Filière MAIN | **Polytech Sorbonne**
Vendredi 4 mai | **Processus stochastiques**

Contrôle 1

Exercice 1.

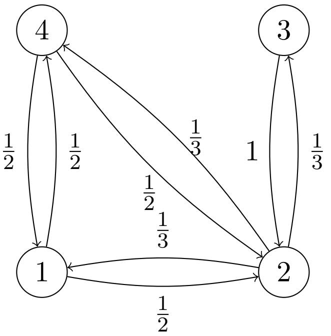
1. Rappeler une définition complète d'une chaîne de Markov.
2. Soit une chaîne de Markov à 3 états dont l'un est transient et les deux autres forment une autre classe irréductible. Cette autre classe peut-elle être transiente ? récurrente ? Donner un exemple de matrice de transition pour une telle chaîne de Markov.

Exercice 2. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace fini E, de matrice de transition Q. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité $\lambda = (\lambda_i)_{i \in E}$ sur E telle que :

$$\forall\ (i,j) \in E^2, \quad \lambda_i Q_{i,j} = \lambda_j Q_{j,i}$$

On dit alors que λ est *réversible.*

1. Montrer que λ est alors une mesure invariante.
2. Supposons que la chaîne est irréductible. Peut-on avoir $Q_{i,j} > 0$ mais $Q_{j,i} = 0$? En déduire que la période de la chaîne ne peut être strictement supérieure à 2.
3. Soit la chaîne de Markov représentée par le graphe suivant. Les étiquettes sur les arêtes indiquent les probabilités de transition. Celles qui sont absentes ont probabilité zéro. Il s'agit d'une marche aléatoire simple : étant à un sommet v, on choisit la prochaine position uniformément parmi ses voisins, donc avec une probabilité égale à $\frac{1}{\deg(v)}$, où $\deg v$ est le *degré* (sortant) de v, c'est à dire le nombre d'arêtes sortantes de v.

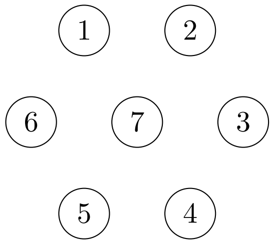


   Soit α le vecteur ligne dont les coefficients sont les degrés des sommets. Calculer N tel que $\lambda = \frac{1}{N}\alpha$ est une mesure de probabilité.
4. Vérifier que λ est une mesure réversible.
5. La chaîne est-elle irréductible ? Quelle est la période de chaque classe de communication ?
6. On part de l'état 1. Quelle est la limite de la probabilité de se retrouver en 3 au bout d'un temps très long $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3)$? On indiquera quel théorème est utilisé , dont on vérifiera consciencieusement les hypothèses.
7. Partant de l'état 1, quelle est l'espérance du temps de retour en 1 ?

Exercice 3. Soit la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, donnée par la matrice de transition suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner un graphe représentant la chaîne de Markov, en utilisant la position des sommets donnés ci-dessous.



2. À l'aide du graphe, calculer $P_5(X_3 = 4)$.
3. Identifier les classes de communication des états et dire si les classes sont transientes ou récurrentes.
4. En étudiant le comportement de la chaîne de Markov à ses classes récurrentes, déterminer l'ensemble des mesures de probablités invariantes pour cette chaîne de Markov. Y en a-t-il une seule ? un nombre fini ? une infinité ?
5. Si on part de l'état 1, que peut-on dire de la fréquence des visites à l'état 2 entre les instants 0 et $n-1$, lorsque n tend vers l'infini (nombre de visites avant l'instant n divisé par n) ? On indiquera quel théorème est utilisé, et vérifiera les hypothèses.
6. On note par $v_i(x)$ la probabilité d'atteindre le sommet i à partir de x :

$$v_i(x) = P_x(\exists\ n \geq 0\ ;\ X_n = i).$$

Déterminer sans calcul $v_1(2), v_1(1), v_1(7), v_3(1)$. Les réponses devront quand même être justifiées.
7. Pourquoi peut-on dire que pour tout j, $v_1(j) = v_2(j) = 1 - v_7(j)$?
8. Calculer $v_1(j)$ pour tout j.
9. Montrer pour tout i, la distribution de X_n partant de i converge lorsque n tend vers ∞, converge, et donner l'expression en fonction de i, j de $\lim_{n\to\infty} P_i(X_n = j)$.
10. En déduire la limite $\lim_{n\to\infty} Q^n$.

Corrigé

Exercice 1.

1. (cf. cours)
2. Sur une chaîne de Markov finie, il y a nécessairement un état récurrent. Donc la deuxième classe ne peut pas être transiente. Un exemple de matrice est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. On somme sur i la relation de réversibilité :

$$\sum_i \lambda_i Q_{i,j} = \underbrace{\left(\sum_i Q_{j,i}\right)}_{=1} \lambda_j,$$

dont $\lambda Q = \lambda$.

