Résumé des épisodes précédents

- lien entre K et Δ / Cauchy-Riemann discrets $\rightsquigarrow$
    - caractérisation de K^{-1}/C

comme fonction :

- holomorphe discrète avec résidus
- harmonique discrète avec défaut d'harmonicité.

- introduction dans U (continu) des fonctions F_0, F_1, F_+, F_-

$g_U(z_1,z_2)$ fonction de Green sur U

$\hat{g}_U(z_1,z_2)$ son conjugué harmonique avec z_1 fixé (comme fonction de z_2)

$$\tilde{g}_U(z_1,z_2) = g_U(z_1,z_2) + i\hat{g}(z_1,z_2)$$

fonction méromorphe en z_2 (à z_1 fixé)

$z_1 = x_1 + iy_1$

$$2 d_{z_1}\tilde{g}_U(z_1,z_2) = F_0(z_1,z_2)\,dx_1 + F_1(z_1,z_2)\,dy_1$$
$$= -\frac{1}{2}\left(F_+(z_1,z_2)\,dz_1 + F_-(z_1,z_2)\,d\bar{z}_1\right)$$

- loin du bord de U^ε (approx tempérée de U)

$$\frac{1}{\varepsilon}C(v_1,v_2) = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}C_0(v_1,v_2)}_{K^{-1}\text{ sur plan}} + \text{"}F_0^*\text{" (si } v_1\in W_0) \,/\, \text{"}F_1^*\text{" (si } v_1\in W_1) + o(1)$$

" " $\to$ Re si $v_2 \in B_0$

$\to$ $i\,\mathrm{Im}$ si $v_2 \in B_1$

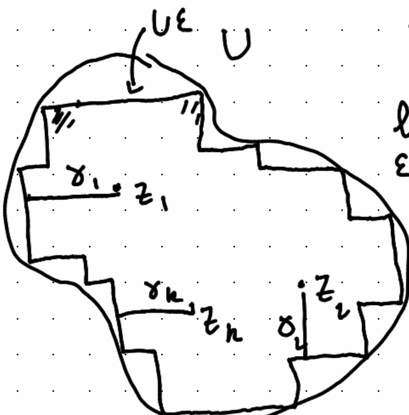
$$F_j(z_1,z_2) = \frac{1}{\pi(z_2-z_1)} + F_j^*(z_1,z_2)$$

moralement :

$$\frac{1}{\varepsilon} C(v_1,v_2) \approx F_0 \text{ ou } F_1$$

• Moments de la fonction de hauteur

sur U^ε



$$h^0_\varepsilon = h_\varepsilon - \mathbb{E}[h_\varepsilon]$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left[h^0_\varepsilon(z_1)\dots h^0_\varepsilon(z_k)\right] = ?$$

(γ_j ont des morceaux droits de longueur pair)

$$h^0_\varepsilon(z_j) = 4\sum_{\substack{\text{aretes } e_l^{(j)} \\ \text{de } \gamma_j}} \pm \overbrace{\left(\mathbb{1}_{e_l^{(j)}\,\text{dimer}} - \mathbb{P}(e_l^{(j)}\,\text{dim})\right)}^{\mathbb{1}^0_{e_l^{(j)}}}$$

+ lemme :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}^0_{e_1}\cdots\mathbb{1}^0_{e_k}\right] = \left(\prod K_{w_j b_j}\right)\det\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ C(b_i,w_j) & & 0\end{pmatrix}$$

avec $e_j = (w_j, b_j)$

+ asymptotique

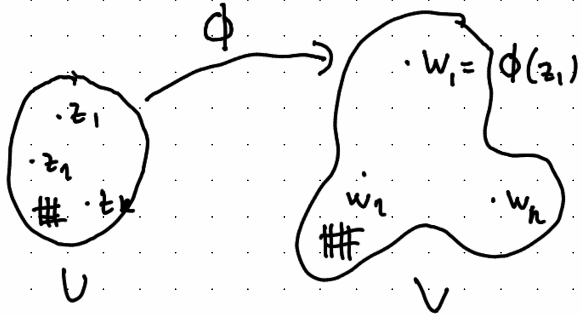
$\rightsquigarrow$ Théorème : $\mathrm{dist}(z_i,z_j) > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left[h^0_\varepsilon(z_1)\dots h^0_\varepsilon(z_k)\right] =$$

$$4^k \sum_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_k} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_k \int_{\gamma_1}\cdots\int_{\gamma_k} \det_{ij}\left(F_{\varepsilon_i\varepsilon_j}(z_i,z_j)\right) \prod dz_j^{(\varepsilon_j)}$$

$$z_j^{(\varepsilon_j)} = \begin{cases} z_j & \varepsilon_j = 1 \\ \bar{z}_j & \varepsilon_j = -1\end{cases}$$

toutes les intégrales sont invariants conform $\Rightarrow$ moments sont invariants conform.



$$\mathbb{E}\left[h_\varepsilon^0(z_1)\dots h_\varepsilon^0(z_k)\right] \text{ et } \mathbb{E}\left[h_\varepsilon^0(w_1)\dots h_\varepsilon^0(w_k)\right]$$

sur U

ont la même limite lorsque $\varepsilon \to 0$.

