

Correction du partiel du 30 mars 2018

④ Questions de cours

- 1 (a) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est indépendante si quelque soit $I \subseteq \mathbb{N}$ avec $\#I < +\infty$ on a $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$
- 1 (b) Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors Z a la densité $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- 1 (c) Si (X_n) et X sont une suite de v.a et une v.a de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on dit que X_n converge presque sûrement si $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$
- 1 (d) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. indépendantes et de même loi et que $X_i \in \mathcal{L}^1$ (c'est-à-dire $E|X_i| < +\infty$) alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow EX$, presque sûrement.

⑤ Exercice 1

(a) La fonction génératrice de X est

$$g_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (1-p+ps)^n$$

On en déduit que :

$$1 \quad E[X] = g'_X(1) = np(1-p+ps)^{n-1} \Big|_{s=1} = np$$

De même on a $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X(X-1)] + EX - E[X]^2$ d'où

$$\text{Comme} \quad = g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2$$

$$g''_X(1) = n(n-1)p^2(1-p+ps)^{n-2} \Big|_{s=1} = n(n-1)p^2 \text{ on obtient}$$

$$1 \quad \text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

$$(b) \circ \text{ Si } i=0 \text{ alors } P(Y=k | X=0) = P(U=k | X=0) = P(U=k) = \frac{1}{n+1}$$

$$\circ \text{ Si } i \in \{1, \dots, n\} \text{ alors } P(Y=k | X=i) = P(X=k | X=i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Finalement

$$1 \quad P(Y=k | X=i) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } i=0 \\ 1 & \text{si } i=k \geq 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 1, i \neq k \end{cases}$$

(c) On déduit de (b) que, quelque soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned} 1 \quad P(Y=k) &= \sum_{i=0}^n P(Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^n P(Y=k | X=i) P(X=i) \\ &= \frac{1}{n+1} P(X=0) + \sum_{i=1}^n 1_{\{i=k\}} P(X=i) \quad \text{car il faut que } k \geq 1. \\ &\stackrel{(X)}{\longrightarrow} = \frac{1}{n+1} P(X=0) + P(X=k) 1_{\{k \geq 1\}} \end{aligned}$$

Donc.

$$\boxed{P(Z=k) = \frac{(1-p)^m}{m+1} + \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} 1_{\{k \geq 1\}}}$$

$$\begin{aligned} EY &= \sum_{k=0}^m k P(Y=k) = \sum_{k=1}^m k P(Y=k) = \sum_{k=1}^m k \left\{ \frac{1}{m+1} P(X=0) + P(X=k) \right\} \quad (*) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{m+1} P(X=0) + \sum_{k=1}^m k P(X=k) \\ &= \frac{1}{m+1} (1-p)^m \frac{m(m+1)}{2} + EX = \frac{m}{2} (1-p)^m + mp \end{aligned}$$

1 D'où $\boxed{EY = \frac{m}{2} (1-p)^m + mp}$

⑥ Exercice 2

1 (a) On a $\boxed{P(Y=k) = \theta^k (1-\theta)}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1 $\boxed{g_Y(s) = E[s^Y] = \sum_{k \geq 0} \theta^k (1-\theta) s^k = \frac{1-\theta}{1-s\theta}}$

(b) Si $x \geq 0$ $F_X(x) = P(X \leq x)$

1 $= \int_0^x f_X(u) du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} 1_{\{u \geq 0\}} du = [-e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

et si $x < 0$ $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$

1 donc $\boxed{F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) 1_{[0, +\infty[}(x)}$

1 $\boxed{P(Z=k) = P(\lceil X \rceil - 1 = k) = P(\lceil X \rceil = k+1)}$

$= P(k < X \leq k+1) = P(X \leq k+1) - P(X \leq k) = \underline{F_X(k+1) - F_X(k)}$

Finalement $P(Z=k) = 1 - e^{-\lambda(k+1)} - \{1 - e^{-\lambda k}\}$
 $= e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda})$

1 d'où on déduit que Z est géométrique de paramètre $e^{-\lambda}$.

[Remarque: si on a décidé que $P(Y=k) = (1-\theta)^k \theta$ pour la définition de la géométrique, alors Z est géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.]

⑧ Exercice 3

(a) Comme g est strictement positive la fonction F est strictement croissante:

1 $\forall x' > x$ on a $F(x') - F(x) = \int_x^{x'} g(u) du - \int_{-\infty}^x g(u) du = \int_x^{x'} g(u) du > 0$.

Par conséquent les limites en $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$ existent et valent:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du = 1$.

Comme F est continue c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1]$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\boxed{P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x))}$ ↖ $F \uparrow \uparrow$

$$= \int_0^{F(x)} 1_{[0,1]}(u) du = F(x) = \int_0^x p(u) du$$

Par conséquent X est une v.a. de densité p . car $F(x) \in [0,1]$

(c) i. Pour que p soit une densité on doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1$.

Cependant : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+t^2} dt = c [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty}$
 $= c \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} = c\pi$ d'où $\boxed{c = 1/\pi}$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} [\arctan t]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctan x + \frac{\pi}{2} \right\}}$$

ii. Par la question a) F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0,1]$. De plus
 $F(x) = u \iff \frac{1}{\pi} \left\{ \arctan x + \frac{\pi}{2} \right\} = u \iff x = \tan\left(\pi u - \frac{\pi}{2}\right)$ d'où

On déduit de (a) que $X = \tan\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right)$ est une v.a. de densité p .
 donc une v.a. de Cauchy.

Quelque soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\tan(\pi(U-\tfrac{1}{2})))] &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(\tan(\pi(u-\tfrac{1}{2}))) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tan(\pi(u-\tfrac{1}{2}))) du \\ &\quad \text{u} - \frac{1}{2} = s, du = ds \quad \text{tan}(u+\pi) = \tan u \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(\tan(\pi(u+\tfrac{1}{2}))) du + \int_0^{\frac{1}{2}} f(\tan(\pi s)) ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\tan(\pi s)) ds + \int_0^{\frac{1}{2}} f(\tan(\pi s)) ds \\ &= \int_0^1 f(\tan(\pi u)) du \end{aligned}$$

Donc $\tan(\pi u)$ et $\tan(\pi(u-\frac{1}{2}))$ ont même loi.

(d) De même : $x = -\frac{1}{\theta} \ln(1-u) \iff u = 1 - e^{-\theta x} = F(x)$ avec
 $F(x) = \int_0^x \theta e^{-\theta u} du$. La variable aléatoire $F^{-1}(U) = -\frac{1}{\theta} \ln(1-U)$ a

donc la densité $p(u) = \theta e^{-\theta u} 1_{[0,+\infty]}(u)$: $-\frac{1}{\theta} \ln(1-U) \sim \text{Exponentielle}(\theta)$

Comme $1-U \sim \text{uniforme sur } [0,1]$ quand $U \sim \text{uniforme } [0,1]$

on en déduit que $-\frac{1}{\theta} \ln(U) \sim \text{Exponentielle}(\theta)$