Examen du 8 janvier 2019

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure **3 heures**. *Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.*

Exercice 1. On pose $X_0 = 1$ et on définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_{n+1} = 2U_nX_n$ où $(U_i)_{i\geq 0}$ est une famille indépendante de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$.
(a) Montrer que X_n est une martingale par rapport à une filtration que l'on spécifiera.
(b) Discuter la convergence de X_n dans L^2.
(c) Discuter la convergence presque sûre de X_n.
(d) Déterminer la limite presque sûre de X_n (on pourra considérer $Y_n = \log X_n$).
(e) Discuter la convergence de X_n dans L^1.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov (canonique) à valeurs dans E dénombrable. On suppose que la chaîne est irréductible et qu'il existe une mesure de probabilité π sur E qui soit invariante.

On fixe $x \in E$, et on considère un temps d'arrêt S tel que $\mathbb{P}_x$ presque sûrement, on a $1 \leq S < \infty$ et $X_S = x$. On suppose de plus que $\mathbb{E}_x[S] < \infty$. Plus généralement, on définit la suite de temps d'arrêts successifs $S_2 = S + S\circ\theta_S$, $S_3 = S_2 + S\circ\theta_{S_2}$, ..., $S_{i+1} = S_i + S\circ\theta_{S_i}$, etc. On pose $S_0 = 0$ par convention.
(a) Que peut-on dire de la convergence presque sûre et dans L^1 de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{X_k=y}?$$

(b) Montrer que, sous $\mathbb{P}_x$, les variables aléatoires

$$\sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1}\mathbf{1}_{X_k=y} \quad i\geq 0,$$

sont indépendantes et de même loi.
(c) A l'aide de la loi forte des grands nombres et de la question **(a)**, montrer que, quelque soit $y \in E$,

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{S-1}\mathbf{1}_{X_k=y}\right] = \pi(y)\mathbb{E}_x[S]\,.$$

(d) Pour $z \in E$, on note $T_z = \inf\{n \geq 1 : X_n = z\}$. Soit S le premier temps de passage par x après avoir visité y. Exprimer $\mathbb{E}_x[S]$ en fonction de T_x et T_y.
(e) En considérant le temps d'arrêt S, montrer que pour tous $x \neq y \in E$ on a

$$\pi(y)\mathbb{P}_y(T_x < T_y)(\mathbb{E}_x(T_y) + \mathbb{E}_y(T_x)) = 1\,.$$

Exercice 3. Soit X une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état infini dénombrable E et de matrice de transition Q. On rappelle qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est Q-surharmonique en un point x de E si $f(x) \geq \sum_{y\in E} f(y)Q(x,y)$.
(a) Montrer que si f est Q-surharmonique et telle que $\mathbb{E}|f(X_n)| < \infty$ pour tout n, alors $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une surmartingale. (Ne pas invoquer le résultat du cours !)

On suppose maintenant qu'il existe un ensemble fini $F \subset E$ et $\phi : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction Q-surharmonique sur $E \setminus F$ telle que quelque soit $M > 0$ l'ensemble de niveau $L_M = \{x \in E : \phi(x) \leq M\}$ soit de cardinal fini. On définit $\tau_F = \inf\{n \geq 1 : X_n \in F\}$ and $\tau_M = \inf\{n \geq 1 : \phi(X_n) \geq M\}$.
(b) Montrer que si $x_0 \in E$ on a $\mathbb{P}_{x_0}(\tau_M < \infty) = 1$ pour tout $M > \phi(x_0)$.
(c) En considérant le processus $(\phi(X_{n\wedge\tau_F\wedge\tau_M}))_{n\geq 0}$, montrer que quelque soit $x_0 \in E\setminus F$ et quelque soit $M > \phi(x_0)$ on a $\phi(x_0) \geq M\mathbb{P}_{x_0}(\tau_M < n\wedge\tau_F)$ pour tout n.

(d) En déduire que $\mathbb{P}_{x_0}(\tau_F < \infty) = 1$ pour $x_0 \in E \setminus F$.
(e) Montrer que la chaîne est récurrente.

Exercice 4. On considère la procédure suivante pour maintenir une liste de fiches : l'ensemble des fiches est indexé par l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$; chaque fois qu'une requête est faite pour accéder à une fiche donnée on replace celle-ci au début de la liste après consultation. Par ailleurs, les indices des fiches demandées sont indépendants et de loi donnée par $(p_i)_{0 \le i \le n}$, $\sum_i p_i = 1$. On suppose que $p_0 \ge p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_n \ge 0$.

