Principe variationnel pour les modèles de dimères bipartis planaires.

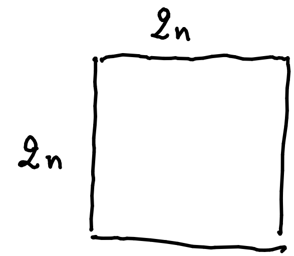
basé sur :

A variational principle for domino tilings.

Henry Cohn, Richard Kenyon, James Propp.

Journal of American Math. Society (2000)

Point de départ : asymptotique du nombre de pavages par dominos de régions :

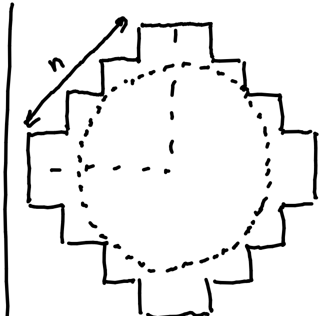


$Z_n = \#$ pavages

$2n^2$ dominos.

$$\frac{1}{2n^2} \log Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2G}{\pi} \simeq 0{,}58$$

où $G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}$ constante de Catalan.



diamant aztèque de taille n

$n(n+1)$ dominos

$$Z'_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \log Z'_n = \frac{\log 2}{2} \simeq 0{,}34\ldots$$

l'article a 2 parties

- une générale pour dériver un principe variationnel sous des hypothèses raisonnables (σ strictement convexe)
- la 2^e partie : calculs explicites sur $\mathbb{Z}^2$ pour montrer que les hypothèses ~~sont~~ vérifiées.

<u>Contexte</u> : G graphe biparti planaire. $\mathbb{Z}^2$-périodique + poids ∂ périodiques.

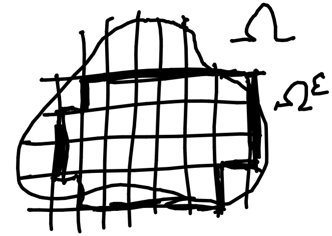
$\hookrightarrow$ flot périodique $\omega_0 \rightsquigarrow$ hauteur

P, $N(P)$, $\sigma(s,t)$, ...

G^ε plongé dans le plan avec un domaine fondamental = $\underbrace{\square}_{\varepsilon}\ \updownarrow \varepsilon$

Ω domaine borné (simplement connexe) "gentil" (bord est lisse par morceaux)

Ω^ε sous graphe de G (G^ε) qui approxime le mieux Ω



N le nombre de domaines fondamentaux de $\Omega^\varepsilon \approx \varepsilon^{-2}\,\text{Aire}(\Omega)$

h fonction hauteur sur (sous-graphe de) G^*

$\rightsquigarrow h^\varepsilon(\text{face de } G^\varepsilon) = \varepsilon h(\text{face de } G$ correspondante$)$

<u>But</u> :
- estimer le nombre de conf. de dimères dans Ω^ε (fonction de partition)
- calculer le poids des fonctions hauteurs proches de h

si on trouve le $\hat{h}_{max}$ qui maximise ce poids $\rightsquigarrow$ forme limite

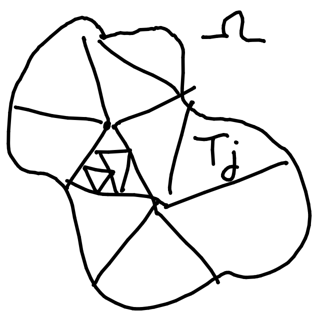
(concentration de la mesure :

avec proba $\to 1$ la fonction de hauteur renormalisée h^ε sera proche de $\tilde{h}_{max}$)

I Approche heuristique.

