courbe est autorisée de "rebondir" sur elle-même mais pas de se couper transversalement. Alors la famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  vérifie la propriété de croissance locale, et de plus  $\text{hcap}(K_t)$  est strictement croissante.

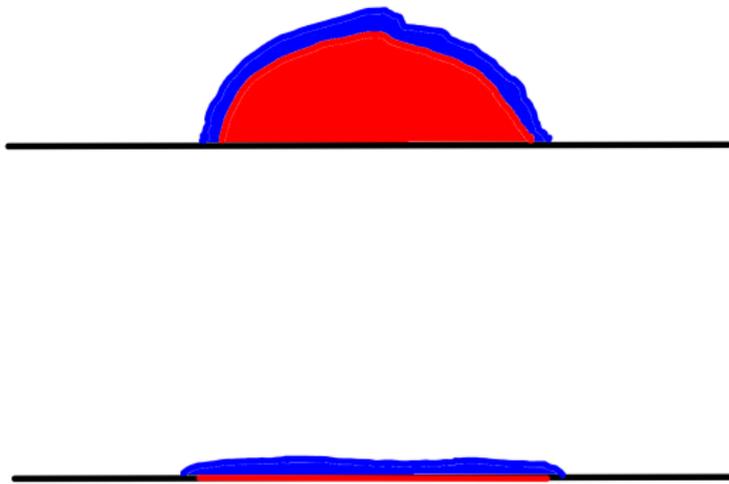
Exemple de famille d'enveloppes à croissance locale.



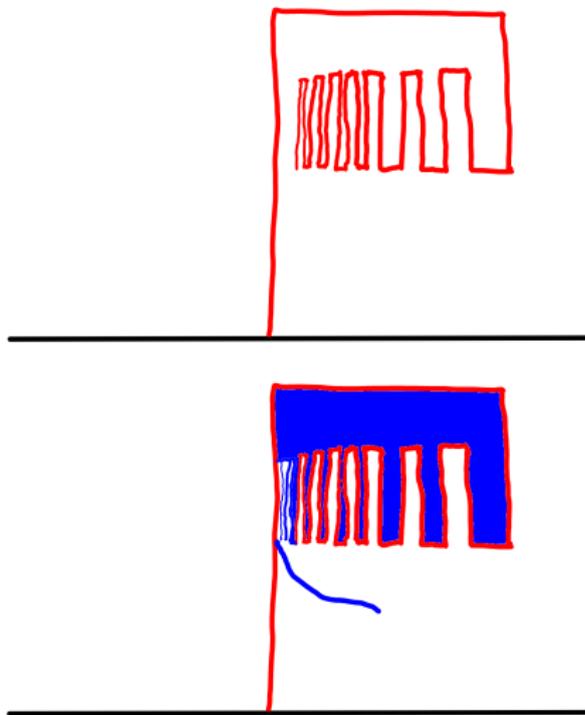
Exemple de famille d'enveloppes à croissance **non**-locale.



Exemple de famille d'enveloppes à croissance **non**-locale.



Il est à noter qu'une famille d'enveloppes à croissance locale n'est pas forcément engendrée par une courbe comme dans Proposition 17. Voir le contre-exemple plus bas.



Dans la suite, nous allons considérer une famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  vérifiant les propriétés suivantes:

- 1 La famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  est à croissance locale.
- 2 Le compact  $K_0$  est un point (singleton) dans  $\mathbb{R}$ .
- 3 Pour tous  $t > s \geq 0$ ,  $K_t \setminus (K_s \cup \mathbb{R}) \neq \emptyset$ .
- 4 Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\text{hcap}(K_t) \rightarrow +\infty$ .

La condition 1. implique que  $t \mapsto \text{hcap}(K_t)$  est continue (Lemme 25), la condition 2. que  $\text{hcap}(K_0) = 0$ , et la condition 3. que  $t \mapsto \text{hcap}(K_t)$  est strictement croissante. On peut donc, quitte à faire un changement de temps, supposer que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\text{hcap}(K_t) = 2t. \quad (8)$$

En effet, si ce n'est pas le cas, on fait le changement de temps

$$ds = \frac{1}{2} \text{hcap}(K_t) dt.$$

Dans la suite nous allons donc adopter la convention (8), et nous allons utiliser la notation  $g_t$  pour  $g_{K_t}$ .

Pour  $t \geq 0$ , considérons l'intersection

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{g_t(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)}.$$

Comme c'est une intersection monotone de compacts et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\overline{g_t(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)}$  est non-vide, on obtient que l'intersection est elle-même non-vide. De plus, la propriété de croissance locale implique qu'elle a un diamètre nul, donc est réduite à un point. Notons par  $\xi_t$  ce point, de sorte que

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{g_t(K_{t+\varepsilon} \setminus K_t)} = \{\xi_t\}.$$

Notons que par construction,  $\xi_t \in \mathbb{R}$ .

**Définition 14.** La fonction  $t \mapsto \xi_t$  est appelée *fonction pilote* (*driving function* en anglais) de la famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$ .

Dans la suite, pour  $s > t \geq 0$ , nous allons utiliser la notation

$$K_{t,s} = \overline{g_t(K_s \setminus K_t)}.$$

Notons que  $K_{t,s}$  est une enveloppe dans  $\overline{\mathbb{H}}$ .

**Proposition 18.** La fonction pilote  $t \mapsto \xi_t$  est continue sur  $[0, +\infty)$ .

*Démonstration.* Soient  $t \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $z_0$  un point dans  $\widetilde{g_t(K_{t+2\varepsilon} \setminus (K_{t+\varepsilon} \cup \mathbb{R}))}$ . On a  $|z_0 - \xi_t| \leq 2\text{rad}(K_{t,t+2\varepsilon})$ . Soit  $z_1 = g_{t+\varepsilon} \circ g_t^{-1}(z_0)$ . Alors  $z_1 \in \widetilde{g_{t+\varepsilon}(K_{t+2\varepsilon} \setminus (K_{t+\varepsilon} \cup \mathbb{R}))}$ , et donc  $|z_1 - \xi_{t+\varepsilon}| \leq 2\text{rad}(K_{t+\varepsilon,t+2\varepsilon})$ . Mais d'après la Proposition 15,  $|z_1 - z_0| \leq 3\text{rad}(K_{t,t+\varepsilon})$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |\xi_{t+\varepsilon} - \xi_t| &\leq |\xi_{t+\varepsilon} - z_1| + |z_1 - z_0| + |z_0 - \xi_t| \\ &\leq 2\widetilde{\text{rad}}(K_{t+\varepsilon,t+2\varepsilon}) + 3\widetilde{\text{rad}}(K_{t,t+\varepsilon}) + 2\widetilde{\text{rad}}(K_{t,t+2\varepsilon}). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la propriété de croissance locale.

Dans la suite nous présentons l'équation différentielle de Loewner qui relie l'évolution temporelle de  $g_t$ , et donc de  $K_t$ , à la fonction pilote  $\xi_t$ .

