

30/04/2021

Invariance conforme pour la  
 fonction de hauteur des dominos  
 uniformes sur domaines tempérés.

d'après Kenyon (2000)

- Conformal Invariance ....
- Dominoes and the Gaussian free field

## I Motivation

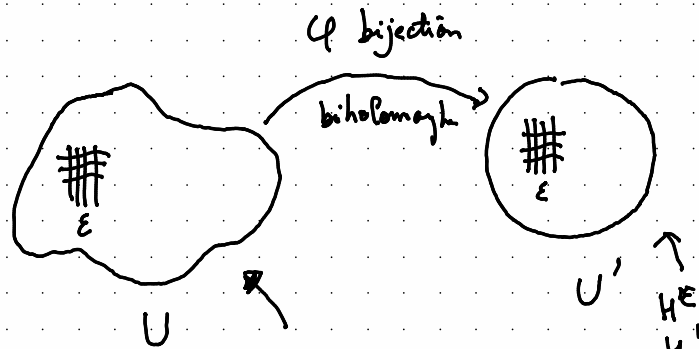
Propriétés typiques pour systèmes "critiques"

- invariante d'échelle
- invariance par rotation.

pas de longueur caractéristique

Physiciens: supposent que la limite  
 d'échelle d'un système critique  
 doit avoir ces propriétés d'invariance

au niveau local



champ discret  $H^E \rightarrow H$  continu

2 modèles sur  $U$ :  $H \stackrel{(\text{loi})}{=} H' \circ \phi$

invariance conforme

2D  $\leadsto$  théorie conforme des champs

Exemple:

- mouvement brownien sur  $U$

MB issu de  $z$  dans  $U$  (arrête dès qu'il touche  $\partial U$ )

a m loi que MB issu de  $\phi(z)$  dans  $U'$   
 (à reparam. du temps fixe)

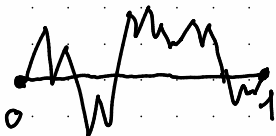
Autre exemple: champ libre gaussien  
(analogue 2d pont brownien)

Champ libre gaussien  
sur  $U$  (borné)  
processus gaussien  
centré de covariance  
"Cov(x,y) = G(x,y)"  
où  $G$  Green avec  
c.b de Dirichlet  
sur  $U$

$\Delta$  a un spectre discret  
avec  $\lambda_k < 0$   $f_k$

$$GFF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{f_k(x)}{\sqrt{-\lambda_k}}$$

pont brownien  
sur  $[0,1]$ .



$$\beta_t = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sqrt{2} \sin(\pi k t)}{\pi k}$$

$(Z_k)$  iid  $\mathcal{N}(0,1)$

$$\text{Cov}(\beta_s, \beta_t) = s(1-t)$$

$s < t$

↑  
Green de  
 $[0,1]$   
avec cond  
aux bords de  
Dirichlet.

⚠ En  $d=2$   $G(x,x) = \infty$

le champ libre n'est pas défini  
comme une fonction aléatoire  
(on ne pas évaluer en un point)

→ on y pense comme une distribution  
aléatoire:

- faire des moyennes contre des  
fonctions tot.
- intégrer le long de courbes  
(dans  $H_0^{-1}(U)$ )

cf Scott Sheffield

"The Gaussian Free Field  
for mathematicians"

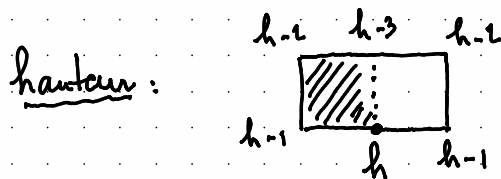
$\varphi$  fonction test

$$\langle GFF, \varphi \rangle \sim \mathcal{N}(0, V(\varphi))$$

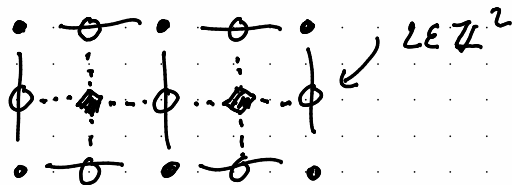
$$V(\varphi) = \iint_{U \times U} g(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy$$

Spoiler: GFF va apparaître comme la limite de notre fonction de hauteur.

