Sorbonne Université
UE 4M011 – Probabilités avancées

Master de Mathématiques M1
Année 2018–2019

Examen du 8 janvier 2019

Le sujet comporte 2 pages. L'épreuve dure **3 heures**. *Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.*

Exercice 1. On pose $X_0 = 1$ et on définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_{n+1} = 2U_nX_n$ où $(U_i)_{i\geq 0}$ est une famille indépendante de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$.
(a) Montrer que X_n est une martingale par rapport à une filtration que l'on spécifiera.
(b) Discuter la convergence de X_n dans L^2.
(c) Discuter la convergence presque sûre de X_n.
(d) Déterminer la limite presque sûre de X_n (on pourra considérer $Y_n = \log X_n$).
(e) Discuter la convergence de X_n dans L^1.

Solution

(a) Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_{n-1})$. Alors X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Pour tout $n \geq 0$, $|X_n| \leq 2^n$ et donc X_n est intégrable. De plus, presque sûrement, comme X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et U_n indépendante de $\mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[2U_nX_n|\mathcal{F}_n] = 2X_n\mathbb{E}[U_n|\mathcal{F}_n] = 2X_n\mathbb{E}[U_n] = X_n \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Comme $X_n \leq 2^n$, X_n^2 est intégrable pour tout $n \geq 0$ et $\mathbb{E}[X_{n+1}^2] = 4\mathbb{E}[U_n^2]\mathbb{E}[X_n^2] = \frac{4}{3}\mathbb{E}[X_n^2]$ puisque $\int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$. Il s'ensuit par une recurrence immédiate que $\mathbb{E}[X_n^2] = (4/3)^n$. Par conséquent, (X_n) ne converge pas dans L^2.
(c) X_n est une martingale positive, elle converge donc presque sûrement vers X_∞ qui est finie avec probabilité 1.
(d) On a $X_n = 2^n \prod_{i=0}^{n-1} U_i$ donc

$$Y_n = \log X_n = n \log 2 + \sum_{i=0}^{n-1} \log U_i.$$

Comme $\mathbb{E}[|\log U|] = \mathbb{E}[-\log U] = 1 < \infty$ et que les $(\log(U_i))_{i\geq 0}$ sont i.i.d. par la loi des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log U_i \to -1$ presque sûrement. Par conséquent, lorsque $n \to \infty$,

$$Y_n = n(\log 2 - 1) + o(n) \qquad \text{presque sûrement}\,.$$

Finalement, puisque $\log 2 < 1$, $X_n = \exp(Y_n) = \exp(n[\log 2 - 1] + o(n)) \to 0$ avec probabilité 1.
(e) La limite de X_∞ de X est nulle p.s., et donc $\mathbb{E}[X_\infty] = 0$. Comme $\mathbb{E}X_n = 1$ pour tout $n \geq 0$, la suite (X_n) ne converge donc pas dans L^1.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov (canonique) à valeurs dans E dénombrable. On suppose que la chaîne est irréductible et qu'il existe une mesure de probabilité π sur E qui soit invariante.

On fixe $x \in E$, et on considère un temps d'arrêt S tel que $\mathbb{P}_x$ presque sûrement, on a $1 \leq S < \infty$ et $X_S = x$. On suppose de plus que $\mathbb{E}_x[S] < \infty$. Plus généralement, on définit la suite de temps d'arrêts successifs $S_2 = S + S\circ\theta_S$, $S_3 = S_2 + S\circ\theta_{S_2}$, ..., $S_{i+1} = S_i + S\circ\theta_{S_i}$, etc. On pose $S_0 = 0$ par convention.
(a) Que peut-on dire de la convergence presque sûre et dans L^1 de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=y}?$$

(b) Montrer que, sous $\mathbb{P}_x$, les variables aléatoires

$$\sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1} \mathbf{1}_{X_k=y} \quad i \geq 0,$$

sont indépendantes et de même loi.
(c) A l'aide de la loi forte des grands nombres et de la question **(a)**, montrer que, quelque soit $y \in E$,

$$\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_k=y}\Bigg] = \pi(y)\mathbb{E}_x[S]\,.$$