**Théorème 9** (Loewner). Pour tous  $t \geq 0$  et  $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$ ,

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \xi_t}. \quad (9)$$

*Démonstration.* Soient  $t_2 > t_1 \geq 0$ . Notons

$$\widehat{K}_{t_1, t_2} = K_{t_1, t_2} - \xi_{t_1}, \quad \widehat{g}_{t_1, t_2}(w) = g_{t_2} \circ g_{t_1}^{-1}(w + \xi_{t_1}) - \xi_{t_1} = g_{\widehat{K}_{t_1, t_2}}(w).$$

D'après la Proposition 12,

$$\text{hcap}(\widehat{K}_{t_1, t_2}) = \text{hcap}(K_{t_1, t_2}) = 2(t_2 - t_1).$$

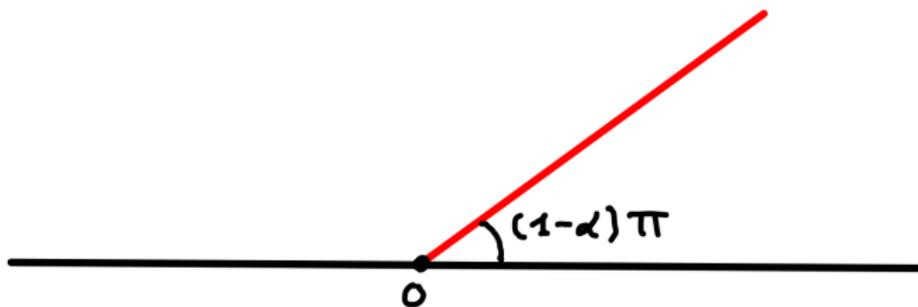
Soit  $z \in \mathbb{H} \setminus K_{t_2}$ . D'après la Proposition 16 appliqué à  $\widehat{g}_{t_1, t_2}$ ,

$$\left| g_{t_2}(z) - g_{t_1}(z) - \frac{2(t_2 - t_1)}{g_{t_1}(z) - \xi_{t_1}} \right| \leq 2c \frac{\text{rad}(\widehat{K}_{t_1, t_2})(t_2 - t_1)}{|g_{t_1}(z) - \xi_{t_1}|^2},$$

pourvu que  $|g_{t_1}(z) - \xi_{t_1}| \geq 2 \text{rad}(\widehat{K}_{t_1, t_2})$ . Mais  $\text{rad}(\widehat{K}_{t_1, t_2}) \leq 2\widetilde{\text{rad}}(K_{t_1, t_2})$ .  
On conclut avec la propriété de croissance locale.

Ainsi, d'après l'équation de Loewner 9, la famille de transformations conformes  $(g_t)_{t \geq 0}$  est le flot de solutions de l'équation différentielle ordinaire (non-autonome).

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{2}{z(t) - \xi_t}.$$



**Exemple.** Soit  $\alpha \in (0, 1)$ . On considère la courbe qui décrit une demi-droite d'angle  $(1 - \alpha)\pi$ :  $\gamma(t) = r(t)e^{i(1-\alpha)\pi}$ . Donc  $K_t = \gamma([0, t])$ .

On suppose qu'on a une paramétrisation par la capacité de demi-plan:  
 $\text{hcap}(K_t) = 2t$ . Par changement d'échelle (Proposition 11),

$$2t = \text{hcap}(K_t) = 2t_\alpha r(t)^2,$$

où  $2t_\alpha$  est la capacité de demi-plan du segment de longueur 1 et d'angle  $(1 - \alpha)\pi$ . C'est à dire,

$$r(t) = \sqrt{\frac{t}{t_\alpha}}.$$

Par invariance d'échelle de la demi-droite, on a que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $t \geq 0$  et  $z \in \mathbb{H} \setminus K_t$ ,  $g_{\lambda^2 t}(z) = \lambda g_t(z/\lambda)$ , et  $\xi_{\lambda^2 t} = \lambda \xi_t$ . Ceci implique en particulier que

$$g_t(z) = \sqrt{t} g_1(z/\sqrt{t}), \quad \xi_t = c_\alpha \sqrt{t},$$

où  $c_\alpha = \xi_1$  est une constante réelle.

Ainsi, d'une part

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{1}{2\sqrt{t}} g_1(z/\sqrt{t}) - \frac{z}{2t} g_1'(z/\sqrt{t}).$$

D'autre part, avec l'équation de Loewner on a que

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{\sqrt{t}(g_1(z/\sqrt{t}) - c_\alpha)}.$$

On aboutit ainsi à l'équation différentielle suivante pour  $g_1$ :

$$g_1'(z) = \frac{1}{z} \frac{g_1(z)^2 - c_\alpha g_1(z) - 4}{g_1(z) - c_\alpha}.$$

En fait on aboutit à une équation différentielle plus simple en considérant  $f = g_1^{-1}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \log f(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z - c_\alpha}{z^2 - c_\alpha z - 4} \\ &= -\frac{r^-}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} \frac{1}{z - r^+} + \frac{r^+}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} \frac{1}{z - r^-},\end{aligned}$$

avec  $r^\pm = (c_\alpha \pm \sqrt{c_\alpha^2 + 16})/2$  (on a séparé les pôles). D'où

$$f(z) = C(z - r_+)^{1-\theta}(z - r_-)^\theta, \quad \text{avec } \theta = \frac{r^+}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c_\alpha}{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}} \right).$$

Avec la normalisation de  $g_1$  à  $\infty$ , on obtient que forcément  $C = 1$ . La fonction  $f$  doit réaliser une transformation conforme de  $\mathbb{H}$  vers  $\mathbb{H} \setminus K_1$ . Or,  $f(\mathbb{H})$  est le demi-plan supérieur privé d'un segment d'angle  $(1 - \theta)\pi$  et de longueur  $\sqrt{c_\alpha^2 + 16}/2$ . D'où,

$$\alpha = \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{t_\alpha}} = \frac{\sqrt{c_\alpha^2 + 16}}{2}.$$

Finalement, on trouve

$$c_\alpha = \frac{2(2\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}}, \quad t_\alpha = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{4\alpha^{2\alpha}(1 - \alpha)^{2(1 - \alpha)}}.$$

Dans le cas particulier d'un demi-droite verticale ( $\alpha = 1/2$ ), on trouve que  $c_{1/2} = 0$ , et donc  $\xi_t \equiv 0$  et

$$g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t}.$$

Dans l'exemple précédent, pour une demi-droite allant vers la gauche ( $\alpha \in (0, 1/2)$ ), on a  $c_\alpha < 0$ , et pour une demi-droite vers la droite ( $\alpha \in (1/2, 1)$ ), on a  $c_\alpha > 0$ . L'heuristique générale est lorsque  $\xi_t$  augmente, l'enveloppe tourne vers la droite, et lorsque  $\xi_t$  diminue, l'enveloppe tourne vers la gauche. L'image est vraiment celle d'un volant ( $\xi_t$ ) guidant un véhicule ( $K_t$ ). D'où le nom de *fonction pilote*.

## 4.1.5. Familles croissantes d'enveloppes à partir de fonctions pilotes

Nous avons vu que si on a une famille d'enveloppes du demi-plan avec une propriété de croissance locale, alors lui est associée une fonction pilote qui décrit l'évolution des transformations conformes  $g_t$  à travers l'équation différentielle de Loewner (9). Mais pour la théorie des processus SLE, ce qui va nous intéresser c'est surtout le point de vue inverse: en partant d'un fonction pilote générer une famille croissante d'enveloppes. Nous expliquons cela dans cette section.

**Théorème 10** (Loewner). Soit  $t \mapsto \xi_t$  une fonction continue  $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors il existe une unique famille croissante d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  vérifiant l'équation de Loewner (9)

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \xi_t},$$

et tel que  $K_0 = \{\xi_0\}$ . De plus, cette famille d'enveloppes est à croissance locale, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\text{hcap}(K_t) = 2t$ , et  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  est sa fonction pilote.