## II Cadre de travail

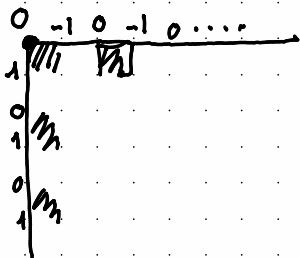


- $U$  un domaine simple convexe du plan (souvent borné)
- $U^\varepsilon$  approximation (par l'intérieur) de  $U$  par des sous-graphes de Temperley,  $\varepsilon \mathbb{Z}^2$   
↑ doubles de sous-graphes  
 $2\varepsilon \mathbb{Z}^2$



Sous graphes Temperleyers :

- coins noirs qui proviennent des sommets des sous-graphes de  $\mathbb{Z}^2$
- déséquilibre : enlever un sommet noir du bord  $v_0^\varepsilon \rightarrow d_0'$



la fonction de hauteur au bord est bornée

CKP: hauteur renormalisée converge vers la

fonction  $\equiv 0$   
(linéaire avec pente)  
(0,0)

(entropie maximale pour les dominos uniformes)

### Thm [Kenyon]

sur  $UE$  :  $h^\varepsilon$  hauteur des dominos uniformes.

On la voit comme une distribution aléatoire  $\varphi$  fonction test

$$\langle h^\varepsilon, \varphi \rangle = \varepsilon^2 \sum_{v \text{ sommet de } UE} \varphi(v) h^\varepsilon(v)$$

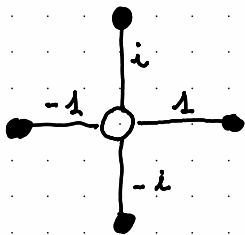
$\bar{h}^\varepsilon$  : espérance de  $h^\varepsilon$

$h^\varepsilon - \bar{h}^\varepsilon$  converge "faiblement en distribution" vers  $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$  GFF.

$$\forall \varphi \quad \langle h^\varepsilon - \bar{h}^\varepsilon, \varphi \rangle \xrightarrow{(\text{loi})} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \langle \text{GFF}, \varphi \rangle \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{16}{\pi} V(\varphi)\right)$$

### III Opérateurs de Kosteleyn sur les domaines hypercubiques.

1) def K



Vérification de la règle de Kosteleyn

$$\begin{array}{c} i \\ \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline i \\ \bullet \\ \hline -i \\ \bullet \\ \hline 1 \end{array} \quad \frac{1}{-i} \cdot \frac{(-1)}{i} = -1$$

ou  
(bien le signe de  $\frac{df(\text{face})}{dx}$ )  
 $(-1) \cdot \frac{1}{i} = -1$

2) holonomie discrète

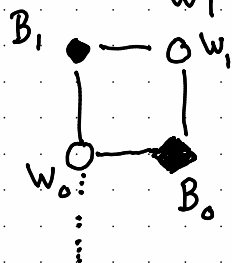
$\mathcal{U}^E$ : double d'un sous-graphe  $\Gamma \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- 2 types de sommets noirs:  $B_1$  (primaires de  $\Gamma^E$ )  $\bullet$   
 $B_0$  (secondaires)  $\blacklozenge$

- 2 types de sommets blancs:

$W_0$ : arêtes verticales de  $\Gamma^E$

$W_1$ : — horizontales



$$\begin{array}{l} f \in \mathbb{R}^{B_0} \\ g \in \mathbb{R}^{B_1} \end{array} \rightsquigarrow F = f + ig \text{ sur les nois.}$$

$w \in W_0$

$$[K(f+ig)](w) = \overbrace{(f(w+i) - f(w-i))}^{\text{"}\partial_x f\text{"}} + i \underbrace{(ig(w+i) - ig(w-i))}_{\text{"}\partial_y g\text{"}}$$

si  $f+ig$  dans noyau de  $K$  "..."

si  $K(f+ig)(w) = 0$

$$\begin{cases} \partial_x f = \partial_y g & (\text{si } w \in W_0) \\ \partial_y f = -\partial_x g & (\text{si } w \in W_1) \end{cases}$$

version discrète de équations de Cauchy-Riemann.

