

19/03/2021

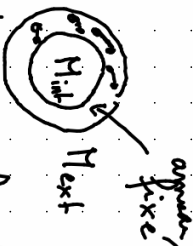
Classification des
mesures de Gibbs ergodique
par les classes sur graphes planaires
bipartites bipartites.

But: Etant donné

- un graphe G planaire bipartite \mathbb{Z}^2 -périodique
- une fonction de poids μ -périodique sur les arêtes

\rightarrow Classifier toutes les mesures de Gibbs

ergodique sur $\mathcal{M}(G) = \{ \text{conf de spins de } G \}$
convergeant à ν



Conditionnellement à la config dans
 M_{ext} M_{int} et M_{ext} indépendants.

$$- P(M_{\text{int}} | M_{\text{ext}}) \propto \prod_{e \in M_{\text{int}}} \mu_e \left(\begin{matrix} \text{mesure} \\ \text{de } M_{\text{int}} \end{matrix} \right)$$

• Sheffield: mesures de Gibbs sont

caractérisées par la pente

• limites faibles de mesure sur

le bcc conditionnées à avoir

un chargement de hauteur donné.

Kempner O'Rourke Sheffield 2003

approche "grand canonique"

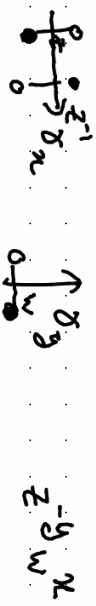
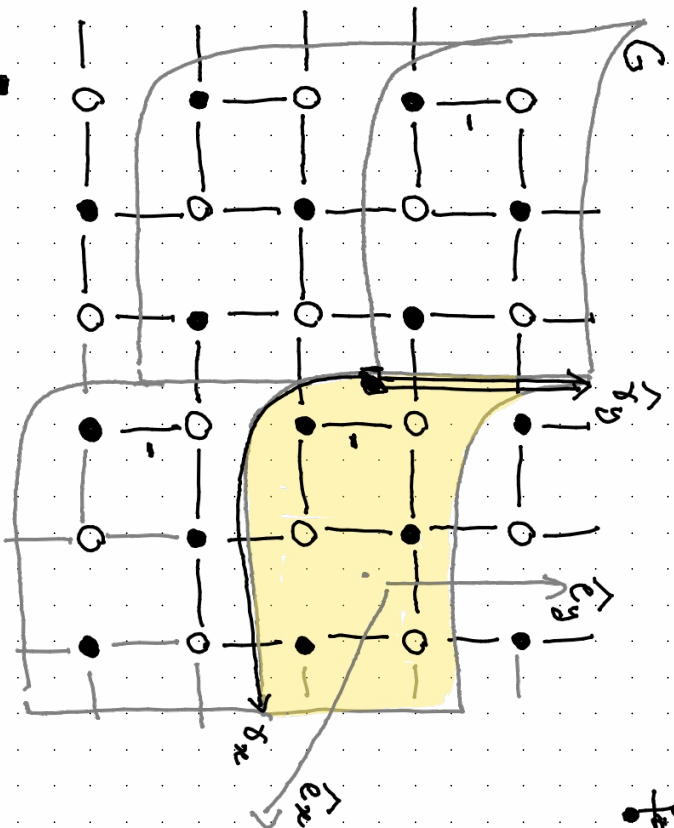
champ magnétique $B = (B_x, B_y)$

pour donner le poids des

configs en fonction de leur

chargement de hauteur.

$$P(z, w), N(P), A, \dots$$



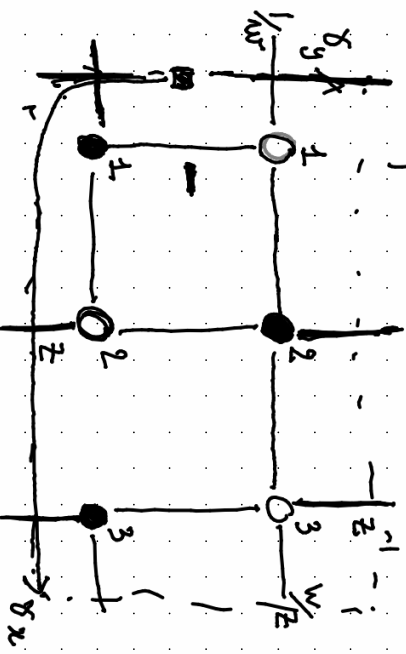
trouver une orientation de Koblryn sur ce graphe (signes)

• poids 1 sur les arêtes

$$K(z, w) = \begin{pmatrix} 0_1 & -1 & 1 & 1/w \\ 1 & 1+z & 0 & \\ 0_2 & 1 & 1 & 1+z \\ 0_3 & w/2 & 1 & 1+z \end{pmatrix}$$



domaine fondamental 3 blocs/3 noeuds.