Pour des raisons techniques, nous allons aussi considérer le demi-plan inférieur, pas seulement le demi-plan supérieur. Notons

$$\mathcal{D} = \{(t, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{C} \mid z \neq \xi_t\},$$

Le sous-ensemble  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $[0, +\infty) \times \mathbb{C}$ . Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathcal{D}$  par

$$F(t, z) = \frac{2}{z - \xi_t}.$$

On considère l'EDO

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(t, z(t)) = \frac{2}{z(t) - \xi_t}. \quad (10)$$

La fonction  $F$  est continue sur  $\mathcal{D}$  et est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable  $z$ . Donc la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'EDO (10). Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$ , il existe une unique solution maximale de (10) issue de  $z$  à  $t = 0$ . On note par  $[0, T^{\max}(z))$  son intervalle de définition (avec  $T^{\max}(z) \in (0, +\infty]$ ) et on dénote par  $t \mapsto g_t(z)$  cette solution. Par convention, on pose  $T^{\max}(\xi_0) = 0$ .

Remarquons que pour tout  $(z, t) \in \mathcal{D}$ ,  $F(t, \bar{z}) = \overline{F(t, z)}$ . Donc, par Cauchy-Lipschitz, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$ ,  $T^{\max}(\bar{z}) = \overline{T^{\max}(z)}$  et  $g_t(\bar{z}) = \overline{g_t(z)}$ .

Notons pour  $t \geq 0$ ,

$$\widehat{K}_t = \{z \in \mathbb{C} \mid T^{\max}(z) \leq t\}.$$

Cauchy-Lipschitz assure que  $\widehat{K}_t$  est un fermé de  $\mathbb{C}$ . Par construction,  $\widehat{K}_0 = \{\xi_0\}$  et la famille  $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$  est croissante par inclusion. Par ce qui précède, les fermés  $\widehat{K}_t$  sont symétriques par réflexion d'axe  $\mathbb{R}$  (i.e. invariants par conjugaison complexe). Notons

$$K_t = \widehat{K}_t \cap \overline{\mathbb{H}}.$$

**Lemme 26.** Pour tout  $z \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_0\}$ , et  $t < T^{\max}(z)$ ,  $g_t(z) \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $z \in \mathbb{H}$  et  $t < T^{\max}(z)$ ,  $g_t(z) \in \mathbb{H}$ .

*Démonstration.* Le premier point découle du fait que pour tout  $(z, t) \in \mathcal{D}$  tel que  $z \in \mathbb{R}$ , on a  $F(z, t) \in \mathbb{R}$ . Plus généralement si  $(z, t_0) \in \mathcal{D}$  et  $z \in \mathbb{R}$ , alors la solution de (10) issue de  $z$  au temps  $t_0$  est réelle. Maintenant soit  $z \in \mathbb{H}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $t < T^{\max}(z)$  tel que  $g_t(z) \notin \mathbb{H}$ . Alors la solution issue de  $z$  doit nécessairement traverser la droite  $\mathbb{R}$ . Soit

$$t_0 = \min\{t \in [0, T^{\max}(z) \mid g_t(z) \in \mathbb{R}\}.$$

On a  $t_0 > 0$  et pour tout  $t \in [0, t_0)$ ,  $g_t(z) \in \mathbb{H}$ . La fonction  $s \mapsto g_{t_0-s}(z)$  est solution de l'EDO

$$\frac{d\tilde{z}(s)}{ds} = -F(t_0 - s, \tilde{z}(s)). \quad (11)$$

Cette dernière vérifie aussi Cauchy-Lipschitz, donc la solution issue d'une condition initiale est unique. Or, comme  $\tilde{z}(0) = g_{t_0}(z) \in \mathbb{R}$ , le solution correspondante de (11) est à valeurs réelles, ce qui contredit le fait que  $g_{t_0-s}(z) \in \mathbb{H}$  pour  $s \in (0, t_0]$ .

**Lemme 27.** Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$  tel que  $T^{\max}(z) < +\infty$ , on a

$$\liminf_{\substack{t \rightarrow T^{\max}(z) \\ t < T^{\max}(z)}} |g_t(z) - \xi_t| = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi_0\}$  tel que  $T^{\max}(z) < +\infty$ . Par Cauchy-Lipschitz, lorsque  $t \rightarrow T^{\max}(z)$ ,  $(t, g_t(z))$  doit sortir de tout compact de  $\mathcal{D}$ . Donc

$$\liminf_{\substack{t \rightarrow T^{\max}(z) \\ t < T^{\max}(z)}} |g_t(z) - \xi_t| = 0 \quad \text{ou} \quad \limsup_{\substack{t \rightarrow T^{\max}(z) \\ t < T^{\max}(z)}} |g_t(z)| = +\infty.$$

Mais comme pour tout  $T > 0$ ,

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |F(t, z)| = 0,$$

la seconde option n'est pas possible.

**Lemme 28.** On note pour  $T \geq 0$ ,

$$S_T = \max_{0 \leq t \leq T} |\xi_t - \xi_0|.$$

Alors pour tout  $T \geq 0$ ,

$$\widehat{K}_T - \xi_0 \subset \sqrt{4S_T^2 + 8T} \overline{\mathbb{D}},$$

et en particulier  $\widehat{K}_T$  est compact.

*Démonstration.* On peut supposer que  $\xi_0 = 0$ , quitte à faire une translation par  $-\xi_0$ . Fixons  $T > 0$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > 2S_T$ . Soit

$$t_0 = t_0(z) = \sup\{t \in (0, T \wedge T^{\max}(z)) \mid \forall s \in [0, t), |g_s(z)| > 2S_T\}.$$

Par construction,  $t_0 \leq T$  et si  $t_0 < T$ , alors  $|g_{t_0}(z)| = 2S_T$ . On a

$$\frac{d}{dt}|g_t(z)|^2 = 2 \operatorname{Re} \left( \overline{g_t(z)} \frac{d}{dt} g_t(z) \right) = 4 \operatorname{Re} \left( \frac{\overline{g_t(z)}}{g_t(z) - \xi_t} \right).$$

En particulier, pour tout  $t \in [0, t_0)$ ,

$$\left| \frac{d}{dt}|g_t(z)|^2 \right| \leq 4 \frac{|g_t(z)|}{|g_t(z)| - S_T} \leq 8.$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} |g_t(z)|^2 \geq |z|^2 - 8t_0 \geq |z|^2 - 8T.$$

En particulier, si  $|z| > \sqrt{4S_T^2 + 8T}$ , alors  $|g_{t_0}(z)| > 2S_T$ . Dans ce cas  $t_0 = T$  et  $|g_T(z) - \xi_T| > S_T$ . En particulier,  $T^{\max}(z) > T$  et donc  $z \notin \hat{K}_T$ .

**Lemme 29.** Pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $z \mapsto g_t(z)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_t$ .

*Démonstration.* Comme  $F(t, z)$  est différentiable par rapport à  $z$  et comme le différentielle est continue en  $(t, z)$ , d'après Cauchy-Lipschitz, pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $z \mapsto g_t(z)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}_t$ . De plus, toujours par Cauchy-Lipschitz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{d}{dt} g_t(z) = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) \right) \frac{\partial}{\partial w} F(t, w = g_t(z)) \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{g_t(z)} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{w}} F(t, w = g_t(z)). \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} F(t, w) = 0,$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) \right) \frac{\partial}{\partial w} F(t, w = g_t(z)).$$

Donc le couple  $\left(g_t(z), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z)\right)$  est solutions de l'EDO

$$\frac{d}{dt}(z_1(t), z_2(t)) = \tilde{F}(t, z_1(t), z_2(t)), \quad (12)$$

où la fonction  $\tilde{F}$  est donnée par

$$\tilde{F}(t, z_1, z_2) = \left(F(t, z_1), z_2 \frac{\partial}{\partial w} F(t, w = z_1)\right).$$

De plus, à  $t = 0$  on a la condition initiale  $(z, 0)$ . Or l'EDO (12) vérifie encore Cauchy-Lipschitz, et en particulier il y a unicité de solution étant donné une condition initiale. De plus,  $t \mapsto (g_t(z), 0)$  est une solution évidente de l'EDO (12) issue à  $t = 0$  de la condition initiale  $(z, 0)$ . Par unicité de solutions, on a que pour tout  $t \in [0, T^{\max}(z))$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_t(z) = 0.$$

Ceci est équivalent aux équations de Cauchy-Riemann, ce qui conclut.