$K \approx \partial_{\bar{z}}$

Def: on dit que  $f+ig$  est holom.  
discrète si  $K(f+ig) = 0$

• on dit que  $F \in \mathbb{C}^B$  est holom

discrète si  $\begin{cases} F|_{B_0} \text{ réelle } (f) \\ F|_{B_1} \text{ imag. pure } (ig) \end{cases}$

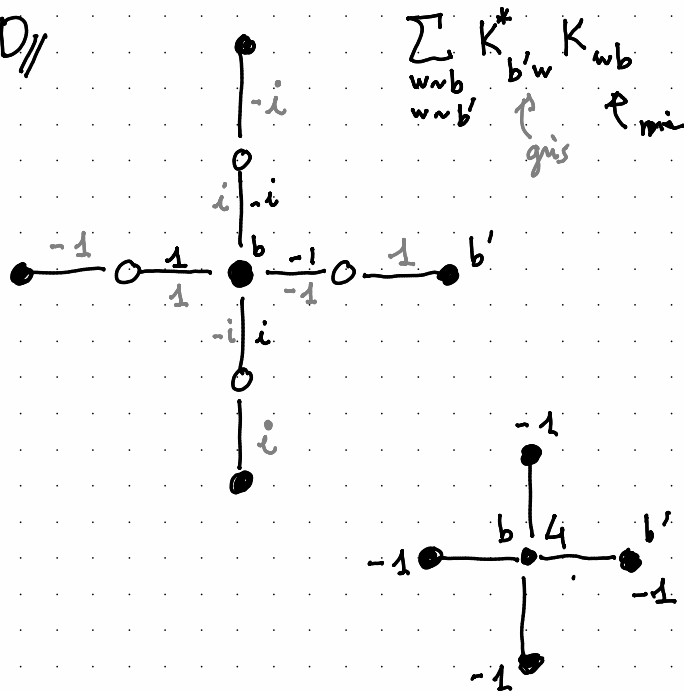
$KF = 0$

Prop.

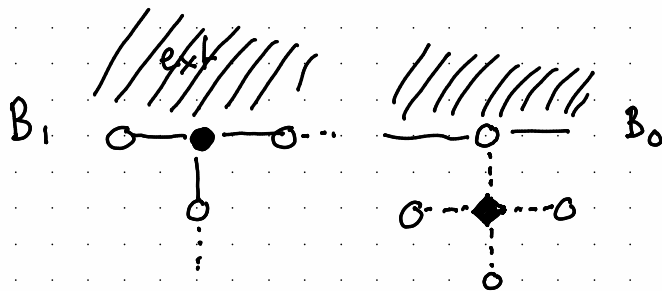
$$K^*K = \left( \begin{array}{cc|cc} \Delta & & & \\ & \Delta_{\text{Dirichlet}} & & 0 \\ \hline & & & \Delta \\ 0 & & & \Delta_{\text{Neumann}} \end{array} \right) \Bigg\} B.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{B_0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{B_1}$   
 $\text{sur } \Pi_E^* \quad \text{sur } \Pi_E$

$D_{//}$



Exercice: vérifier les conditions  
aux bords.



Conséquence  $K^{-1} = \begin{pmatrix} g & 1 \\ 0 & ig \end{pmatrix}$   $K^*$   
↑  
op.  
aux différences  
finies.

$K^{-1}$  défini à partir de  
gradients discrets de la  
fonction de Green sur

$\Gamma_E$   
 $\Gamma_E^*$

On note  $K^{-1} = C$

on étend  $C$  de façon symétrique,

$$C(v_1, v_2) = C(v_2, v_1)$$

$$\left[ C(v_1, v_2) = 0 \text{ si } v_1, v_2 \text{ sont de même couleur} \right]$$

Caract. analytique de  $C$ ?

Lemme:

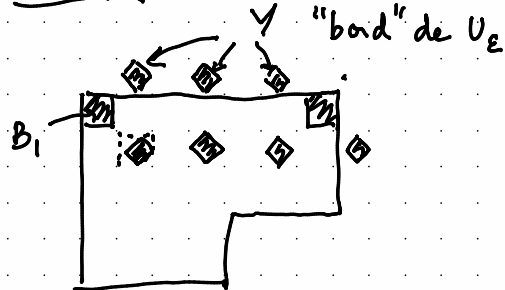
si:  $v_1$  blanc, alors  $v_2 \mapsto C(v_1, v_2)$   
est holomorphe discrète avec

"un pôle" en  $v_2$

- $(KC(v_1, \cdot)) = \delta_{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_1$

- $C(v_1, v_2)$  réel si  $v_2 - v_1 = (1, 0) \pmod 2$   
imag si  $v_2 - v_1 = (0, 1) \pmod 2$ .