$\tilde{h}$ fonction "gentille" sur Ω

Poids des configs. proches de $\tilde{h}$?



on triangule Ω

on suppose que sur chaque T_j

$\tilde{h}|_{T_j}$ presque linéaire

avec une pente $(s_i, t_i) \simeq \nabla \tilde{h}|_{T_i}$

Par définition de $\sigma(s,t)$

poids des configs sur T_j avec pente (s_j, t_j) $\approx e^{-\varepsilon^{-2} \cdot \mathrm{Aire}(T_j)\, \sigma(s_j, t_j)}$

donc $\displaystyle Z(\tilde{h}) = \sum_{h^\varepsilon \simeq \tilde{h}} \text{poids}\left(\begin{array}{c}\text{config avec}\\ \text{hauteur } h\end{array}\right)$

$$\approx \prod_j e^{-\varepsilon^{-2} \mathrm{Aire}(T_j)\, \sigma(s_j, t_j)}$$

$$\varepsilon^2 \log Z(\tilde{h}) \simeq - \sum_j \mathrm{Aire}(T_j)\, \sigma(\underbrace{s_i, t_j}_{\nabla \tilde{h}})$$

somme de Riemann

$$\mathrm{Ent}(\tilde{h}) \longrightarrow \underbrace{- \iint_\Omega \sigma(\nabla \tilde{h}(x,y))\, dx\, dy}$$

fonctionnelle du ppe de grande dev

Problèmes.

- quelle est la classe de fonction $\tilde{h}$?
- peut-on découper en triangles sur lesquels $\hat{h}$ linéaire ?
- $\mathrm{Ent}(\hat{h})$ bien définie ? max ? unique ?
- Peut-on traiter les T_j indépendamment ?
- voir si $\sigma(s,t)$ donne aussi le taux de croissance de Z pour des domaines aux "bords linéaires" et pas juste sur le tore.

Nous allons essayer d'éclaircir chacun de ces points.

II Contexte mathématique pour le principe variationnel.

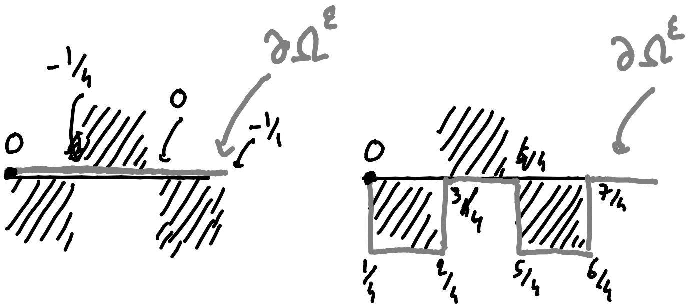
- pour comprendre le comportement de h^ε : il suffit de regarder sa restiction aux copies d'une même face f dans ~~dans~~ les domaines fondamentaux de Ω^ε (Lip $\rightsquigarrow$ deux points proches ont des images proches) $\rightsquigarrow$ h^ε : fonction sur $\varepsilon\mathbb{Z}^2$
- $h|_{\text{ces faces}}$ Lipschitz discrète, avec un gradient discret $\in N(P)$
- h^ε a aussi un gradient discret dans $N(P)$
- Toute limite de suite (h^{ε_n}) va être Lipschitz et son gradient (défini presque partout d'après le théorème de Rademacher) est aussi dans $N(P)$

<u>Def</u> : • $AH(\Omega) = \left\{ \tilde{h} : \Omega \to \mathbb{R} \text{ Lip avec gradient pp dans } N(P) \right\}$

- on dit que $h_b : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une <u>hauteur asymptotique au bord</u> si $\exists\, \tilde{h} \in AH(\Omega)$ tq $\tilde{h}|_{\partial\Omega} = h_b$
- $AH(\Omega, h_b) = \left\{ \tilde{h} \in AH \mid \tilde{h}|_{\partial\Omega} = h_b \right\}$

  convexe, compact pour $\| \ \|_\infty$

Rem: détails microscopiques de Ω^ε ont une importance cruciale sur la hauteur au bord de nos config de dimis.



notion de $\Omega^\varepsilon \to \Omega$ trop naïf précédente.