**Lemme 30.** Pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $z \mapsto g_t(z)$  induit une transformation conforme de  $\mathbb{H} \setminus K_t$  vers  $\mathbb{H}$ .

*Démonstration.* Nous savons déjà que  $g_t$  est holomorphe sur  $\mathbb{H} \setminus K_t$  et que l'image de  $\mathbb{H} \setminus K_t$  est contenue dans  $\mathbb{H}$  (preuve similaire à celle du Lemme 26). L'injectivité de  $g_t$  résulte de Cauchy-Lipschitz. Il reste à voir que  $g_t$  est surjective de  $\mathbb{H} \setminus K_t$  vers  $\mathbb{H}$ .

Nous allons utiliser le renversement du temps. Fixons  $T > 0$ .

Considérons, pour  $t \in [0, T]$ , l'EDO

$$\frac{dw(t)}{dt} = \check{F}_T(t, w(t)) \quad (13)$$

avec

$$\check{F}_T(t, w) = -F(T - t, w) = -\frac{2}{w - \xi_{T-t}}.$$

Si  $w \in \mathbb{H}$  et  $(f_t(w))_{0 \leq t \leq T}$  est une solution de l'EDO (13) sur  $[0, T]$  issue de  $w$ , alors  $t \mapsto f_{T-t}(w)$  vérifie l'EDO (10), et donc pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$f_{T-t}(w) = g_t(f_T(w)),$$

et en particulier

$$w = f_0(w) = g_T(f_T(w)).$$

Donc  $f_T$  donne l'image inverse par  $g_T$ . Mais il reste quand même à vérifier que les solutions maximales de l'EDO (13) sont bien définies sur  $[0, T]$  tout entier. Ceci revient à minorer  $|f_t(w) - \xi_{T-t}|$ . Considérons la partie imaginaire  $\text{Im}(f_t(w))$ . On a

$$\frac{d}{dt} \text{Im}(f_t(w)) = -\text{Im} \left( \frac{2}{f_t(w) - \xi_{T-t}} \right) = \frac{2 \text{Im}(f_t(w))}{|f_t(w) - \xi_{T-t}|^2}.$$

En particulier, pour  $w \in \mathbb{H}$ ,  $t \mapsto \text{Im}(f_t(w))$  est croissante et donc  $|f_t(w) - \xi_{T-t}| \geq \text{Im}(w) > 0$ .

Notons que l'absence d'explosion des solutions en temps fini pour une condition initiale dans  $\mathbb{H}$  est ce qui différencie l'EDO inversée (13) de l'EDO directe (10). Pour l'EDO directe (10) on a au contraire que  $t \mapsto \text{Im}(g_t(z))$  est décroissante pour  $z \in \mathbb{H}$ .

**Lemme 31.** Soit  $T > 0$ . Alors, lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ ,

$$g_T(z) = z + \frac{2T}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \widehat{K}_T$ . On a pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$g_t(z) - z = \int_0^t F(s, g_s(z)) ds = \int_0^t \frac{2}{g_s(z) - \xi_s} ds. \quad (14)$$

Comme

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |F(s, z)| = 0,$$

on a

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |g_t(z) - z| = 0. \quad (15)$$

On réinjecte (15) dans (14) pour obtenir

$$g_T(z) - z = \int_0^T \frac{2}{z - \xi_t + o(1)} dt = \frac{2T}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

*Démonstration du Théorème 10.* Nous avons déjà construit une famille croissante de compacts  $(K_t)_{t \geq 0}$  dans  $\overline{\mathbb{H}}$ . Avec le Lemme 30 nous savons que  $g_t$  induit une transformation conforme de  $\mathbb{H} \setminus K_t$  vers  $\mathbb{H}$ . Comme  $\mathbb{H} \setminus K_t$  est conformément équivalent à  $\mathbb{H}$ , on obtient que  $\mathbb{H} \setminus K_t$  est simplement connexe (nous n'allons pas détailler ce fait topologique intuitif) et donc  $K_t$  est une enveloppe. D'après le Lemme 31,  $g_t$  est correctement normalisé en  $\infty$ , et donc  $g_t = g_{K_t}$  et  $\text{hcap}(K_t) = 2t$ . L'unicité de la famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  découle de l'unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Vérifions que la famille d'enveloppes  $(K_t)_{t \geq 0}$  vérifie bien la propriété de croissance locale. Le Lemme 28 implique que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \widetilde{\text{rad}}(K_t) = 0.$$

Fixons  $t_0 > 0$ . La famille d'enveloppes  $(\overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})})_{t \geq 0}$  est celle qui est obtenue de manière similaire à partir de la fonction  $(\xi_{t_0+t})_{t \geq 0}$ . Donc on a également

$$\lim_{t \rightarrow 0} \widetilde{\text{rad}}(\overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})}) = 0.$$

C'est la propriété de croissance locale.

Vérifions que la fonction  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  est bien la fonction pilote de la famille d'enveloppes à croissance locale  $(K_t)_{t \geq 0}$ . Le Lemme 28 implique que

$$\{\xi_0\} = \bigcap_{t > 0} K_t.$$

Soit  $t_0 > 0$ . Pour obtenir que

$$\{\xi_{t_0}\} = \bigcap_{t > 0} \overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})}$$

on applique le Lemme 28 à la famille d'enveloppes  $(\overline{g_{t_0}(K_t \setminus K_{t_0})})_{t \geq 0}$  obtenues avec la fonction  $(\xi_{t_0+t})_{t \geq 0}$ .

## 4.2. Processus SLE

### 4.2.1. Définition, invariance conforme et propriété de Markov spatiale

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard 1D issu de 0 ( $W_0 = 0$ ). Nous allons prendre pour fonction pilote  $\xi_t = \sqrt{\kappa} W_t$  où  $\kappa > 0$  est un paramètre.

**Définition 15.** Soit  $\kappa > 0$ . Un *processus d'enveloppes*  $SLE_\kappa$  cordal dans  $\mathbb{H}$  de 0 à  $\infty$  est une famille aléatoire d'enveloppes à croissance locale  $(K_t)_{t \geq 0}$  dont la fonction pilote est  $\xi_t = \sqrt{\kappa} W_t$ .

Ces processus SLE ont été introduits par Schramm comme candidats pour limites d'échelle d'interfaces dans des modèles discrets critiques 2D. L'acronyme *SLE* signifie au choix *Schramm-Loewner Evolution* (évolution de Schramm-Loewner) ou bien *Stochastic Loewner Evolution* (évolution de Loewner stochastique).

En général, c'est une question géométrique non-triviale des savoir à partir de la fonction pilote si la famille d'enveloppes correspondante est en fait engendrée par une courbe continue ou non. Il est connu que lorsque la fonction pilote satisfait

$$\forall T > 0, \exists \varepsilon \in (0, 4), \forall 0 \leq s < t \leq T, |\xi_t - \xi_s| < (4 - \varepsilon)|t - s|^{1/2},$$

c'est-à-dire qu'elle est  $1/2$ -hölderienne avec une constante localement  $< 4$ , alors la famille d'enveloppes correspondante est en fait une courbe continue simple. Toutefois, le mouvement brownien n'est pas localement  $1/2$ -hölderien, mais seulement  $1/2 - \varepsilon$ -hölderien. Donc le résultat précédent ne s'applique pas au processus SLE. Néanmoins, Rohde et Schramm ont prouvé que les processus SLE sont bien engendrée par des courbes continues, mais qui, suivant la valeur de  $\kappa$ , ne sont pas forcément simples. Nous allons admettre leur résultat.

