TD 1 : Rappels : tribus, indépendance, conditionnement

Exercice 1:
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une partition de Ω avec $A_n \in \mathscr{F}$. On note $\mathscr{A} = \sigma(A_n, n \geqslant 1)$. Montrer que
(i) $\mathscr{A} = \{\cup_{j\in J} A_j \ : \ J \subset \mathbf{N}\}$.
(ii) $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une application $\mathscr{A}$–mesurable si et seulement si $X = \sum_{n\geqslant 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ avec $a_n \in \mathbf{R}$.
(iii) Soit $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ une v.a. positive. Montrer que $\mathbf{E}[Y|\mathscr{A}] = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbf{E}[Y\mathbf{1}_{A_n}]}{\mathbf{P}[A_n]} \mathbf{1}_{A_n}$.

Exercice 2:
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit ε une v.a. de Bernoulli symétrique (vérifiant $\mathbf{P}[\varepsilon = 1] = \mathbf{P}[\varepsilon = -1] = \frac{1}{2}$) et X une v.a. indépendante de ε. Montrer que εX et ε sont indépendantes si et seulement si X est symétrique (i.e. X et $-X$ ont même loi).
2. Déterminer deux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et Y une v.a. telles que
   (i) Y est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$–mesurable
   (ii) Y est indépendante de $\mathscr{A}$
   (iii) Y est indépendante de $\mathscr{B}$
   On pourra considérer $A, B \in \mathscr{F}$ indépendants telles que $\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[B] = \frac{1}{2}$, poser $X = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A^c}$, $\varepsilon = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B^c}$, $\mathscr{A} = \sigma(X)$, $\mathscr{B} = \sigma(\varepsilon)$ et $Y = \varepsilon X$.

Exercice 3:
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Soit $A \in \mathscr{F}$ et $B = \{\mathbf{E}[\mathbf{1}_A \,|\mathscr{G}] = 0\}$. Montrer que $B \subset A^c$ (à un ensemble négligeable près).

Exercice 4:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de Bernoulli de paramètres p et q, avec $0 < p, q < 1$. On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$ et $\mathscr{G} = \sigma(Z)$.

1. Calculer $U = \mathbf{E}[X \,|\mathscr{G}]$ et $V = \mathbf{E}[Y \,|\mathscr{G}]$.
2. Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 5:
Soit $X \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On note $Y = \mathbf{E}[X \,|\mathscr{G}]$ et on suppose que X et Y ont même loi. On veut montrer que $X = Y$ p.s.

1. Montrer le résultat dans le cas $X \in \mathbf{L}^2$.
2. Montrer que pour tout $K \in \mathbf{R}_+$,
$$\mathbf{E}[(X \wedge K) \vee (-K) \,|\mathscr{G}] = (Y \wedge K) \vee (-K) \quad p.s. \tag{$*$}$$
   et en déduire le résultat.

Exercice 6:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de Bernoulli indépendantes, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, telles que
$$\mathbf{P}[X_n = 1] = p \quad \mathbf{P}[Y_n = 1] = q,$$
avec p, q fixés, $0 < p, q < 1$.

1. Montrer que les variables aléatoires $Z_n = X_n Y_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Déterminer leur loi.
2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. Déterminer la loi de S_n et celle de T_n.
3. Soit $\tau = \inf \{n \geqslant 1, T_n = 1\}$. Montrer que τ et S_τ sont des variables aléatoires.
   Déterminer la loi de τ.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$,

$$\mathbf{P}\left[X_k = 1 \mid \tau = n\right] = \mathbf{P}\left[X_k = 1 \mid Z_k = 0\right] = \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$

Exercice 7:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs a et b, $0 < a, b < 1$.
Déterminer la loi de $X \wedge Y$.
Déterminer la loi du couple $(X - Y, X \wedge Y)$. Que remarque-t-on si $a = b$?

Exercice 8:
Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ (la partie entière de X). Déterminer la loi de Y.