Approcher un couple (Ω, h_b)

def: (convergence / voisinage) $U_2 \subset U_1$

(U_1, h_{b_1}) et (U_2, h_{b_2})
sont ε-proches si

- $\forall x_1 \in \partial U_1 \ \exists x_2 \in \partial U_2 \ dist(x_1, x_2) < \varepsilon$
- $\forall \tilde{h} \in AH(U_1, h_{b_1})$
  $\tilde{h}|_{\partial U_2}$ ε-proche de h_{b_2}

$(\Omega^\varepsilon, h_b^\varepsilon)$ proche de (Ω, h_b)

def: (Entropie)

$\tilde{h} \in AH(\Omega, h_b)$ $Ent(\tilde{h}) = -\iint_\Omega \sigma\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}\right) dx\,dy$

Prop. Ent a un unique maximum sur $AH(\Omega, h_b)$

D// • σ bornée $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ent}(\hat{h})$ majorée

• (h_n) suite de $AH(\Omega, h_b)$ maximisante.

par compacité, on peut extraire $(h_{\varphi(n)}) \longrightarrow f$

• Ent semi-continue supérieurement.

$\Rightarrow \forall \delta > 0$ pour n assez grand.

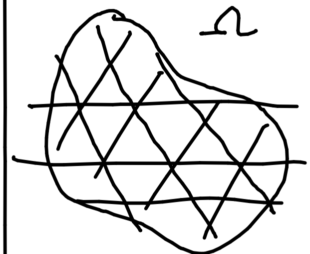
$$\mathrm{Ent}(f) \geq \underbrace{\mathrm{Ent}(h_{\varphi(n)})}_{\downarrow n \to +\infty \ \sup \mathrm{Ent}} - \delta$$

$\rightsquigarrow$ f est d'entropie maximale.

• unicité : découle de la stricte convexité de σ sur $\mathring{N}(P)$

<u>Lemme de théorie de la mesure géométrique.</u>

$\eta > 0$ fixé



subdivision de Ω en triangles eq. de taille ℓ

$h \in AH(\Omega, h_b)$

$\rightsquigarrow$ $\overline{h}_{(\ell)}$ fonction linéaire sur chaque triangle coïncidant avec h aux sommets de la triangulation.

<u>Lemme</u>: si ℓ est assez petit, sur une fraction $1-\eta$ des triangles : (bons triangles)

• h et $\overline{h}_{(\ell)}$ sont η proches (pour la norme ∞ sur ces triangles)

• une fraction $(1-\eta)$ (en mesure) de points x de ces triangles où ∇h est bien défini et $|\nabla h(x) - \nabla \overline{h}_{(\ell)}| \leq \eta$

III Résultats sur l'entropie

1)

Prop. 3.2

Soit $\tilde{h} \in AH(\Omega, h_b)$ $\delta > 0$
Alors pour ε assez petit
il existe des config de dimères
de Ω^{ε} avec h^{ε} $(\varepsilon+\delta)$-proche
de $\tilde{h}$

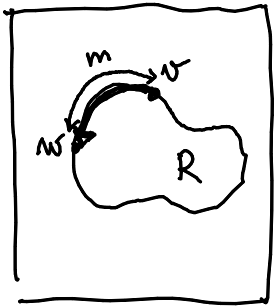
2) entropie pour des conditions
aux bords linéaire

a) la hauteur moyenne des conf.
avec une hauteur au bord $\simeq$ linéaire
ne dépend pas trop des détails
de la condition au bord.

Prop. 3.4 si R région de diamètre au plus n (aire de $R \simeq n^2$)
avec une hauteur au bord à distance
$\delta . n$ d'un plan, de pente $(s,t) \in N(P)$
alors la hauteur moyenne à l'intérieur de
R est $\simeq$ fonction linéaire de pente (s,t)
(avec erreur $O(\delta n)$) pour n assez grand.

D// Regarder R dessiné sur un
grand tore $G_M = G / M\mathbb{Z}^2$ $M \gg n$
mesure de Boltzmann μ_B^M avec champ
magnétique B telle que pente $= (s,t)$

Cohn - Elkies - Propp.