**Théorème 11** (Rohde-Schramm). Pour tout  $\kappa > 0$ , presque sûrement, le processus d'enveloppes  $\text{SLE}_\kappa (K_t)_{t \geq 0}$  est engendrée par une courbe continue  $(\gamma(t))_{t \geq 0}$  dans  $\overline{\mathbb{H}}$ . Plus précisément, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\overline{\mathbb{H}} \setminus K_t$  est l'unique composante connexe non-bornée de  $\overline{\mathbb{H}} \setminus \gamma([0, t])$ .

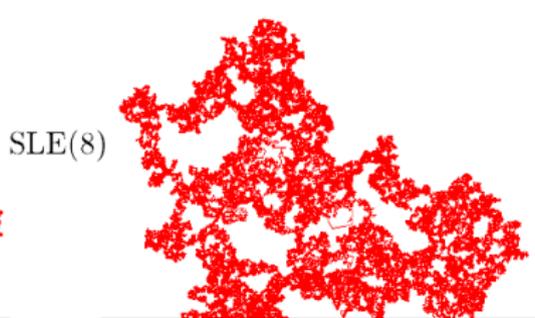
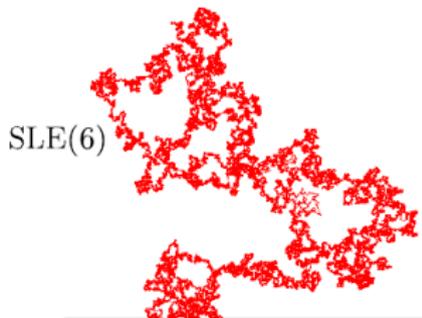
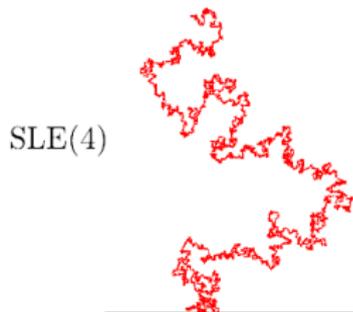
**Définition 16.** Soit  $\kappa > 0$ . Une *courbe SLE $_{\kappa}$  cordale* dans  $\mathbb{H}$  de 0 à  $\infty$  est la courbe qui engendre le processus d'enveloppes SLE $_{\kappa}$  correspondant.

En fait, pour  $\kappa \in (0, 4]$ , les courbes SLE sont simples et ne touchent pas le bord  $\mathbb{R}$ , sauf à  $t = 0$ . Pour  $\kappa \in (4, 8)$ , les courbes SLE $_{\kappa}$  ont des points multiples et reviennent vers  $\mathbb{R}$ , mais ne remplissent pas  $\overline{\mathbb{H}}$  tout entier.

Pour  $\kappa \geq 8$ , les SLE $_{\kappa}$  sont des courbes de Peano aléatoires qui remplissent le demi-plan  $\overline{\mathbb{H}}$  tout entier.

Dans la suite nous allons voir l'invariance en loi par changement d'échelle et la *propriété de Markov spatiale* (*domain Markov property* en anglais) pour le SLE dans le demi-plan.

Simulation numérique des processus SLE dans le demi-plan supérieur pour différentes valeurs du paramètre.



**Proposition 19** (Invariance d'échelle). Soit  $\kappa > 0$  et  $(K_t)_{t \geq 0}$  le processus d'enveloppes  $\text{SLE}_\kappa$ . Soit  $\lambda > 0$  une constante. Alors le processus d'enveloppes  $(\lambda K_{\lambda^{-2}t})_{t \geq 0}$  est encore distribué comme un  $\text{SLE}_\kappa$ .

*Démonstration.* Soit  $\widehat{K}_t = \lambda K_{\lambda^{-2}t}$  et  $\widehat{g}_t = g_{\widehat{K}_t}$ . Notons que

$$\text{hcap}(\widehat{K}_t) = \lambda^2 \text{hcap}(K_{\lambda^{-2}t}) = 2t.$$

On a

$$\widehat{g}_t(z) = \lambda g_{\lambda^{-2}t}(\lambda^{-1}z).$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{g}_t(z) = \frac{2}{\lambda(g_{\lambda^{-2}t}(\lambda^{-1}z) - \sqrt{\kappa}W_{\lambda^{-2}t})}.$$

Ainsi, la fonction pilote de  $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$  est  $(\sqrt{\kappa}\lambda W_{\lambda^{-2}t})_{t \geq 0}$ , qui a même loi que  $(\sqrt{\kappa}W_t)_{t \geq 0}$ .

**Proposition 20** (Propriété de Markov spatiale). Soit  $\kappa > 0$  et  $(K_t)_{t \geq 0}$  le processus d'enveloppes  $\text{SLE}_\kappa$ . Soit  $t_0 > 0$ . Soit

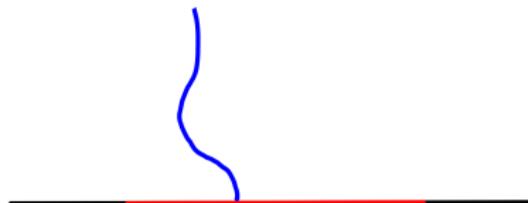
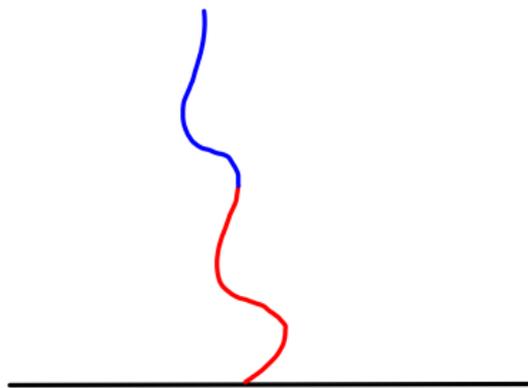
$$\widehat{K}_t = \overline{g_{t_0}(K_{t_0+t} \setminus K_{t_0})} - \sqrt{\kappa} W_{t_0}.$$

Alors, conditionnellement à  $(W_s)_{0 \leq s \leq t_0}$ , le processus d'enveloppes  $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$  est encore distribué comme un  $\text{SLE}_\kappa$ .

*Démonstration.* Soit  $\widehat{g}_t = g_{\widehat{K}_t}$ . On a

$$\widehat{g}_t(z) = g_{t_0+t} \circ g_{t_0}^{-1}(z + \sqrt{\kappa} W_{t_0}) - \sqrt{\kappa} W_{t_0}.$$

Ensuite, en différentiant  $\widehat{g}_t$ , on vérifie que la fonction pilote de  $(\widehat{K}_t)_{t \geq 0}$  est  $(\sqrt{\kappa}(W_{t_0+t} - W_{t_0}))_{t \geq 0}$ , qui a même loi que  $(\sqrt{\kappa} W_t)_{t \geq 0}$  et est indépendante de  $(W_s)_{0 \leq s \leq t_0}$ .



En fait, la propriété de Markov spatiale et l'invariance d'échelle permettent de caractériser le SLE dans le demi-plan.

**Proposition 21.** Soit  $(K_t)_{t \geq 0}$  une famille aléatoire d'enveloppes à croissance locale paramétrées par la capacité de demi-plan ( $\text{hcap}(K_t) = 2t$ ). Soit  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  sa fonction pilote. On suppose les deux propriétés suivantes:

- 1 Pour tout  $t_0 > 0$ , la distribution conditionnelle de la famille d'enveloppes  $(g_{t_0}(K_{t_0+t} \setminus K_{t_0}) - \xi_{t_0})_{t \geq t_0}$ , étant donné  $(\xi_s)_{0 \leq s \leq t_0}$ , est la même que la distribution de  $(K_t)_{t \geq 0}$ .
- 2 Pour tout  $\lambda > 0$ , la famille d'enveloppes  $(\lambda K_{\lambda^{-2}t})_{t \geq 0}$  a même distribution que  $(K_t)_{t \geq 0}$ .