(d) Pour $z \in E$, on note $T_z = \inf\{n \geq 1 : X_n = z\}$. Soit S le premier temps de passage par x après avoir visité y. Exprimer $\mathbb{E}_x[S]$ en fonction de T_x et T_y.
(e) En considérant le temps d'arrêt S, montrer que pour tous $x \neq y \in E$ on a

$$\pi(y)\mathbb{P}_y(T_x < T_y)(\mathbb{E}_x(T_y) + \mathbb{E}_y(T_x)) = 1\,.$$

Solution

(a) La chaîne est irréductible et possède une mesure de probabilité invariante π, elle est donc récurrente positive et on a, quelque soit $x, y \in E$, la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=y}$$

converge vers $\pi(y)$ p.s. et par conséquent dans L^1 puisqu'elle est bornée.
(b) Le fait que les variables aléatoires sont i.i.d. découle de la propriété de Markov forte et d'une récurrence. On note $\xi_i = \sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1} \mathbf{1}_{X_k=y}$. Pour tout $i \geq 1$, et toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée on a, comme $\xi_i = \xi_1 \circ \theta_{S_i}$, $S_i < \infty$ et $X_{S_i} = x$ $\mathbb{P}_x$-p.s.,

$$\mathbb{E}_x[f(\xi_i)|\mathcal{F}_{S_i}] = \mathbb{E}_x[f(\xi_1 \circ \theta_{S_i})\ |\mathcal{F}_{S_i}] = \mathbb{E}_x[f(\xi_1)]\,.$$

Comme ξ_i est $\mathcal{F}_{S_{i+1}}$-mesurable, on en déduit par récurrence que, pour tout $i \geq 1$, et toutes fonctions mesurables bornées $f_1, f_2, \ldots, f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}_x\Bigg[\prod_{j=1}^{i} f_j(\xi_j)\Bigg] = \mathbb{E}_x\Bigg[\prod_{j=1}^{i-1} f_j(\xi_j)\mathbb{E}_x[f_i(\xi_i)|\mathcal{F}_{S_i}]\Bigg] = \mathbb{E}_x\Bigg[\prod_{j=1}^{i-1} f_j(\xi_j)\Bigg] \times \mathbb{E}_x[f_i(\xi_1)] = \prod_{j=1}^{i}\mathbb{E}_x[f_j(\xi_1)],$$

d'où les $(\xi_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi.
(c) Par **(b)**

$$\sum_{k=0}^{S_i-1} \mathbf{1}_{X_k=y} = \sum_{j=0}^{i-1}\left\{\sum_{k=S_j}^{S_{j+1}-1} \mathbf{1}_{X_k=y}\right\}$$

est une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi, qui sont de plus intégrables car dominées par S. Il en est de même pour $S_i = \sum_{j=0}^{i-1} S \circ \theta_{S_j}$. Par conséquent, par la loi des grands nombres, lorsque $i \to \infty$, on a $\mathbb{P}_x$-p.s. $S_i \sim i\mathbb{E}_x S$ et

$$\sum_{k=0}^{S_i-1} \mathbf{1}_{X_k=y} \sim i\mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_k=y}\Bigg].$$

Par conséquent, d'après **(a)** avec $n = S_i$,

$$\pi(y) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{S_i}\sum_{k=0}^{S_i-1} \mathbf{1}_{X_k=y} = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S]} \cdot \mathbb{E}_x\Bigg[\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_k=y}\Bigg].$$

(d) Par définition, on a $T_y \leq S$ et $S = T_y + T_x \circ \theta_{T_y}$. Par conséquent, par la propriété de Markov forte, et le fait que $X_{T_y} = y$ $\mathbb{P}_x$-p.s.,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[S] &= \mathbb{E}_x[T_y + T_x \circ \theta_{T_y}] \\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[T_y + T_x \circ \theta_{T_y} \mid \mathcal{F}_{T_y}]] \\
&= \mathbb{E}_x[T_y + \mathbb{E}_y[T_x]] \\
&= \mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x]\,.
\end{aligned}$$