$\exists\, C_1, C_2 > 0$ telles que

$\forall c > 0$

$\mathbb{P}\Big(h(v) - h(w)$ diffère de l'espérance de $> c\sqrt{m}\Big)$ tore

$\leq C_1 e^{-c^2/C_2}$

démontré avec un argument de martingale

$(\mathcal{F}_k)$ filtration engendrée par la partition des fonctions de hauteur qui coïncident sur les k premiers pas du chemin v à w

$M_k = \mathbb{E}\big(h(v) - h(w) \mid \mathcal{F}_k\big)$

martingale à accroissements finis.

$M_0 =$ moyenne de $h(v) - h(w)$

$M_m = h(v) - h(w)$

inégalité d'Azema-Hoeffding sur (M_k)

Comment on l'utilise ici :

avec une proba (pour $\mu_B^{(M)}$) $1 - \exp(\text{petit})$, la hauteur au bord de R est presque linéaire.

$\underbrace{\text{hauteur moyenne sous } \mu_B^{(M)} \text{ à l'intérieur de } R}_{\text{linéaire avec pente } (s,t)} = \sum_{\substack{\text{condition} \\ \text{aux bords } C \\ \text{de } R}} (\text{hauteur moy} \mid C)\, \mathbb{P}(C)$

$\mathbb{E}(\quad) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\quad \mid \underset{\text{lues sur } \partial R}{C})\big)$

on sépare les C en condition "sympa" (lin de pente (s,t)) $\approx$ et les autres.

hauteur moyen. linéaire $= \sum_{C \text{ sympa}}$ (hauteur moy $|C$) $P(C)$

$+ \underbrace{\qquad}_{\text{pas sympa}}$

avec proba exp petite.

$\rightsquigarrow$ négligeable..

Cohn-Elkies-Propp :

si 2 conditions aux bord proches.

$\rightsquigarrow$ hauteur moyennes au milieu sont proches.

les cond. aux bord sympa sont proches.

$\rightsquigarrow$ (hauteur moyen $|C$) $\approx g$ ne dépend pas de C + erreur.

linéaire de pente $(s,t) \approx (g + \text{erreur})(1 - \exp(\text{petit}))$

$+ \exp(\text{petit})$

donc $g \approx$ linéaire de pente (s,t)

hauteur moyen. sur R avec cond. au bord C fixé (+ erreur)

$\square$

<u>Prop. 3.6</u> si R convexe (discrète)

pas trop allongée

h_b â linéaire de pente (s,t)
↑ discrète

"l'entropie des extension de h_b à R tout entier"

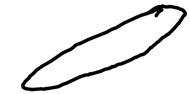
$\frac{1}{n^2} \log Z_R$ ne dépend pas
(n ← taille de R)
(à une petite erreur près) des détails microscopiques de h_b

"cette entropie ne dépend au premier ordre que de la pente (s,t) et pas des détails de h_b à R fixé"

(pourrait pour l'instant dépendre de R)

<u>Lemme 3.5</u>

si R plate
alors l'entropie petite.



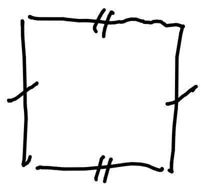
peut-on montrer que cette entropie est en fait $-\sigma(s,t)$?

<u>Thm 4.1</u> • R région carrée avec $n \times n$ domaines fondamentaux.
avec une hauteur au bord à εn près linéaire de pente $(s,t) \in N(P)$
Pour n assez grand, l'entropie des extensions à R est $-\sigma(s,t)$
$$+ O\left(\varepsilon^{1/2} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

• Cela reste valide si on ne fixe pas les cond aux bords mais qu'on met des cond. libres (en restant proche de lin de pente (s,t))

D// Encore la comparaison sur le tore :

mais ici tore : R recollé $(G/_{n\mathbb{Z}^2})$



encore argument de martingale sur ∂R.

partition des config du tore en fonction des c. au bord sur R
+ résultat combinatoire sur l'entropie d'une partition.

