Modèles de dimères et pavages aléatoires
Exercices

Cédric Boutillier

Avril 2021

1 Dénombrement des pavages par dominos d'un échiquier pair

On fixe deux entiers strictement positifs m et n et on cherche à dénombrer les pavages par dominos du rectangle $2m \times 2n$ (ou de façon équivalente les configurations de dimères de la grille $G_{2m,2n} = \{1, \dots, 2m\} \times \{1, \dots, 2n\}$).

Au lieu de calculer directement le déterminant de la matrice de Kasteleyn K, (dont les lignes, resp. colonnes sont indexées par sommets blancs, resp. noirs), nous calculons ici le déterminant de la matrice B, ayant la structure en blocs suivante, correspondant à la bipartition des sommets :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & K \\ {}^tK & 0 \end{pmatrix},$$

1. Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de K.
2. La règle des signes pour les opérateurs de Kasteleyn sur les graphes bipartis peut être généraliser pour utiliser des nombres complexes. Vérifier que le choix revenant à mettre 1 sur les arêtes horizontales et i sur les arêtes verticales de $G_{2m,2n}$ est correct, dans le sens que le produit alterné autour de chaque face f a le même argument que $(-1)^{\deg(f)/2-1}$.
3. On repère maintenant chaque sommet indépendamment de sa couleur par ses coordonnées cartésiennes $x \in \{1, \dots 2m\}$ et $y \in \{1, \dots, 2n\}$. Soit g une fonction définie sur les sommets de $G_{2m,2n}$. Montrer que pour tout (x, y),

$$(Bg)_{(x,y)} = g_{(x-1,y)} + g_{(x+1,y)} + ig_{(x,y-1)} + ig_{(x,y+1)},$$

   avec la convention que g est nul si les indices sont en dehors des valeurs permises.
4. En déduire que B s'écrit $B = L_{2m} \otimes I_{2n} + iI_{2m} \otimes L_{2n}$, où L_k est la matrice

d'adjacence du graphe ligne de longueur k :

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer les valeurs propres de L_k.
6. En déduire les valeurs propres de B, puis le déterminant de B.
7. Exprimer le nombre de configurations de dimères de $G_{2m,2n}$.
8. Déterminer la limite, sous forme d'une intégrale double, de $\frac{1}{2mn}\log G_{2m,2n}$ (entropie par dimère) lorsque m et n tendent vers l'infini.
9. En déduire que cette limite vaut $\frac{2\mathcal{G}}{\pi}$, où $\mathcal{G} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ est la constante de Catalan. Indication : on pourra utiliser que si a et b sont deux réels positifs, tels que $a > b$,
$$\int_0^{2\pi} \log(a + b\cos\phi)\frac{d\phi}{2\pi} = \log(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^b}}{2}).$$
10. Qu'est-ce qui change dans le calcul pour $G_{2m+1,2n}$ et $G_{2m,2n+1}$?

2 Opérations élémentaires sur les dimères

1. Soit G un graphe fini, biparti avec une fonction de poids ν sur les arêtes.
   — Comment est modifiée la fonction de partition
   — Lorsque G est planaire, comment la matrice de Kasteleyn de G est modifiée par cette opération ?
   — Comment sont modifiées les probabilités locales ?
2. Soit G un graphe avec un sommet de degré 2, et G' le graphe obtenu en *fusionnant* ce sommet de degré 2 avec ses voisins (voir figure 1).
   — Trouver une bijection entre les configurations de dimères de G et celles de G'.
   — Trouver des poids sur les arêtes de G' pour que cette bijection préserve le poids des configurations de dimères
3. Soit G et G' deux graphes qui diffèrent dans un petit voisinage local comme sur la figure 2. Cette transformation est appelée historiquement *renouvellement urbain* ou plus récemment *spider move*.
   — Trouver une correspondence locale entre les configurations de dimères de G et celles de G'.
   — Trouver a et b telles que les fonctions de partitions $Z(G)$ et $Z(G')$ de G et G' respectivement vérifient $Z(G) = bZ(G')$.

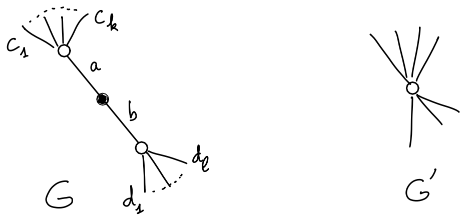

FIGURE 1 – Fusion d'un sommet de degré 2.