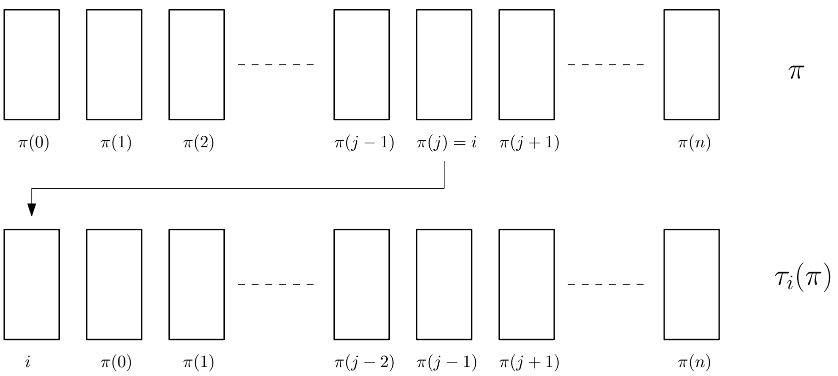
A chaque instant, l'ordre des fiches est donné par une permutation de E ; soit $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des bijections de E dans E. Pour $i \in E$, on note $\tau_i : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ l'operateur qui prend la fiche numéro i et la place au début de la liste : en d'autres termes, pour $\pi \in \mathbb{S}_n$, $\tau_i(\pi)$ est obtenu à partir de π de la manière suivante (voir la figure) :

$$\tau_i(\pi)(\ell) = \begin{cases} i & \text{si } \ell = 0 \\ \pi(\ell - 1) & \text{si } 1 \le \ell \le \pi^{-1}(i) \\ \pi(\ell) & \text{si } \ell > \pi^{-1}(i)\,. \end{cases}$$

La matrice de transition Q de la chaîne de Markov sur $\mathbb{S}_n$ associée à cette procédure est donc donnée par

$$Q(\pi, \tau_i(\pi)) = p_i, \qquad \pi \in \mathbb{S}_n, i \in E\,,$$

toutes les autres transitions étant de probabilité nulle.



(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov soit irreductible.

Dans toute la suite, on suppose la condition précédente satisfaite, et donc la chaîne irréductible.

(b) Quelle est la période de la chaîne ?
(c) La chaîne est-elle réversible ?
(d) Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité invariante que l'on notera μ.

On note maintenant $(X_k)_{k \ge 0}$ la chaîne de Markov canonique associée à cette matrice de transition.

(e) Montrer que les variables aléatoires $(X_k(0))_{k \ge 1}$ sont indépendantes et de même loi que l'on spécifiera.
(f) Soit $R_i = \{\pi \in \mathbb{S}_n : \pi(0) = i\}$ et $T_i = \inf\{k \ge 1 : X_k \in R_i\} = \inf\{k \ge 1 : X_k(0) = i\}$. Donner la loi de T_i sous $\mathbb{P}_\pi$ pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$.
(g) Soit $T = \sup_{i \in E} T_i$. Montrer que $\mathbb{P}_\pi(T > k) \le (n+1)(1 - p_n)^k$.

On considère la paire de chaînes couplées suivantes : $(X_k^1, X_k^2)_{k \ge 0}$ telle que les deux chaînes co-ordonnées $(X_k^1)_{k \ge 0}$ et $(X_k^2)_{k \ge 0}$ suivent les mêmes transitions, c'est-à-dire que quelque soit $\pi, \pi' \in \mathbb{S}_n$ conditionnellement à $(X_k^1, X_k^2) = (\pi, \pi')$ on a $(X_{k+1}^1, X_{k+1}^2) = (\tau_i(\pi), \tau_i(\pi'))$ avec probabilité p_i, $i \in E$.

(h) Montrer que l'unique mesure μ^2 sur $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ telle que $\mu^2(\pi, \pi) = \mu(\pi)$ pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$ est stationaire pour la chaîne $(X_k^1, X_k^2)_{k \ge 0}$.
(i) Montrer que μ est la loi de X_T et que $d_{\mathrm{TV}}(\mu, Q^k(\pi, \cdot)) \le 2(n+1)(1 - p_n)^k$.