2. Si la chaîne est irréductible, finie, elle admet une unique mesure invariante, qui est strictement positive partout. Par hypothèse, cette mesure est réversible, et donc si $Q_{i,j} > 0$, alors $Q_{j,i} = \frac{\lambda_i Q_{i,j}}{\lambda_j} > 0$. Donc en particulier, on peut faire un chemin de longueur 2 à partir de i, dès qu'il y a au moins deux états. Si l'ensemble des longueurs ne contient que des nombres pairs, la période sera 2. Si il y a un élément impair, le pgcd des longeurs sera 1, et la chaine sera apériodique.
3. $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $N = \sum \alpha_i = 8$. Ainsi

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

4. λ est réversible car la relation de réversibilité s'écrit :

$$\frac{1}{N} \operatorname{deg(i)} \frac{1}{\deg(i)} = \frac{1}{N} \operatorname{deg(j)} \frac{1}{\deg(j)}$$

qui est évidemment vérifiée.

5. La chaîne est irréductible car tous les états communiquent avec 2, et apériodique car à partir de 2, on peut faire un circuit de longueur 2 et de longueur 3 avec probabilité strictement positive.
6. On applique le théorème de convergence vers la mesure invariante. La chaîne est récurrente, apériodique, et la mesure invariante (unique par irréductibilité) existe, donnée par λ. Donc pour tout i, j,

$$\lim_n P_i(X_n = j) = \lambda_j$$

7. L'espérance du temps de retour est donné par l'inverse de la probabilité invariante :

$$E_1(S_1) = \frac{1}{\lambda_1} = 4.$$

Exercice 3.

1. facile
2. pour aller de 5 à 4 en 3 étapes, on peut faire $5 \to 4 \to 4 \to 4$ ou $5 \to 4 \to 3 \to 4$ ou $5 \to 6 \to 5 \to 4$. Donc
$$P_5(X_3 = 4) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{19}{96}.$$
3. $\{1, 2\}$ forme une classe fermée finie, donc récurrente. $\{3, 4\}$ transiente, $\{5, 6\}$ transiente, $\{7\}$ récurrente (état absorbant).
4. Il y a deux mesures invariantes extrêmales portées par les 2 classes récurrentes (Perron-Frobenius, appliqué aux deux chaines de Markov restreinte à ces classes)
$$\mu_A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
avec $\alpha + \beta = 1$. Pour trouver la valeur de α, on écrit :
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
Ce système d'équations a deux équations liées (normal !), qui donnent $\alpha = \beta$. Comme on veut une probabilité, $\alpha = \frac{1}{2}$. Toutes les mesures invariantes sont de la forme $c\mu_A + (1 - c)\mu_B$, avec $c \in [0, 1]$
5. On applique le théorème ergodique à la chaine restreinte à la classe $A = \{1, 2\}$ (donc irréductible), qui implique que quelque soit le point de départ, pour presque toutes les trajectoires,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{\{X_k=j\}} = \mu_A(j)$$
Donc en particulier, lorsque $i = 1$,$j = 2$, la limite vaut $\frac{1}{2}$.
6. 1 et 2 sont dans la même classe fermée donc en partant de l'un ou l'autre on est sûr de toucher 1. $v_1(1) = v_1(2) = 1$. 7 est dans une autre classe fermée, donc on ne pourra toucher 1 depuis ce point de départ $v_1(7) = 1$. Pour la même raison, on ne pourra jamais toucher 4 à partir de 1 qui est dans une classe fermée ne contenant pas 3, donc $v_3(1) = 0$.
7. Quelque soit le point de départ, la trajectoire doit finir dans une des deux classes récurrente : soit celle de 7, soit celle de 1 et 2. Comme si on touche 1, on finira par toucher 2 presque-surement, et réciproquement, on a $v_1(j) = v_2(j)$, et cet événement est complémentaire à celui de toucher 7, ce qui donne $v_7(j) = 1 - v_1(j)$.
8. On écrit pour $j = 3, 4, 5, 6$ l'équation vérifiée par $v_1(j)$: (plus généralement pour $i \neq 1$, pour les valeurs qu'on connait), obtenue en décomposant suivant la valeur du premier état visité après k :
$$v_1(j) = \sum_{k\in E} Q_{j,k} v_1(k)$$
Cela donne deux système à deux inconnues (3 et 4 d'une part, 5 et 6 d'autre part). On devrait trouver $v_1(3) = v_1(4) = v_1(5) = v_1(6) = \frac{1}{2}$.
9. on a que $\lim_n P_i(X_n = j) = \lim_n (Q^n)_{i,j} = v_1(j)\mu_A(j) + v_7(j)\mu_B(j)$.