Notons que S est intégrable puisque la chaîne est recurrente positive. Pour le vérifier : avec $x \neq y$: $\mathbb{E}_x[T_y] = \mathbb{E}_x[T_y \mathbf{1}_{T_y < T_x}] + \mathbb{E}_x[T_y \mathbf{1}_{T_y \geq T_x}]$ alors que le premier terme est au plus $\mathbb{E}_x[T_x]$ et $\mathbb{E}_x[T_y \mathbf{1}_{T_y \geq T_x}] = \mathbb{E}_x[T_y \circ \theta_{T_x} \mathbf{1}_{T_y \geq T_x}] = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_y \leq T_x} \mathbb{E}_x[T_y \circ \theta_{T_x} | \mathcal{F}_{T_x}]] = \mathbb{P}_x(T_x \leq T_y)\mathbb{E}_x[T_y]$ par la propriété de Markov forte. Finalement, $\mathbb{E}_x[T_y] \leq \mathbb{E}_x[T_x]/\mathbb{P}_x(T_y < T_x) < \infty$ puisque'il existe k tel que $\mathbb{P}_x(X_k = y, k < T_x) > 0$ (il y a un chemin de probabilité positive de x à y et le chemin minimal ne repasse pas par x) et $\mathbb{E}_x[T_x] = 1/\pi(x) < \infty$.

(e) La variable aléatoire $G = \sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_k = y}$ compte le nombre de passages par y avant de toucher x (après au moins une visite en y) ; sous $\mathbb{P}_x$, G est géométrique de paramètre $\mathbb{P}_y(T_x < T_y)$ (à valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$). En effet, avec $T_y^2 = \inf\{n > T_y : X_n = y\}$ et plus généralement $T_y^{i+1} = \inf\{n > T_y^i : X_n = y\}$, on a $G = \max\{i \geq 1 : T_y^i < S\}$. On a donc $\mathbb{P}_x(G \geq k) = \mathbb{P}_x(T_y^k < S) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_y^k < S}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_y^k < S} | \mathcal{F}_{T_y}]]$. Cependant, $T_y^k = T_y + T_y^{k-1} \circ \theta_{T_y}$ et $S = T_y + T_x \circ \theta_{T_y}$. Il s'ensuit que, par la propriété de Markov forte,

$$\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_y^k < S} | \mathcal{F}_{T_y}] = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_y^{k-1} < T_x} \circ \theta_{T_y} | \mathcal{F}_{T_y}] = \mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{T_y^{k-1} < T_x}] = \mathbb{P}_y(T_y^{k-1} < T_x)\,.$$

De même, pour $k \geq 2$, $T_y^{k-1} < T_x$ si et seulement si $T_y < T_x$ et $T_y^{k-2} \circ \theta_{T_y} < T_x \circ \theta_{T_y}$. Donc $\mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{T_y^{k-1} < T_x} | \mathcal{F}_{T_y}] = \mathbb{E}_y[(\mathbf{1}_{T_y^{k-2} < T_x} \circ \theta_{T_y}) \mathbf{1}_{T_y < T_x} | \mathcal{F}_{T_y}]$. Or $\{T_y < T_x\}$ est $\mathcal{F}_{T_y}$-mesurable : pour tout $n \geq 1$, $\{T_y < T_x\} \cap \{T_y = n\} = \{n < T_x\} \cap \{T_y = n\} \in \mathcal{F}_n$ car T_x et T_y sont des temps d'arrêt. Par la propriété de Markov, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{T_y^{k-1} < T_x}] &= \mathbb{E}_y[\mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{T_y^{k-1} < T_x} | \mathcal{F}_{T_y}]] \\
&= \mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{T_y < T_x} \mathbb{E}_y[\mathbf{1}_{T_y^{k-2} < T_x} \circ \theta_{T_y} | \mathcal{F}_{T_y}]] \\
&= \mathbb{P}_y(T_y < T_x)\mathbb{P}_y(T_y^{k-2} < T_x).
\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne alors $\mathbb{P}_y(G \geq k) = \mathbb{P}_y(T_y < T_x)^{k-1}$. Par conséquent, $\mathbb{E}_x[G] = 1/\mathbb{P}_y(T_x < T_y)$. En utilisant les questions **(b)** et **(c)**, on obtient $\pi(y)[\mathbb{E}_x(T_y) + \mathbb{E}_y(T_x)] = 1/\mathbb{P}_y(T_x < T_y)$ comme désiré.