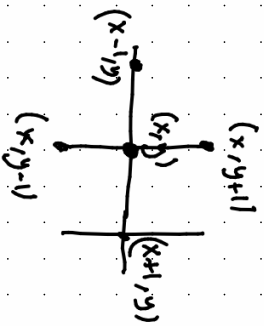


• $P(z, w) = \det K(z, w)$
 $= -4 + \frac{1}{w} - \frac{3}{z} - z$

Exercice : identifier les conf. dominées sur G_1
 Convergents à chacun des noeuds.

Planche algébrique sur \mathbb{Z}^2 ($d=2$)

Q matrice de transition.



$$(Qf)_{(x,y)} = \frac{1}{4} (f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1))$$

$f_{x,y} + z^x w^y$ ~~et somme sur \mathbb{Z}^2~~

$$(Qf) = \frac{1}{4} (z^{x+1} w^y + z^{x-1} w^y + z^x w^{y-1} + z^x w^{y+1})$$

$$= \frac{1}{4} z^x w^y (z + z^{-1} + w + \frac{1}{w})$$

analogie de $K[z, w]$

somme sur G $(b; x, y)$ étiquette d.f. coord du domaine f.d.

$$(Kf)(w, 0, 0) = \sum_{(b; x, y)} K_{(w, 0, 0)(b, x, y)} x^b f(b, x, y)$$

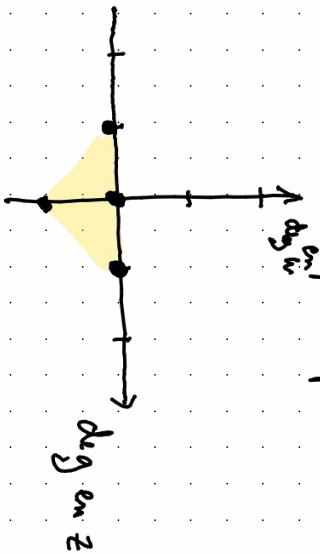
↑
somme sur x

$$f_{b, x, y} = \sum_{b, x, y} z^x w^y$$

$$P(z, w) = -4 + \frac{1}{w} - \frac{3}{z} - z$$

Polygon de Newton: $N(P)$

= ensemble des points possibles.



• courbe spectrale C

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid P(z, w) = 0\}$$

• arborescence $\{((\log|z|, \log|w|) ; (z, w) \in C \}$

courbe spectrale : courbe de Mordell

(Mordell simple)

- arborescence et d'aire maximale possible

soient les courbes qui ont le même

polygone de Newton ($\pi^2 \text{Aire}(N(P))$)

Exercice : vérifier que c'est le cas

$$\text{rem } P(z, w) = 1 + z + w$$

- bord de l'arborescence est donné par

les racines réelles du polynôme :

$$\{P(t e^x, t e^y) = 0\}$$

- Application $\log : C \rightarrow A$

ou plus 2-to-1 $(z, w) \mapsto (\log|z|, \log|w|)$

(chaque point de A a au plus 2 préimages)
dans C (z, w) et (\bar{z}, \bar{w}))

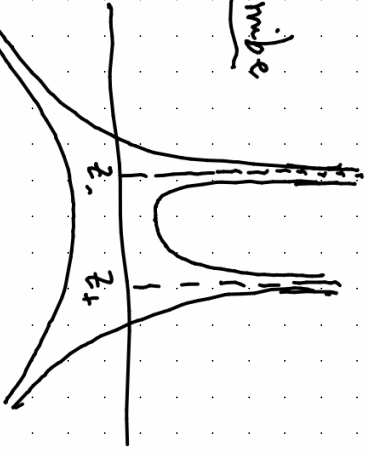
Dans notre exemple

$$P(z, w) = -4 + \frac{1}{w} - \frac{3}{z} - z$$

$N(P)$



Arrière



définiquement
1) horizontale par côté extra de $N(P)$

(avec direction \perp au côté)