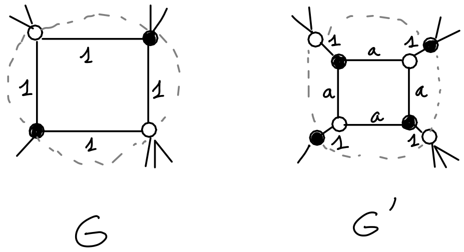

FIGURE 2 – *Renouvellement urbain* ou une version du *spider move*.

3 Dénombrement des pavages du diamant aztèque I

Le *diamant aztèque* A_n de taille n est le sous-graphe du réseau carré contenu dans une boule L^1 de rayon n, centrée en une face carrée. Voir figure 3 pour une représentation de A_3. Notons Z_n le nombre de configurations de dimères d'A_n.

Le but de cet exercice est de trouver une formule pour Z_n.

— Imaginons que les faces d'A_n sont colorées à la manière d'un échiquier, de sorte que les faces au bord soient noires. Appliquer la transformation d'urban renewal sur toutes les faces noires du graphe.
— Fusionner les sommets de degrés 2 du graphe ainsi obtenu, et supprimer les arêtes « pendantes »(avec un sommet de degré 1).
— En déduire une relation entre Z_n et Z_{n+1}.
— Obtenir une formule fermée pour Z_n en fonction de n.

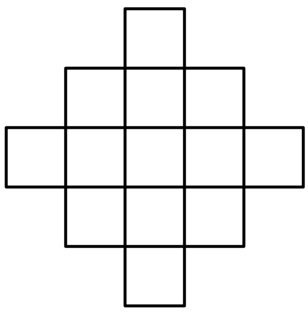

FIGURE 3 – Un diamant aztèque de taille 3.

4 Relation surprenante pour la probabilité d'un double domino

Soit G un sous-graphe « simplement connexe »fini de $\mathbb{Z}^2$. On considère la mesure uniforme sur les configuration de dimères de G. Soit w, w' deux sommets blancs de G et b et b' deux sommets noirs tels que w, b, w', b' soient au bord d'une même face carrée. On suppose que $e = (w, b)$ et $e' = (w', b')$ sont deux arêtes horizontales et e est en dessous de e'. On note $f = (w, b')$ et $f' = (w', b)$ les deux autres arêtes de cette face carrée.

1. En utilisant la formule déterminantale pour les stastistiques locales pour les dimères, montrer que

$$\mathbb{P}(e,\, e' \text{ dimères}) = \mathbb{P}(e \text{ dimère}) \times \mathbb{P}(e' \text{ dimère}) + \mathbb{P}(f \text{ dimère}) \times \mathbb{P}(f' \text{ dimère}).$$

2. On veut retrouver cette relation de façon combinatoire. Notons Z le nombre de configurations de dimères de G. De même, on note Z_e le nombre de configurations de G dans lequelles e est un dimère (ou de façon équivalente le nombre de configurations de $G \setminus \{b, w\}$), etc. Montrer que la relation ci-dessus est équivalente à :

$$Z \times Z_{e,e'} = Z_e \times Z_{e'} + Z_f \times Z_{f'}.$$

3. Soit M une configuration de dimères de G (en rouge) et M' une configuration de $G \setminus \{b, w, b', w'\}$ (en bleu). Montrer que la superposition de M et de M' est constitué de doubles arêtes, de cycles alternants, et de deux chemins connectant
   — soit w à b et w' à b' ;
   — soit w à b' et w' à b.
4. Montrer que dans le premier, en échangeant les couleurs rouge et bleues le long des deux chemins, on obtient une configuration de dimère de $G \setminus \{w, b\}$

5 Dénombrement des pavages du diamant aztèque II

En utilisant une idée similaire à ce qu'on a fait dans l'exercice ci-dessus, montrer que lorsque l'on superpose une configuration de dimères d'un diamant aztèque de taille $n+1$ avec celle d'un diamant de taille $n-1$ (tous les deux centrés à l'origine), on peut en regardant comment les points du bord sont appariées, on peut redécomposer en deux configurations de dimères du diamant de taille n
— soit légèrement décalés l'un au dessus de l'autre,
— soit légèrement décalés l'un à côté de l'autre,
tout en restant à l'intérieur du diamant de taille $n+1$. En déduire que si Z_n est le nombre de configurations de dimères du diamant aztèque de taille n, alors

$$Z_{n+1} \times Z_n = 2Z_n^2.$$

En déduire une nouvelle fois la formule pour Z_n.

6 Retour sur les phases gelées

7 Bijection de Temperley

Comment adapter la bijection de Temperley
— pour des échiquiers dont (au moins) un des côtés est pair ?
— pour des échiquiers aux dimensions paires sur le tore ?