Exercice 3. Soit X une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état infini dénombrable E et de matrice de transition Q. On rappelle qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est Q-surharmonique en un point x de E si $f(x) \geq \sum_{y \in E} f(y)Q(x, y)$.

(a) Montrer que si f est Q-surharmonique et telle que $\mathbb{E}|f(X_n)| < \infty$ pour tout n, alors $(f(X_n))_{n \geq 0}$ est une surmartingale. (Ne pas invoquer le résultat du cours !)

On suppose maintenant qu'il existe un ensemble fini $F \subset E$ et $\phi : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction Q-surharmonique sur $E \setminus F$ telle que quelque soit $M > 0$ l'ensemble de niveau $L_M = \{x \in E : \phi(x) \leq M\}$ soit de cardinal fini. On définit $\tau_F = \inf\{n \geq 1 : X_n \in F\}$ and $\tau_M = \inf\{n \geq 1 : \phi(X_n) \geq M\}$.

(b) Montrer que si $x_0 \in E$ on a $\mathbb{P}_{x_0}(\tau_M < \infty) = 1$ pour tout $M > \phi(x_0)$.

(c) En considérant le processus $(\phi(X_{n \wedge \tau_F \wedge \tau_M}))_{n \geq 0}$, montrer que quelque soit $x_0 \in E \setminus F$ et quelque soit $M > \phi(x_0)$ on a $\phi(x_0) \geq M\mathbb{P}_{x_0}(\tau_M < n \wedge \tau_F)$ pour tout n.

(d) En déduire que $\mathbb{P}_{x_0}(\tau_F < \infty) = 1$ pour $x_0 \in E \setminus F$.

(e) Montrer que la chaîne est récurrente.

Solution

(a) Comme f est bornée, $f(X_n)$ est intégrable pour tout $n \geq 0$. Par ailleurs, $(f(X_n))_{n \geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Enfin, pour tout $x \in E$, comme $X_{n+1} = X_1 \circ \theta_n$, par la propriété de Markov,

$$\mathbb{E}_x[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_x[f(X_1) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[f(X_1)] = \sum_{y \in E} f(y)Q(X_n, y) \leq f(X_n),$$

puisque f est surharmonique, et donc $(f(X_n))_{n \geq 0}$ est une surmartingale.

(b) Par hypothèse, la chaîne est irréductible et L_M est de cardinal fini. Cependant, soit la chaîne est récurrente auquel cas $\tau_M < \infty$ $\mathbb{P}_{x_0}$-p.s. parce que chaque point de E est visité infinitement souvent, soit elle est transiente et $\tau_M < \infty$ $\mathbb{P}_{x_0}$-p.s. car L_M n'est visité qu'un nombre fini de fois. Dans tous les cas, $\mathbb{P}_{x_0}(\tau_M < \infty) = 1$.