(tout par point extra à l'intérieur)
du $N(P)$

$|w|$ très grand :

$$P(z, w) \approx -4 - \frac{3}{z} - z$$

2 solutions en z : z_+, z_-

Champ magnétique: $B = (B_x, B_y) \in \mathbb{R}^2$

dans lequel vit
l'anneau

$K \approx K^B$ avec poids ∂^B (extra $e^{\pm B_x}$)

$$K_B^{-1}(b_{xy}, w) = \int_{\tilde{z}}^{-y} \tilde{w}^x \frac{Q^B(\tilde{z}, \tilde{w})}{P^B(\tilde{z}, \tilde{w})} \frac{d\tilde{z} d\tilde{w}}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{w}}$$

$$Q^B(\tilde{z}, \tilde{w})$$

$$|\tilde{z}| = |\alpha| = 1$$

$$B^x z = e^{\tilde{z}} \tilde{z} = -B_x y + B_y x \int_{\tilde{z}}^{-y} \tilde{w}^x \frac{Q^B(\tilde{z}, \tilde{w})}{P^B(\tilde{z}, \tilde{w})} \frac{d\tilde{z} d\tilde{w}}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{w}}$$

$$w = e^{B_y \tilde{w}}$$

$$|z| e^{3x} |w| e^{B_y} A_B(b_{xy}, w)$$

$B \rightsquigarrow$ mesure de Gibbs μ_B

$$\mathbb{P}_{\mu_B}(e_1, \dots, e_k \text{ dominos}) = \left(\prod_{j=1}^k K_B^B(w_j, b_j) \right) \det \left(K_B^{-1}(b_i, w_j) \right)$$

$$e_j = (w_j, b_j) \\ = \left(\prod_{j=1}^k K(w_j, b_j) \right) \det \left(A_B(b_i, b_j) \right)$$

Comportement de ces mesures en fonction de B ?

• si B est dans une composante du complémentaire de \mathbb{R}^2 .

* \rightsquigarrow en déplaçant le contour (bougies B à l'intérieur de e_a

l'intégrale définissant A_B ne change pas $\rightsquigarrow \mathbb{P}_{\mu_B}$ ne change pas.

1 seule mesure \mathbb{P}_{μ_B} par composante du complémentaire.

* on peut montrer que K_B^{-1} décroît exponentiellement avec $\|(x, y)\|$

(en déplaçant le contour, changeant la variable par revenir au bon unité

\rightsquigarrow fonction exp $\rightsquigarrow |x|+|y| \rightarrow \infty \quad K_B^{-1} \leq C e^{-\epsilon(|x|+|y|)}$)

$$A_B(b_{x_1}, w) = \int_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ |z|=B_x \\ |z|=B_y}}^{-\beta} w^x \frac{\mathcal{Q}(z, w)}{\mathcal{P}(z, w)} \frac{dz}{2i\pi w}$$

* si la composante du cylindre est non borné



on fait le \tilde{m} argset de dipolera
de carbon à (x, y) fixé

$$|B| \rightarrow \infty$$

tout un bor de $\tilde{K}(b, w) = 0$

par memo dégrénie un certain sens

plan de proba d'arts = 0 on 1

\rightarrow memo "solides" ou "gels"

* par opposition

si B dans une composante borné
du cylindre.

Correlations entre arts disjoints
exponentiel vite

\rightarrow memo "gazeux"

$$\mathbb{P}(e_1, e_2 \text{ disjoints}) - \mathbb{P}(e_1, \text{disj}) \mathbb{P}(e_2, \text{disj})$$

$$K(w_1, b_1) K(w_2, b_2) \text{dist} \left(\begin{matrix} (A_B(b_1, w_1), b_1) \\ (b_1, w_1) \end{matrix}, \begin{matrix} (A_B(b_2, w_2), b_2) \\ (b_2, w_2) \end{matrix} \right)$$

$$- K(w_1, b_1) A_B(b_1, w_1) K(w_2, b_2) A_B(b_2, w_2)$$

$$= - K(w_1, b_1) K(w_2, b_2) A_B(b_1, w_1) A_B(b_2, w_2)$$

$$\leq C \exp(-\epsilon \text{dist}(e_1, e_2))$$

• si B est à l'intérieur de l'anneau

(généralisant) P va avoir

deux zéros sur le bord de rayon

(e^{Bx}, e^{By}) : $(e^{z_0}, e^{z_0 w_0})$ et son conjugué

$$P_{\text{prop}}: K_B^{-1}(b_{xy}, w) = -\operatorname{Re} \left(\frac{z_0^{-y} \times \rho \left(\frac{z_0 w_0}{b_{xy}} \right)}{\pi (x\hat{x} + y\hat{y})} \right)$$

$$\hat{x} = x z_0 \partial_x P_B \Big|_{(z_0, w_0)} + O \left(\frac{1}{|x|^2 + |y|^2} \right)$$