Alors  $(K_t)_{t \geq 0}$  est soit un processus d'enveloppes  $\text{SLE}_\kappa$  pour un  $\kappa > 0$ , soit une demi-droite verticale déterministe issue de 0 (cas  $\kappa = 0$ ).

*Démonstration.* La propriété 1. implique que le processus stochastique  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  est à accroissements indépendants et stationnaires. C'est donc un processus de Lévy issu de 0. De plus, il est à trajectoires continues. Donc on peut l'écrire  $\xi_t = \sqrt{\kappa}W_t + at$ , pour un  $\kappa \geq 0$  et  $a \in \mathbb{R}$ . La propriété 2. implique que le processus stochastique  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  est invariant en loi par scaling brownien. D'où  $a = 0$ .

Dans la suite, nous allons définir les *courbes SLE* dans les domaines simplement connexes généraux.

Soit  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $D \neq \mathbb{C}$ , un ouvert simplement connexe. Soient  $x$  et  $y$  deux points distincts de  $\partial D$ . On suppose aussi le bord  $\partial D$  est une courbe continue simple au voisinage de  $x$  et au voisinage de  $y$ . Notons par  $\mathcal{T}^{x,y}$  l'ensemble des transformations conformes  $\psi$  du demi-plan  $\mathbb{H}$  vers  $D$  tel que  $\psi(0) = x$  et  $\psi(\infty) = y$ . En fait, l'ensemble  $\mathcal{T}^{x,y}$  forme une famille à un paramètre.

**Lemme 32.** L'ensemble  $\mathcal{T}^{x,y}$  a la structure suivante:

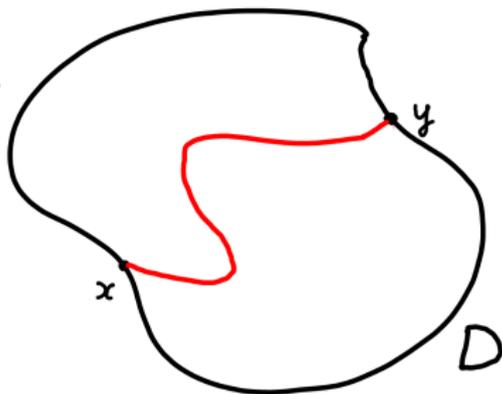
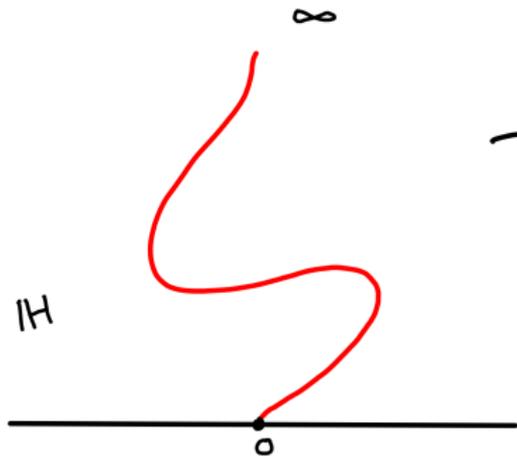
- 1 Si  $\psi \in \mathcal{T}^{x,y}$  et  $\lambda > 0$ , alors l'application  $z \mapsto \psi(\lambda z)$  est encore dans  $\mathcal{T}^{x,y}$ .
- 2 Inversement, si  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  sont deux éléments de  $\mathcal{T}^{x,y}$ , alors il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\tilde{\psi}(z) = \psi(\lambda z)$ .

*Démonstration.* Le point 1. est évident. Pour le point 2., on utilise le fait que  $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$  est un automorphisme conforme du demi-plan  $\mathbb{H}$  qui fixe 0 et  $\infty$ . Donc il est forcément de la forme  $z \mapsto \lambda z$ , pour un  $\lambda > 0$ .

**Définition 17.** Soit  $\kappa > 0$ . La courbe  $SLE_{\kappa}$  cordale dans  $D$  de  $x$  vers  $y$  est l'image d'une courbe  $SLE_{\kappa}$  cordale dans  $\mathbb{H}$  de 0 vers  $\infty$  par une transformation conforme  $\psi \in \mathcal{T}^{x,y}$ . L'invariance d'échelle (Proposition 19) et le Lemme 32 assurent que cette courbe  $SLE_{\kappa}$  dans  $D$  est bien définie en loi, modulo les changements de paramétrisation par le temps.

L'invariance d'échelle dans le demi-plan (Proposition 19) implique immédiatement l'invariance conforme en loi dans un domaine général.

**Corollaire 5.** La courbe  $SLE_{\kappa}$  est invariante en loi, modulo les changements de paramétrisation par le temps, par les automorphismes conformes de  $D$  qui fixent  $x$  et  $y$ .



On peut définir une courbe  $SLE_{\kappa}$  si  $x$  ou  $y$  (ou les deux) est un point multiple du bord  $\partial D$ . Dans ce cas là il faut en plus préciser de quel côté on approche les point correspondant. Par exemple, prenons  $D = \mathbb{H} \setminus \{is | 0 \leq s \leq 1\}$ ,  $x = i/2$  et  $y = \infty$ . Alors  $x$  est un point double de  $D$ . Il y a deux mesures de probabilités  $SLE_{\kappa}$  de  $i/2$  vers  $\infty$ , l'une partant à gauche de  $i/2$ , et l'autre partant à droite de  $i/2$ .



## 4.2.2. Les phases des processus SLE

Soit  $\kappa > 0$ . Soit  $(K_t)_{t \geq 0}$  le processus d'enveloppes  $SLE_\kappa$  dans le demi-plan  $\mathbb{H}$ . On a  $\xi_t = \sqrt{\kappa} W_t$ . Soit  $(\gamma(t))_{t \geq 0}$  la courbe  $SLE_\kappa$  correspondante.

Étant donné  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on dénote  $T_x \in (0, +\infty]$  le *temps d'absorption* de  $x$  par  $(K_t)_{t \geq 0}$ :

$$T_x = \inf\{t \geq 0 \mid x \in K_t\} = \inf\{t \geq 0 \mid \gamma([0, t]) \text{ sépare } x \text{ de } \infty \text{ dans } \mathbb{H}\}.$$

On a également

$$T_x = \sup_{\varepsilon > 0} \sup\{t \geq 0 \mid \forall s \in [0, t], |g_s(x) - \xi_s| \geq \varepsilon\}.$$

Sans perte de généralité, supposons  $x > 0$ . Soit  $(X_t^x)_{t \geq 0}$  le processus

$$X_t^x = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(g_{t \wedge T_x}(x) - \xi_{t \wedge T_x}).$$

Alors sur  $[0, T_x)$ , le processus  $X_t^x$  vérifie l'équation différentielle stochastique:

$$dX_t^x = -dW_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{X_t^x} = d\widetilde{W}_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{X_t^x},$$

où  $\widetilde{W}_t = -W_t$  est encore un mouvement brownien standard. De plus,

$$T_x = \sup_{\varepsilon > 0} \sup\{t \geq 0 \mid \forall s \in [0, t], X_s^x \geq \varepsilon\},$$

et sur l'événement  $T_x < \infty$ , on a  $\lim_{t \rightarrow T_x^-} X_t^x = 0$ .