(c) La fonction ϕ est surharmonique en tout $x \in L_M \setminus F$. Par conséquent, $(\phi(X_{n\wedge\tau_M\wedge\tau_F}))_{n\geq 0}$ est une surmartingale. On a donc

$$\phi(x_0) = \mathbb{E}_{x_0}[\phi(X_{0\wedge\tau_F\wedge\tau_M})] \geq \mathbb{E}_{x_0}[\phi(X_{n\wedge\tau_F\wedge\tau_M})] \geq \mathbb{E}_{x_0}[\phi(X_{\tau_M})\mathbf{1}_{\tau_M<n\wedge\tau_F}] \geq M\mathbb{P}_{x_0}(\tau_M < n\wedge\tau_F),$$

car $\phi(X_{\tau_M}) \geq M$ $\mathbb{P}_{x_0}$-presque sûrement.
(d) En prenant $n \to \infty$ dans l'inégalité de la question précédente, on obtient $\phi(x_0) \geq M\mathbb{P}_x(\tau_M < \tau_F)$ et donc comme $\tau_M < \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s., on a $\mathbb{P}_x(\tau_F < \tau_M < \infty) \geq 1 - \phi(x_0)/M$. Par conséquent, en faisant tendre M vers l'infini, $\mathbb{P}_x(\tau_F < \tau_M < \infty) \geq 1$.
(e) Comme $\mathbb{P}(\tau_F < \infty) = 1$ et que la chaîne est irreductible elle visite F infiniment souvent. En particulier, si $G(x,y) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_x(X_n = y)$ désigne la fonction de Green, alors $\sum_{y\in F} G(x_0,y) = \infty$. Comme F est fini, il existe $y_0 \in F$ tel que $G(x_0,y_0) = \infty$. Par conséquent, $G(y_0,y_0) \geq G(x_0,y_0) = \infty$ et y_0 est récurrent. Comme la chaîne est irréductible, tout $x \in E$ est récurrent.

Exercice 4. On considère la procédure suivante pour maintenir une liste de fiches : l'ensemble des fiches est indexé par l'ensemble $E = \{0,1,2,\ldots,n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$; chaque fois qu'une requête est faite pour accéder à une fiche donnée on replace celle-ci au début de la liste après consultation. Par ailleurs, les indices des fiches demandées sont indépendants et de loi donnée par $(p_i)_{0\leq i\leq n}$, $\sum_i p_i = 1$. On suppose que $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$.

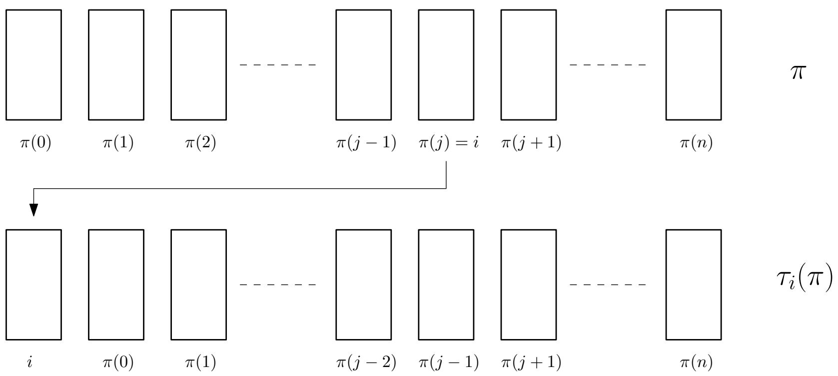
A chaque instant, l'ordre des fiches est donné par une permutation de E ; soit $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des bijections de E dans E. Pour $i \in E$, on note $\tau_i : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ l'operateur qui prend la fiche numéro i et la place au début de la liste : en d'autres termes, pour $\pi \in \mathbb{S}_n$, $\tau_i(\pi)$ est obtenu à partir de π de la manière suivante (voir la figure) :

$$\tau_i(\pi)(\ell) = \begin{cases} i & \text{si } \ell = 0 \\ \pi(\ell-1) & \text{si } 1 \leq \ell \leq \pi^{-1}(i) \\ \pi(\ell) & \text{si } \ell > \pi^{-1}(i)\,. \end{cases}$$

La matrice de transition Q de la chaîne de Markov sur $\mathbb{S}_n$ associée à cette procédure est donc donnée par

$$Q(\pi, \tau_i(\pi)) = p_i, \qquad \pi \in \mathbb{S}_n, i \in E\,,$$

toutes les autres transitions étant de probabilité nulle.