Pour identifier le champs limite calcul explicite dans le cas où $U = \mathbb{H}$ demi plan supérieur.

$$g_{\mathbb{H}}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\Big[\log|z_2-z_1| - \log|z_2-\bar{z}_1|\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z_2-z_1}{z_2-\bar{z}_1}\right|$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-\bar{z}_1}\right)\right)$$

$$\tilde{g}_{\mathbb{H}}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-\bar{z}_1}\right)$$

$$F_+(z_1,z_2) = \frac{2}{\pi(z_2-z_1)}$$

$$F_{\varepsilon_i\varepsilon_j}(z_i,z_j) = \frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon_i\varepsilon_j}{\left(z_j^{(\varepsilon_j)}-z_i^{(\varepsilon_i)}\right)}$$

Moments d'ordre ≥ 3

- **Lemme**: $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$m_{ii} = 0 \qquad m_{ij} = \frac{1}{x_i - x_j} \quad i \neq j$$

$$\det(M) = \sum_{\substack{\mathcal{Z} \text{ appariements} \\ \{\{z_1,z_2\},\dots,\{z_{n-1},z_n\}\}}} \frac{1}{(x_{z(1)}-x_{z(2)})^2 \cdots (x_{z(n-1)}-x_{z(n)})^2}$$

en particulier, $= 0$ si n impair

D// . developper le det M de M comme somme sur $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (sans pt fixe)

. regroupe les termes en fonction des supports des cycles. (qui donnent une partition de $\{1,\dots,n\}$),

on regarde un bloc de cette partition de taille ≥ 3

on doit sommer sur tous les cycles ayant ce support. (quitte à renuméroter : $\{1,\dots,k\}$)

$$\sum_{\substack{\sigma \text{ cycle} \\ \text{supporté sur} \\ \{1,\dots,k\}}} \frac{1}{(x_1 - x_{\sigma(1)}) \cdots (x_k - x_{\sigma(k)})}$$

symétrique en les x_j

$$= \frac{\text{numérateur.}}{\prod_{i<j} (x_j - x_i)}$$

Vandermonde totalement antisym.

le numérateur doit aussi être totalement antisymétrique de degré < Vandermonde

$\rightsquigarrow$ forcément le polynôme nul ne survivent que les partitions avec des tailles de blocs toutes égales à 2 (i.e σ appariement) $\square$

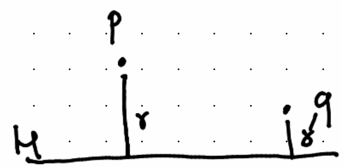
On reprend l'expression pour la limite des moments $\det_{ij} F_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(z_i, z_j)$ et de la forme de la matrice M du lemme.

$\rightsquigarrow$ tous les moments impairs sont nuls.

$\rightsquigarrow$ tous les moments s'expriment en fonction du moment d'ordre 2. (règle de Wick pour les moments d'un vecteur gaussien centré.

reste à calculer la covariance

• <u>Moment d'ordre 2</u>



on écrit la limite du 2e moment

$$\mathbb{E}\left[h^0(p)\, h^0(q)\right] = \frac{4}{\pi^2} \iint_{\gamma\ \gamma'} \dots$$

$$\left[-\frac{dz_1\, dz_2}{(z_2 - z_1)^2} + \frac{d\bar{z}_1\, dz_2}{(z_2 - \bar{z}_1)^2} + \frac{dz_1\, d\bar{z}_2}{(\bar{z}_2 - z_1)^2} - \frac{d\bar{z}_1\, d\bar{z}_2}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2} \right]$$

$$\mathbb{E}\left[h^0(p)\,h^0(q)\right] = \frac{4}{\pi^2}\iint_{\gamma\,\gamma'} \cdots$$

$$\left[-\frac{dz_1 dz_2}{(z_2-z_1)^2} + \frac{d\bar{z}_1 dz_2}{(z_2-\bar{z}_1)^2} + \frac{dz_1 d\bar{z}_2}{(\bar{z}_2-z_1)^2} - \frac{d\bar{z}_1 d\bar{z}_2}{(\bar{z}_2-\bar{z}_1)^2}\right]$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\,\mathrm{Re}\log\left(\frac{\bar{p}-q}{p-q}\right) = -\frac{16}{\pi}\, g_H(p,q)$$

C'est la covariance de $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ GFF.

Que reste-t-il à faire pour avoir vraiment la convergence de h^0_ε vers $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ GFF (faiblement, au sens des distributions)?

pour le 2e moment.

φ, ψ 2 fonctions tests

$$\mathbb{E}\left[\langle h^0_\varepsilon, \varphi\rangle \langle h^0_\varepsilon, \psi\rangle\right] = \varepsilon^4 \sum_{v^\varepsilon, w^\varepsilon} \mathbb{E}\left[h^\varepsilon_0(v^\varepsilon)\, h^\varepsilon_0(w^\varepsilon)\right]\varphi(v^\varepsilon)\,\psi(w^\varepsilon)$$

reste à comprendre (montrer que c'est négligeable) la contribution des points v^ε et w^ε qui sont proches

$\square$