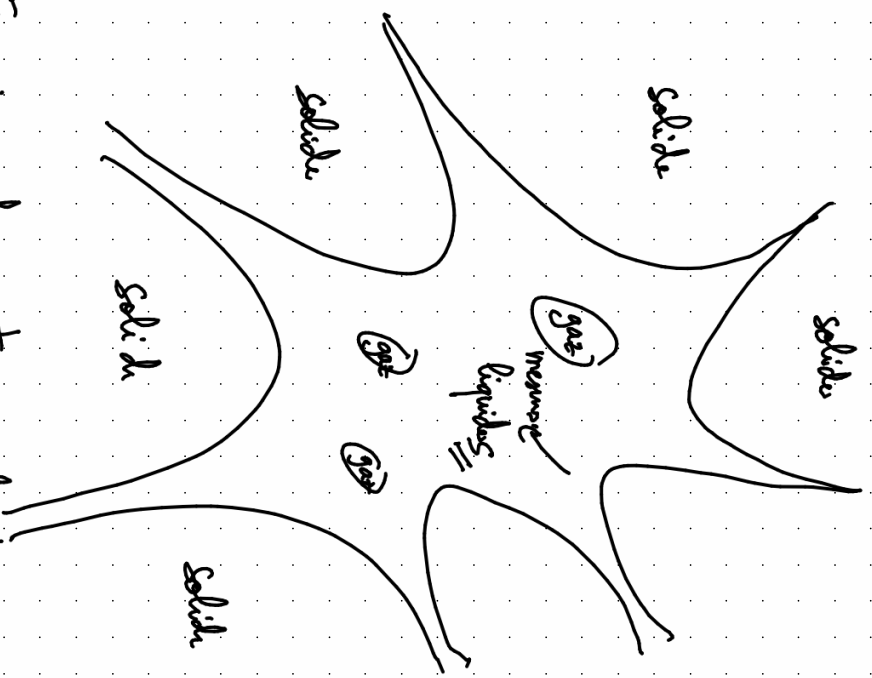
$$\hat{y} = i w_0 \partial_y P_B \Big|_{(z_0, w_0)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(b_{xy}, w)^2}$$

$$\text{Condition: } \operatorname{Cov}(e_1, e_2) = O \left(\frac{1}{\operatorname{dist}(e_1, e_2)} \right)$$

discontinuité polynomiale

des constantes

" mesurs linéaires "



Exercice: dans notre exemple de tout à l'heure: à quoi ressemblent les L mesurs solides.

Q: Comprendre le lien entre B et partie ?

quantité reliée à P, N(P)

fonction de Renkin : $R(B_x, B_y)$

$$= \iint_{B_x, B_y} \rho_g P(z, w) \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i}$$

$|z| = e^{B_x}$
 $|w| = e^{B_y}$

$$\left(= \iint_{|z|=|w|=1} \rho_g P(z, w) \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \right)$$

convexe, affine sur chaque composante du complexe de l'anneau.

apparaît quand on calcule la

fonction de partition sur G_n avec B

$$Z_{n, B} = \sum_{M \in M(G_n)} \left(\prod_{e \in M} e \right) e^{n(B_x h_x + B_y h_y)}$$

compt reliée R avec la tension de surface $\sigma(s, t)$

$$Z_{n, (s, t)} = \sum_{M \in M(G_n)} \left(\prod_{e \in M} e \right) \approx e^{-n \sigma(s, t)}$$

$h_x(M) = \lfloor n s \rfloor$
 $h_y(M) = \lfloor n t \rfloor$

$$Z_{n, B} = \sum_{h_x, h_y} \left(\sum_{H} \prod_{e \in H} e \right) e^{n(B_x h_x + B_y h_y)}$$

avec h_x, h_y
 $\underbrace{\sum_{H} \prod_{e \in H} e}_{Z_{n, (s, t)}} \approx e^{-n \sigma(s, t)}$

$$R(B_x, B_y) = \max_{(s, t)} \left(-\sigma(s, t) + s B_x + t B_y \right)$$

R transformée de Legendre de σ

(Sheffield) σ strictly convex

\leadsto transformée de Legendre et involutive

$$R(B_x, B_y) = \max_{(s,t)} (sB_x + tB_y - \sigma(s,t))$$

$$\sigma(s,t) = \max_{(B_x, B_y)} (sB_x + tB_y - R(B_x, B_y))$$

Donc entre B et (s,t)

(s,t) fixé
imaginer que R dérivable là on max abstrait

on est à un point critique de $(B_x, B_y) \mapsto sB_x + tB_y - R(B_x, B_y)$

$$\text{gradient} = 0 = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - \nabla R(B_x, B_y)$$

à partir de $B \leadsto$ point par ∇R

à partir de $(s,t) \leadsto B$ par $\nabla \sigma$