(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov soit irreductible.

Dans toute la suite, on suppose la condition précédente satisfaite, et donc la chaîne irréductible.

(b) Quelle est la période de la chaîne ?
(c) La chaîne est-elle réversible ?
(d) Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité invariante que l'on notera μ.

On note maintenant $(X_k)_{k\geq 0}$ la chaîne de Markov canonique associée à cette matrice de transition.

(e) Montrer que les variables aléatoires $(X_k(0))_{k\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi que l'on spécifiera.
(f) Soit $R_i = \{\pi \in \mathbb{S}_n : \pi(0) = i\}$ et $T_i = \inf\{k \geq 1 : X_k \in R_i\} = \inf\{k \geq 1 : X_k(0) = i\}$. Donner la loi de T_i sous $\mathbb{P}_\pi$ pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$.
(g) Soit $T = \sup_{i\in E} T_i$. Montrer que $\mathbb{P}_\pi(T > k) \leq (n+1)(1-p_n)^k$.

On considère la paire de chaînes couplées suivantes : $(X^1_k, X^2_k)_{k\geq 0}$ telle que les deux chaînes coordonnées $(X^1_k)_{k\geq 0}$ et $(X^2_k)_{k\geq 0}$ suivent les mêmes transitions, c'est-à-dire que quelque soit $\pi, \pi' \in \mathbb{S}_n$ conditionnellement à $(X^1_k, X^2_k) = (\pi, \pi')$ on a $(X^1_{k+1}, X^2_{k+1}) = (\tau_i(\pi), \tau_i(\pi'))$ avec probabilité p_i, $i \in E$.
(h) Montrer que l'unique mesure μ^2 sur $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ telle que $\mu^2(\pi, \pi) = \mu(\pi)$ pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$ est stationaire pour la chaîne $(X^1_k, X^2_k)_{k\geq 0}$.
(i) Montrer que μ est la loi de X_T et que $d_{\mathrm{TV}}(\mu, Q^k(\pi, \cdot)) \leq 2(n+1)(1-p_n)^k$.

Solution

(a) La chaîne est irreductible si et seulement si $p_i > 0$ pour tout $i \in E$. En effet, s'il existe $i \in E$ tel que $p_i = 0$ alors si $\sigma, \pi \in \mathbb{S}_n$ sont tels que $\pi(0) = i$ on a $Q(\sigma, \pi) = 0$ et donc $Q^n(\sigma, \pi) = 0$ quelque soit $n \geq 1$. Réciproquement, si $p_i > 0$ pour tout $i \in E$ alors on peut passer de tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$ à tout $\pi \in \mathbb{S}_n$ par la suite de transitions $\tau_{\pi(n)}, \tau_{\pi(n-1)}, \ldots, \tau_{\pi(1)}, \tau_{\pi(0)}$ qui a probabilité $\prod_{0\leq i\leq n} p_i > 0$.
(b) La chaîne est apériodique puisqu'elle est irréductible et a une boucle : pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$ on a $\tau_{\pi(0)}\pi = \pi$ et donc $Q(\pi, \pi) = p_{\pi(0)} > 0$ par hypothèse.
(c) La chaîne n'est pas réversible. En effet, on ne peut déplacer une fiche qu'au début de la liste en une étape : par exemple, pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$ avec $\pi(n) = n$ on $\tau_i(\tau_n(\pi)) \neq \pi$ quelque soit $i \in E$ et donc $Q(\pi, \tau_n(\pi)) = p_n > 0$ mais $Q(\tau_n(\pi), \pi) = 0$.
(d) La chaîne est irréductible sur un ensemble d'états fini, elle est donc récurrente positive et il existe une unique mesure de probabilité stationaire.
(e) La suite $(X_k(0))_{k\geq 1}$ est la suite des indices des cartes choisies : c'est donc une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E de même loi (p_i). Pour une preuve formelle : par la propriété de Markov, quelque soit $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}_\pi(X_k(0) = i|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n:\sigma(0)=i} \mathbb{P}_\pi(X_k = \sigma|\mathcal{F}_{k-1}) = Q(X_{k-1}, \tau_i(X_{k-1})) = p_i$. Comme X_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable, on a quelque soient $i_1, i_2, \ldots, i_k \in E$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi(X_1(0) = i_1, \ldots, X_k(0) = i_k) &= \mathbb{E}_\pi[\mathbb{P}_\pi(X_1(0) = i_1, \ldots, X_k(0) = i_k|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}_\pi[\mathbf{1}_{X_1(0)=i_1,\ldots,X_{k-1}(0)=i_{k-1}}\mathbb{P}_\pi(X_k(0) = i_k|\mathcal{F}_{k-1})] \\
&= \mathbb{E}_\pi[\mathbf{1}_{X_1(0)=i_1,\ldots,X_{k-1}(0)=i_{k-1}}] \cdot p_{i_k} \\
&= p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_k},
\end{aligned}$$