Lemme (en terme d'harmonicité)



$$B'_0 = B_0 \cup Y$$

• si  $\nu_1 \in W_0$   $f: \nu_2 \mapsto C(\nu_1, \nu_2)$   
 $B'_0 \rightarrow \mathbb{R}$   
  tendue    $Y$  par 0

i) harmonique sur  $B_0(U^\epsilon) \setminus \{\nu_1 \pm 1\}$

ii)  $\Delta C(\nu_1, \nu_1 \pm 1) = \pm 1$

iii) conjugu e harmonique bien définie.

• si  $\nu_1 \in W_1$   $f: \nu_2 \mapsto C(\nu_1, \nu_2)$   
 $B'_0 \rightarrow i\mathbb{R}$

i) harmonique sur  $B_0(U^\epsilon) \setminus \{\nu_1 \pm i\}$

ii)  $\Delta C(\nu_1, \nu_1 \pm i) = \mp i$

iii) conjug. harmonique bien défini

$D_f$  découlent de

$$\begin{aligned} \Delta C &= K^* K C = K^* \delta_{\nu_1} \\ &= \delta_{\nu_1+1} - \delta_{\nu_1-1} \\ &\quad - i \delta_{\nu_1+i} + i \delta_{\nu_1-i} \end{aligned}$$

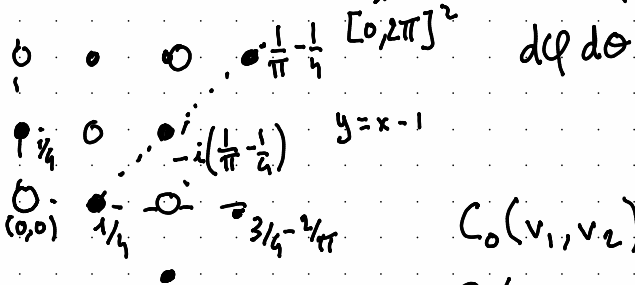
$\text{Re } C$  ou  $\text{Im } C$  uniques fonctions  
 qui vérifient ces propriétés.



### III Asymptotique.

1) sur le plan tout entier.  $C_0$

$$C_0(0, x+iy) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{[0, 2\pi]^2} \frac{e^{i(x\theta - y\varphi)}}{2i\sin\theta + 2i\sin\varphi} d\varphi d\theta$$



$$C_0(v_1, v_2) = C_0(0, v_2 - v_1)$$

Lemme

$$C_0(0, z) = \begin{cases} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) & \text{si } z \in \mathcal{B}_0 \\ i \operatorname{Im} \frac{1}{\pi z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) & \text{si } z \in \mathcal{B}_1 \end{cases}$$

$$D// \quad C_0(0, z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{général} \\ \text{dans phase} \\ \text{liquide/gaz} \end{array} \right)$$

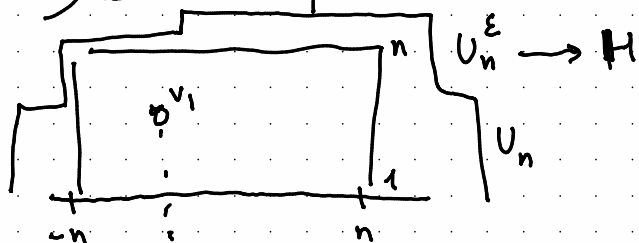
+ défaut d'harmonicité  
si  $w \in W_0$  lemme précédent

$$\rightarrow \operatorname{Re}(C_0(0, w)) = \underbrace{G_0(0, \frac{w-1}{2}) - G_0(0, \frac{w+1}{2})}_{\text{a les mêmes propriétés analytiques que } \operatorname{Re} C_0}$$

sur le plan  $G_0(0, v) = -\frac{1}{2\pi} \log |v| + c_0 + O\left(\frac{1}{|v|^2}\right)$

pareil pour  $w \in W_1$

$\mathcal{L}$  sur le demi plan  $\mathbb{H}$



$$C^{(h)} \text{ sur } U_n \rightarrow C^H$$

supposons que  $v_1 \in W_0$  (axe vertical)