Exercice 9:
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètres λ_1 et λ_2. Calculer $\mathbf{E}\left[X \vee Y \mid X\right]$.

Exercice 10:
On pose $V = \max(U_1, U_2)$ avec U_1, U_2 indépendantes et de loi $U([0,1])$. On fixe $f : [0,1] \mapsto \mathbf{R}_+$ mesurable. Calculer $E[f(U_1)|V]$.

TD 2 : Processus de Poisson

Exercice 1:
Montrer qu'une v.a. T à valeur dans $]0,+\infty[$ suit une loi exponentielle si et seulement si

$$\forall t, s \geqslant 0, \quad \mathbf{P}[T > t+s \,|\, T > t] = \mathbf{P}[T > s]. \tag{$*$}$$

C'est la propriété d'absence de mémoire.

Exercice 2 (Lemme des trois réveils):
Trois réveils sonnent respectivement aux temps T_1, T_2 et T_3 v.a. indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1, λ_2 et λ_3. L'un des réveils sonne avant les autres au temps $T = T_1 \wedge T_2 \wedge T_3$ et on note R le numéro du réveil qui sonne le premier.
Montrer que les v.a. T et R sont indépendantes et préciser leur loi.

Exercice 3:
Il y a 2 guichets à la poste. A chaque guichet, les clients sont servis pendant des temps aléatoires indépendants exponentiellement distribués de même paramètre λ. Un client C entre et voit qu'un client A se trouve au premier guichet et qu'un client B se trouve au second guichet. Il attend qu'un client (soit A, soit B) parte puis va au guichet disponible. Quelle est la probabilité que le client C quitte la poste en dernier (après A et B) ?

Exercice 4:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus croissant continu à droite, $N_0 = 0$ et $0 < \lambda < \infty$. Montrer qu'il y a équivalence entre

(*i*) $(N_t)_{t\geqslant 0}$ a des accroissements indépendants et quand h décroit vers 0

$$\forall t \geqslant 0, \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t = 0] = 1 - \lambda h + o(h) \text{ et } \mathbf{P}[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h),$$

où $o(h)$ est uniforme en t.

(*ii*) $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ, i.e. un PAIS tel que pour tout $t \geqslant 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

Exercice 5:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On note T_i le i-ième instant de saut.

1. Montrer que la loi de T_1 conditionnellement à $\{N_t = 1\}$ est la loi uniforme sur $[0, t]$.
2. Montrer que la loi du vecteur $(T_1, \ldots, T_n)$ conditionnellement à $\{N_t = n\}$ est la loi de n v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$ réordonnées dans l'ordre croissant *i.e.* de densité sur $\mathbf{R}_+^d$

$$f(t_1, \ldots, t_n) = n! t^{-n} \mathbf{1}_{\{0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t\}}.$$

Exercice 6:
Les employés d'une entreprise arrivent au travail selon un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité $\lambda > 0$. Soit T_i le temps d'arrivée du i-ième employé.

1. Montrer que le nombre total des heures de travail effectuées dans l'entreprise jusqu'au temps $t \geqslant 0$ est $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} (t - T_i)$.
2. Evaluer $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} T_i \,\middle|\, N_t = n\right]$ et en déduire que $\mathbf{E}[X_t] = \lambda t^2/2$.

Exercice 7:
Les arrivées des bus numéro 1 à un arrêt sont modélisées par un processus de Poisson d'intensité α (par heure). On arrive à l'arrêt à 7h du matin.

1. Quelle est la probabilité d'attendre le prochain bus plus qu'une demi-heure ?
   Quel temps moyen va-t-on attendre un prochain bus ?