⇝ résultat de la 1e partie

⇝ s'étend aux conditions au bord libre.

car $\simeq \exp(n\, C^{te})$

la fonction de partition $\exp(-\sigma(s,t)\, n^2)$

log + normalise $1/n^2$ ⇝ effet négligeable d'avoir non pas une mais $\exp(Cn)$ conditions aux bords. $\square$

Corollaire 4.2

Thm 4.1 marche aussi pour les triangles équilatéraux.

D// on écrit des encadrements pour les fonctions de partition pour des grands triangles/carrés.

$$\prod_j Z^{(s,t)}_{\text{carrés } j} \leq Z^{(s,t)}_{\text{triangle}} \leq \prod Z^{(s,t)}_{\text{carrés libres}}$$

contraints

$$-\sigma(s,t) + \text{err} \leq \frac{1}{\text{Aire}} \log Z^{(s,t)}_{\text{tri}} \leq -\sigma(s,t) + \text{err}$$

Thm. 4.3

(Soit (Ω, h_b), $\delta > 0$ fixé

Soit ε tq $(\Omega^\varepsilon, h_b^\varepsilon)$ approche (Ω, h_b) à δ près.

le log de la fonction de partition de conf. de dimères avec h^ε proche de $\tilde{h} \in AH(\Omega, h_b)$ renormalisé par ε^2

est $\mathrm{Ent}(\hat{h}) + o_{\delta \to 0}(1)$

pour ε assez petit.

Conséquence : (concentration de la mesure)

avec une proba qui $\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$,

la hauteur renormalisée h^ε est proche de $\hat{h}_{\max}$ (qui maximise Ent)

D// Thm 4.3

- il y a des config de dimers qui marchent si ε assez petit (Prop 3.2)
- $\eta > 0$ ℓ assez petit.
  $\bar{h}_\ell$ approx linéaire.

$\rightsquigarrow \mathrm{Ent}(\tilde{h}) = \mathrm{Ent}(\bar{h}_\ell) + o(1)$

on peut se ramener à un $\bar{h}$ linéaire sur le maillage triangulaire.

On choisit $\delta < \ell \cdot n$

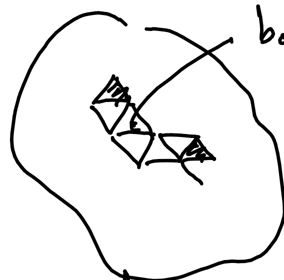
$U_\delta = \{ \text{conf de dimers } \|h^\varepsilon - \tilde{h}\| < \delta \}$

$\varepsilon^2 \log Z|_{U_\delta} \simeq \mathrm{Ent}(\bar{h}_b) + o(1)$?

$\mathrm{Ent}(\bar{h}) = \sum_{\substack{\text{lig } \\ \text{+ tr enveres}}} \pm\sigma(s_i, t_i)$

$\simeq \mathrm{Ent}(\tilde{h})$

- la fraction η des triangles où on n'a pas que $|\tilde{h} - \bar{h}_\ell| \leq \ell\eta$ ne change pas l'entropie de plus de $O(\eta)$
- on jette la contrib des triangles sur $\partial\Omega$
- reste les "bons triangles inds"



$Z^{\text{condi fixé}}$

$\mathrm{ent}(U_\delta)$

$\prod_{\text{bons trigs}} Z^{\text{cond fixée}}_{\text{trigs.}} \leq Z(U_\delta) \leq \prod Z^{\text{condi libres}}_{\text{triangles}}$

$\sum_{\substack{\text{ligs} \\ \text{+ tr enveres}}} \pm\sigma(s_i, t_i) \leq \varepsilon^2 \log Z(U_\delta) \leq \sum_{\substack{\text{lig} \\ \text{+ enveres.}}} -\sigma(s_i, t_i)$

$\square$