-  $C^H(v_1, v_2)$  comme fonction de  $v_2$

$$\text{vérifie que } \Delta \operatorname{Re} C^H(v_1, 0) = \delta_{v_1, 1} - \delta_{v_1, -1}$$

$$\operatorname{Re} C^H(v_1, x+iy) = 0 \text{ si } y > 0$$

$$\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty \end{matrix}$$

On connaît une fonction qui a les mêmes propriétés

$$\operatorname{Re} (C_0(v_1, v_2) - C_0(\bar{v}_1, v_2))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C^H(v_1, v_2) &= C_0(v_1, v_2) - C_0(\bar{v}_1, v_2) \\ &= \frac{\delta_{v_1, 1} - \delta_{v_1, -1}}{\pi(v_2 - v_1)(v_2 - \bar{v}_1)} + O\left(\frac{1}{|v_1 + v_2|^2}\right) \end{aligned}$$

$$* \text{ si } v_1 \in W_1 \quad \operatorname{Im} C_H(v, x+iy) = 0$$

$$\begin{aligned} C^H(v_1, v_2) &= C_0(v_1, v_2) + C_0(\bar{v}_1, v_2) \\ &= \frac{2v_2 - v_1 - \bar{v}_1}{\pi(\quad)(\quad)} + O(\quad) \end{aligned}$$

3) régions bornées  $U$  point marqué

$$(z_1, z_2) \in U \times U$$

$$d'_0 \in \partial U$$

def.  $F_0(z_1, z_2)$  fonction qui à  $z_1$  fixé  
 - analytique en  $z_2$  pôle simple en  $z_2 = z_1$   
 (résidu  $1/\pi$ )

- vaut 0 en  $d'_0$

-  $\operatorname{Re} F_0(z_1, \cdot)$  nulle sur  $\partial U$

(analogue de  $\frac{1}{\pi(z_2 - z_1)}$  dans  $\mathbb{C}$ )

•  $F_1$  pareil  $\operatorname{Im}(F_1(z_1, \cdot))$   
 nulle sur  $\partial U$ .

$$F_0^*(z_1, z_2) = F_0(z_1, z_2) - \frac{1}{\pi(z_2 - z_1)}$$

(pareil pour  $F_1^*, F_1$ )

Thème

soit  $v_1, v_2$  à distance  $> 0$  indépendante de  $\varepsilon$  du bord macroscopique  
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 deux sommets dans  $U \varepsilon$ , distance mesurée dans  $\mathbb{Z}^2$

• si  $v_1 \in W_0$   
 (arête verticale)

$$\frac{1}{\varepsilon} C(v_1, v_2) = \frac{1}{\varepsilon} C_0(v_1, v_2) + F_0^*(v_1, v_2) + o(1)_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Re}(\quad) & \text{si } v_2 \in B_0 \\ \operatorname{Im}(\quad) & \text{si } v_2 \in B_1 \end{cases}$$

• si  $v_1 \in W_1$

$$\frac{1}{\varepsilon} C(v_1, v_2) = \frac{1}{\varepsilon} C_0(v_1, v_2) + F_1^*(v_1, v_2) + o(1)_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

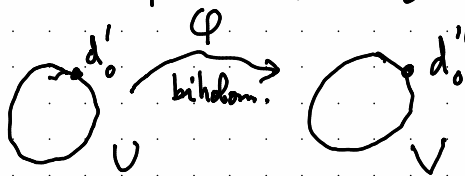
Rem: ce que thm signifie

- si  $v_1$  et  $v_2$  proches  $C \approx C_0$
  - si  $v_1$  et  $v_2$  loins  $\frac{1}{\varepsilon} C_0 \approx \frac{1}{\pi(z_2 - z_1)}$
- $$\frac{1}{\varepsilon} C(v_1, v_2) \approx \frac{1}{\pi(z_2 - z_1)} + F_0^* = F_0$$

$D_{//}$  basé sur l'idée que  $C$   
 gradient discret de Green discret  
 et  $\downarrow \varepsilon \rightarrow 0$   
 Green continu.