**Définition.** Soit  $x > 0$  et  $\delta \geq 0$ . Un processus de Bessel de dimension  $\delta$  issu de  $x$  est une solutions de l'équation différentielle stochastique

$$dR_t = d\widetilde{W}_t + \frac{\delta - 1}{2} \frac{dt}{R_t},$$

avec condition initiale  $R_0 = x$ . Il est défini jusqu'au premier temps d'atteint du niveau 0:

$$t_0 = \sup_{\varepsilon > 0} \sup \{t \geq 0 \mid \forall s \in [0, t], R_s \geq \varepsilon\} \in (0, +\infty).$$

Il s'en suit que le processus  $(X_t^x)_{t \geq 0}$  précédent est distribué comme un processus de Bessel de dimension  $\delta = 1 + 4/\kappa$ , issu de  $x$ , arrêté au premier temps d'atteinte de 0.

Notons que la dimension  $\delta$  d'un processus de Bessel n'est pas forcément entière. Mais si  $\delta$  est entier, alors le processus de Bessel a même distribution que la norme euclidienne d'un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^\delta$ . D'où la terminologie *dimension*.

Soit  $R_t$  un processus de Bessel de dimension  $\delta \geq 0$ . Cherchons des fonctions  $\mathcal{C}^2$  strictement croissantes  $u : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$  tel que  $u(R_t)$  soit une martingale locale. Avec la formule d'Itô, on obtient:

$$\begin{aligned} du(R_t) &= u'(R_t)dX_t + \frac{1}{2}u''(R_t)dt \\ &= u'(R_t)d\widetilde{W}_t + \left(u'(R_t)\frac{\delta-1}{2R_t} + \frac{1}{2}u''(R_t)\right)dt \end{aligned}$$

On aboutit ainsi à l'EDO

$$u'(x)\frac{\delta-1}{2x} + \frac{1}{2}u''(x) = 0.$$

On peut prendre

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{2-\delta} && \text{pour } \delta < 2, \\ u(x) &= \log(x) && \text{pour } \delta = 2, \\ u(x) &= -x^{2-\delta} && \text{pour } \delta > 2. \end{aligned}$$

Dans la suite, pour  $a > 0$ , nous allons utiliser la notation

$$t_a = \inf\{t \geq 0 \mid R_t = a\} \in (0, +\infty].$$

**Lemme.** Soit  $x > 0$  et  $\delta \geq 0$ . Soit  $(R_t)_{0 \leq t < t_0}$  un processus de Bessel de dimension  $\delta$  issu de  $x$ . Soit  $u$  la fonction définie précédemment. Soient  $b > x$  et  $a \in (0, x)$ . Alors

$$\mathbb{P}(t_b < t_a) = \frac{u(x) - u(a)}{u(b) - u(a)}.$$

*Démonstration.* Le processus arrêté  $(u(R_{t \wedge t_a \wedge t_b}))_{t \geq 0}$  est une martingale bornée. D'où, par le théorème d'arrêt,

$$u(x) = \mathbb{E}[u(R_{t_a \wedge t_b})] = u(b)\mathbb{P}(t_b < t_a) + u(a)(1 - \mathbb{P}(t_b < t_a)).$$

**Proposition.** Soit  $x > 0$  et  $\delta \geq 0$ . Soit  $(R_t)_{0 \leq t < t_0}$  un processus de Bessel de dimension  $\delta$  issu de  $x$ .

- 1 Si  $\delta < 2$ , alors p.s.  $t_0 < +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} R_t = 0$ .
- 2 Si  $\delta = 2$ , alors p.s.  $t_0 = +\infty$ ,  $\liminf_{+\infty} R_t = 0$  et  $\limsup_{+\infty} R_t = +\infty$ .
- 3 Si  $\delta > 2$ , alors p.s.  $t_0 = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} R_t = +\infty$ .

*Démonstration.* 1. Cas  $\delta < 2$ . Supposons d'abord que  $\delta \leq 1$ . Alors, comme  $(\delta - 1)/2 \leq 0$ , on a p.s. pour tout  $t \in [0, t_0)$ ,  $0 < R_t \leq x + \widetilde{W}_t$ . Donc

$$t_0 \leq \inf\{t \geq 0 \mid \widetilde{W}_t = -x\} < \infty.$$

Soient  $b > \varepsilon > 0$ . Alors la probabilité que  $R_t$  repasse par  $b$  après le temps d'arrêt  $t_\varepsilon$  est égale à

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(\varepsilon) - u(a)}{u(b) - u(a)} = \frac{u(\varepsilon)}{u(b)}.$$

Or,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varepsilon)/u(b) = 0$ . Ainsi, avec probabilité 1,  $R_t$  reste dans  $(0, b)$  au bout d'un certain temps. Comme  $b$  est arbitraire, on a bien  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} R_t = 0$ .

Supposons maintenant que  $\delta \in (1, 2)$ . Alors p.s., pour tout  $t \in [0, t_0)$ ,  $R_t \geq x + \widetilde{W}_t$ . Soit  $b > x$ . Soit  $\tau_{b-x}$  le premier temps d'atteinte du niveau  $b - x$  par le mouvement brownien  $\widetilde{W}_t$  qui est fini p.s. Sur l'événement  $t_0 > \tau_{b-x}$ , on a  $t_b \leq \tau_{b-x} < +\infty$ . Or

$$\mathbb{P}((R_t)_{0 \leq t < t_0} \text{ atteint } b) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(a)}{u(b) - u(a)} = \frac{u(x)}{u(b)}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(t_0 = +\infty) \leq \mathbb{P}(t_0 > \tau_{b-x}) \leq \frac{u(x)}{u(b)}.$$

En faisant tendre  $b \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\mathbb{P}(t_0 = +\infty) = 0$ .

La preuve de  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} R_t = 0$  est la même que précédemment.

2. Cas  $\delta = 2$ . On a

$$\mathbb{P}(t_0 < +\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \mathbb{P}((R_t)_{0 \leq t < t_0} \text{ n'atteint pas } b).$$

Or

$$\mathbb{P}((R_t)_{0 \leq t < t_0} \text{ n'atteint pas } b) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(b) - u(x)}{u(b) - u(a)} = 0.$$

D'où  $\mathbb{P}(t_0 < +\infty) = 0$ . Ensuite, pour  $a > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(\liminf_{+\infty} R_t > a) \leq \sup_{y > a} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{u(y) - u(a)}{u(b) - u(a)} = 0.$$

En effet, en comparant avec le mouvement brownien  $\widetilde{W}_t$ , on voit que le processus  $R_t$  ne peut pas rester un intervalle de temps infini dans un segment borné  $[a, b]$ , et finit donc par en sortir, soit par  $a$ , soit par  $b$ . De même

$$\mathbb{P}(\limsup_{+\infty} R_t < b) \leq \sup_{y \in (0, b)} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(b) - u(y)}{u(b) - u(a)} = 0.$$

3. Cas  $\delta > 2$ . On a

$$\mathbb{P}(t_0 < +\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \mathbb{P}((R_t)_{0 \leq t < t_0} \text{ n'atteint pas } b).$$

$$\mathbb{P}((R_t)_{0 \leq t < t_0} \text{ n'atteint pas } b) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(b) - u(x)}{u(b) - u(a)} = 0.$$

D'où  $\mathbb{P}(t_0 < +\infty) = 0$ . Ensuite,

$$\mathbb{P}(\limsup_{+\infty} R_t < b) \leq \sup_{y \in (0, b)} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(b) - u(y)}{u(b) - u(a)} = 0.$$

Donc p.s.  $\limsup_{+\infty} R_t < +\infty$ . Soit  $y > x$  et  $a > 0$ . On a

$$\mathbb{P}((R_t)_{t \geq 0} \text{ ne passe pas par } a \text{ après } t_y) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{u(y) - u(a)}{u(b) - u(a)} = \frac{u(a) - u(y)}{u(a)}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(\liminf_{+\infty} R_t \geq a) \geq \frac{u(a) - u(y)}{u(a)}.$$

En faisant tendre  $y \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\mathbb{P}(\liminf_{+\infty} R_t \geq a) = 1$ .