par une recurrence immédiate.
(f) D'après la question précédente, indépendamment de $\pi \in \mathbb{S}_n$, T_i est une variable aléatoire géométrique pour $\mathbb{P}_\pi$: $\mathbb{P}_\pi(T_i > k) = \mathbb{P}_\pi(X_\ell(0) \neq i, 1 \leq \ell \leq k) = (1-p_i)^k$.
(g) On a $\mathbb{P}_\pi(T > k) \leq \sum_{i\in E} \mathbb{P}_\pi(T_i > k) \leq (n+1)\max_i \mathbb{P}_\pi(T_i > k) = (n+1)(1-p_n)^k$.
(h) Par définition, comme μ^2 ne charge que la diagonale de $E \times E$, et que cette diagonale est absorbante, $\mathbb{P}_{\mu^2}(X^1_1 = \pi, X^2_1 = \sigma) = 0$ si $\sigma \neq \pi$ et pour tout $\pi \in \mathbb{S}_n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mu^2}(X^1_1 = \pi, X^2_1 = \pi) &= \sum_{\nu\in\mathbb{S}_n} \mu^2(\nu, \nu)\mathbb{P}_{(\nu,\nu)}(X^1_1 = \pi, X^2_1 = \pi) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{S}_n} \mu(\nu)\mathbb{P}_\nu(X^1_1 = \pi) \\
&= \mu(\pi) = \mu^2(\pi, \pi),
\end{aligned}$$

car μ est stationaire pour $(X^1_k)_{k\geq 0}$.
(i) Quelque soit $\sigma, \pi \in \mathbb{S}_n$, on a

$$\mu(\sigma) - Q^k(\pi, \sigma) = \mathbb{P}_\mu(X_k = \sigma) - \mathbb{P}_\pi(X_k \in \sigma) = \mathbb{E}_{\mu,\pi}(\mathbf{1}_{X^1_k=\sigma} - \mathbf{1}_{X^2_k=\sigma}).$$

Par conséquent,

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} |\mu(\sigma) - Q^k(\pi, \sigma)| \leq \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \mathbb{E}_{\mu,\pi}(\mathbf{1}_{T>k}|\mathbf{1}_{X^1_k=\sigma} - \mathbf{1}_{X^2_k=\sigma}|) \leq 2\mathbb{P}_\mu(T > k),$$

puisque dès l'instant T, chaque fiche a été tirée au moins une fois et X_k est donc une fonction des tirages et donc $X^1_k = X^2_k$ pour tout $k \geq T$. On en déduit en particulier que la loi de X^2_T est μ, puisque $X^2_T = X^1_T$ et que (X^1_k) est stationaire sous $\mathbb{P}_{\mu,\pi}$. De plus, $d_{\mathrm{TV}}(\mu, Q^k(\pi, \cdot)) = \frac{1}{2}\sum_\sigma |\mu(\sigma) - Q^k(\pi, \sigma)| \leq \mathbb{P}_\mu(T > k) \leq (n+1)(1-p_n)^k$.