Prop.  $F_0, F_1$  ne dépendent que du  
 type conforme de  $U$

$$F_+ = F_0 + F_1 \quad F_- = F_0 - F_1$$



$F_+$  analytique en  $v, w$   
 $F_-$  analytique  $w$ , antianalytique  $v$

$$F_+^U(v, w) = \varphi'(v) F_+^V(\varphi(v), \varphi(w))$$

$$F_-^U(v, w) = \overline{\varphi'(v)} F_-^V(\varphi(v), \varphi(w))$$

$D_{//}$  on utilise le fait que  
 $C$  discretisation de  $F_0, F_1$   
 on sait par def que  $F_0, F_1, F_+, F_-$   
 analytiques en  $w$   
 (on pourrait à partir du théorème précé I  
 $KC = Id$

pour montrer l'analyticité en  $v$   
 discrétisation +  $CK = Id$

transformation:  $F_+^U$  et  $F_+^V \circ \varphi$   
 ont presque les m<sup>^</sup> propriétés analytiques  
 (sauf pôle en  $z_2 = z_1$ )  $\rightarrow$  adapter le coef.  
 de  $\varphi$ .

Corollaire.  $g_U$  Green de  $U$

de Dirichlet.

par rapport à la  $\Gamma$  variable

$$2 dg_U(z_1, z_2)$$

$$z_i = x_i + iy_i$$

$$= F_0(z_1, z_2) dx_1 + F_1(z_1, z_2) dy_1$$

$$= \frac{1}{2} (F_+(z_1, z_2) dz_1 + F_-(z_1, z_2) d\bar{z}_1)$$

2<sup>e</sup> étape.

calculer explicitement les moments pour un domaine  $U$  particulier.  $(H, \mathcal{E}'_{\infty})$

par invariance conforme.



donne la loi de la hauteur dans  $U$ .

#### IV Démonstration du théorème d'invariance conforme.

1<sup>e</sup> étape: obtenir une limite invariante

conforme par les moments

$$(z_i^{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} z_i \in U) \quad h_{\varepsilon}^0 = h_{\varepsilon} - \bar{h}_{\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E [h_{\varepsilon}^0(z_1^{\varepsilon}) \dots h_{\varepsilon}^0(z_k^{\varepsilon})]$$

$$\Phi(z_1, \dots, z_k)$$

Prop.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ h_{\varepsilon}^0(z_1^{\varepsilon}) \dots h_{\varepsilon}^0(z_k^{\varepsilon}) \right]$$

$\text{dist}(z_i, z_j) > 0$  pour  $i \neq j$

$$= (-1)^k \sum_{\substack{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \\ \pm 1}} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_k} \det F_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(z_i, z_j) dz_1^{(\varepsilon_1)} \dots dz_k^{(\varepsilon_k)}$$

$$z_j^{(+)} = z_j \quad z_j^{(-)} = \overline{z_j}$$

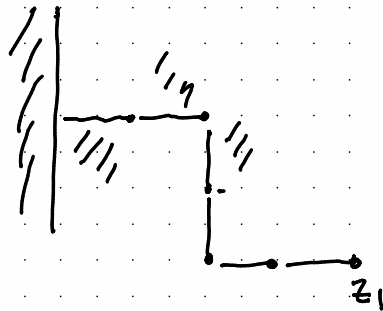
$$F_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(z_i, z_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ F_+ & \text{si } \varepsilon_i \varepsilon_j = (+) \\ F_- & \text{si } \varepsilon_i \varepsilon_j = (-) \end{cases}$$

$F_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(z_i, z_j)$   
analyt. en  $z_i^{(\varepsilon_i)}, z_j^{(\varepsilon_j)}$



tous les intégrales  
qui apparaissent sont  
invariantes conform.

D// prendre les  $\gamma_j$  disjoints  
avec pas de bouc pas



$$h(z_1) = 4(A_1 - B_1)$$

# domines  
traversés  
avec  
not à  
droite

# domes  
gauche.

$A_1, B_1$  sont des indices  
de présence de domine.

$$\mathbb{E} [h_{\varepsilon}^0(z_1) \dots h_{\varepsilon}^0(z_k)] = \mathbb{E} [A_1 - B_1 - \dots - A_k + B_k]$$

il faut savoir calculer

$$\mathbb{E}[(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1) \dots (\alpha_k - \bar{\alpha}_k)] \quad (*)$$

$$\alpha_j = \mathbb{1}_{\text{domino}}(w_j, b_j)$$

$$\bar{\alpha}_j = \mathbb{E}[\alpha_j] = \mathbb{P}[\text{domino}],$$

Lemme:

$$(*) = \left( \prod_{j=1}^k K_{w_j, b_j} \right) \det_{1 \leq i, j \leq k}$$