Dans la suite, nous allons considérer des processus de Bessel  $R^x$  (de dimension  $\delta$ ) issus de différentes conditions initiales  $x > 0$ , pour plusieurs valeurs de  $x$  simultanément, mais associés au même bruit blanc  $d\widetilde{W}_t$  (le même pour les différents  $x$ ):

$$dR_t^x = d\widetilde{W}_t + \frac{\delta - 1}{2} \frac{dt}{R_t^x},$$

Nous allons noter  $t_0^x \in (0, +\infty]$  le premier temps d'atteinte de 0 par  $R_t^x$ .

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant dont la démonstration est laissée en exercice.

**Proposition.** Soient  $y > x > 0$ .

- ① Si  $\delta \in [0, 3/2]$ , alors  $t_0^x < t_0^y$  p.s.
- ② Si  $\delta \in (3/2, 2)$ , alors  $\mathbb{P}(t_0^x = t_0^y) > 0$ . De plus,  
 $\lim_{y \rightarrow x} \mathbb{P}(t_0^x = t_0^y) = 1$ .

[Indication: appliquer la formule d'Itô à  $\log((R_t^y - R_t^x)/R_t^x)$  et faire un changement de temps pour se ramener à un processus de Markov.]

Les résultats précédents sur les processus de Bessel se traduisent immédiatement sur les temps d'absorption des points de  $\mathbb{R}$  par le SLE $_{\kappa}$ . Rappelons la relation  $\delta = 1 + 4/\kappa$ . Donc  $\delta \geq 2$  si et seulement si  $\kappa \in (0, 4]$ . De même,  $\delta > 3/2$  si et seulement si  $\kappa \in (0, 8)$ .

### Corollaire.

- 1 Si  $\kappa \in (0, 4]$ , alors p.s., pour tout  $x > 0$ ,  $T_x = +\infty$ .
- 2 Si  $\kappa > 4$ , alors p.s., pour tout  $x > 0$ ,  $T_x < +\infty$ .
- 3 Si  $\kappa \geq 8$ , alors p.s., pour tous  $y > x > 0$ ,  $T_x < T_y$ .
- 4 Si  $4 < \kappa < 8$  et  $y > x > 0$ , alors  $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$ . De plus,  $\lim_{y \rightarrow x} \mathbb{P}(T_x = T_y) = 1$ .

**Théorème (phases du SLE).** Soit  $\kappa > 0$ . Soit  $(K_t)_{t \geq 0}$  le processus d'enveloppes  $SLE_\kappa$  dans le demi-plan  $\mathbb{H}$ . On a  $\xi_t = \sqrt{\kappa} W_t$ . Soit  $(\gamma(t))_{t \geq 0}$  la courbe  $SLE_\kappa$  correspondante.

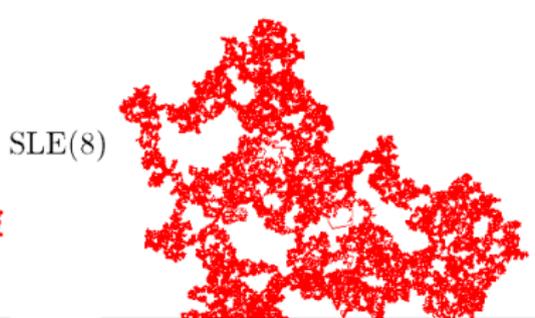
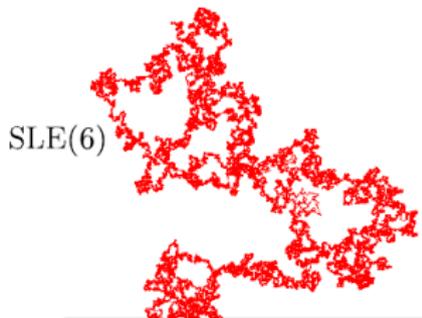
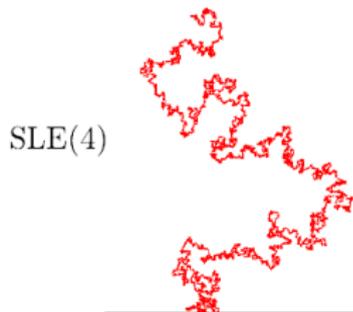
- 1 Si  $\kappa \in (0, 4]$ , alors p.s.  $(\gamma(t))_{t \geq 0}$  est une courbe simple et pour tout  $t > 0$ ,  $\gamma(t) \notin \mathbb{R}$ .
- 2 Si  $\kappa \in (4, 8)$ , alors p.s.,

$$\bigcup_{t > 0} K_t = \overline{\mathbb{H}},$$

mais  $\gamma([0, +\infty)) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$ .

- 3 Si  $\kappa \geq 8$ , alors p.s.  $\gamma([0, +\infty)) = \overline{\mathbb{H}}$ , c.à.d. la courbe SLE remplit tout le demi-plan.

Simulation numérique des processus SLE dans le demi-plan supérieur pour différentes valeurs du paramètre  $\kappa$ .



*Démonstration.* 1. Cas  $\kappa \in (0, 4]$ . Comme pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $T_x = +\infty$ , en en déduite que  $\gamma((0, +\infty)) \cap \mathbb{R} = \emptyset$  p.s.

Pour  $s > 0$ , notons  $\gamma^s$  la courbe  $\gamma^s(t) = g_s(\gamma(t+s)) - \xi_s$ . Par la propriété de Markov spatiale,  $\gamma^s$  a même distribution que  $\gamma$ . Donc p.s. pour tout  $s \in \mathbb{Q}^+$ ,  $\gamma^s((0, +\infty)) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ .

Si on avait  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  pour un couple  $t_1 < t_2$ , alors on aurait eu  $\gamma^s((0, +\infty)) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  pour tout  $s \in (t_1, t_2)$ , ce qui est une contradiction.

2. Cas  $\kappa \in (4, 8)$ . Nous avons que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \mathbb{P}(T_x = T_1) = 1$ . Donc p.s., il existe  $x > 1$ , tel que  $T_x = T_1$ . D'où p.s.  $\gamma(T_1) > 1$ , et pour tout  $x \in [1, \gamma(T_1)]$ ,  $T_x = T_1$ . Soit la variable aléatoire  $r_1 = d(1, \gamma([0, T_1])) > 0$ . Alors  $\gamma([0, +\infty)) \cap B(1, r_1) = \emptyset$ . Donc en particulier,  $\gamma([0, +\infty)) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$ .

Soit  $T = T_1 \vee T_{-1}$ . Par des considérations topologiques, on voit qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que  $B(0, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset K_T$ . Notons

$$K_\infty = \bigcup_{t>0} K_t.$$

Alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(B(0, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset K_\infty) = 1$ . Or par invariance d'échelle du SLE, la probabilité précédente ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Donc elle est égale à 1 pour tout  $\varepsilon > 0$ . Donc p.s.  $K_\infty = \overline{\mathbb{H}}$ .

3. Cas  $\kappa \geq 8$ . Soient  $y > x > 0$ . Comme p.s.  $T_x < T_y < +\infty$ , on a que p.s.,  $\gamma([0, +\infty)) \cap [x, y) \neq \emptyset$ . On en déduit que p.s.  $\mathbb{R} \subset \gamma([0, +\infty))$ .

La preuve de  $\mathbb{H} \subset \gamma([0, +\infty))$  repose sur un argument similaire, mais nécessite les inégalités de distorsion de Koebe. Elle est donc admise.