2. Quelle est la probabilité que exactement trois bus passent à l'arrêt entre 7h et 9h ?
   Quel est le nombre moyen de bus qui vont passer à l'arrêt entre 7h et 9h ?
3. On sait que 100 bus sont passés entre 7h et 9h.
   (a) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un seul bus passe entre 9h et 10h ?
   (b) Quel est le nombre moyen conditionnel de bus passés entre 9h et 10h ?
   (c) Quelle est la probabilité conditionnelle que les 100 bus soient passés entre 8h et 9h ?
   (d) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'exactement 30 de ces bus soient passés entre 8h et 9h ?
   (e) Quelle est la probabilité conditionnelle d'attendre un bus plus de 3/4 d'heures à partir de 7h du matin ?

TD 3 : Processus de Poisson, approche mesure aléatoire

Exercice 1:
Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ un processus ponctuel sur $\mathbf{R}_+$ (*i.e.* $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots$ et $\lim_n T_n = +\infty$ *p.s.*) et le processus de comptage $(N_t)_{t\geqslant 0}$ associé,

$$\forall t \geqslant 0, \quad N_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leqslant t\}}.$$

On définit la mesure (aléatoire) sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+), \quad \mu(A) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n \in A\}}.$$

Pour f mesurable positive sur $\mathbf{R}_+$, on note $\mu(f) = \sum_{n\geqslant 1} f(T_n)$. Dans tout l'exercice on note m la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que si $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ pour toute fonction mesurable positive f la transformation de Laplace vérifie
$$\mathbf{E}\left[e^{-\mu(f)}\right] = e^{-\lambda \int_0^{+\infty}(1-e^{-f(t)})\mathrm{d}t} \tag{$*$}$$
2. Montrer que si $\mu(f)$ verifie $(*)$ pour toute $f \in \mathscr{M}_+(\mathbf{R}_+)$ alors
$$\begin{cases} \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \text{ disjoints, alors les v.a.} \mu(A_1), \ldots, \mu(A_n) \text{ sont indépendantes,} \\ \forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+),\ \mu(A) \sim \mathscr{P}(\lambda m(A)) \text{ si } m(A) < +\infty \end{cases} \tag{$**$}$$
(on rappelle que la transformée de Laplace d'une loi de Poisson $X \sim \mathscr{P}(\theta)$ vérifie $\mathbf{E}\left[e^{-uX}\right] = e^{-\theta(1-e^{-u})}$).
3. Montrer la réciproque de la question 2.
4. En déduire que $(*)$ et $(**)$ sont des critères équivalents au fait que $(N_t)_{t\geqslant 0}$ soit un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.

Exercice 2:
Soient $(N_t^1)_{t\geqslant 0}$, $(N_t^2)_{t\geqslant 0}$ et $(N_t^3)_{t\geqslant 0}$ trois processus de Poisson indépendants et de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$. On définit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ par $N_t = N_t^1 + N_t^2 + N_t^3$ pour tout $t \geqslant 0$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ les instants successifs de sauts du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$.

1. En utilisant la caractérisation par la transformée de Laplace, montrer que $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
2. Quelle est la loi de T_n pour un $n \geqslant 1$?
3. Quelle est la probabilité que le premier saut de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ soit un saut de $(N_t^3)_{t\geqslant 0}$?
4. Quelle est la probabilité que le premier saut après un instant $s > 0$ soit un saut de $(N_t^3)_{t\geqslant 0}$?
5. Soit τ l'instant du 8-ème saut de N^2. Quelle est la probabilité que le premier saut après $\tau > 0$ soit un saut de $(N_t^3)_{t\geqslant 0}$?

Exercice 3:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ d'instants de sauts $(T_n)_{n\geqslant 1}$. On propose d'effacer des sauts de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ avec une probabilité $p \in]0,1[$ et donc de considérer un processus $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$ avec moins de sauts que ceux de $(N_t)_{t\geqslant 0}$. Pour cela, on considère une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On suppose la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ indépendante du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et on définit

$$\forall t \geqslant 0, \quad \tilde{N}_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leqslant t\}} \xi_n$$

1. Soit f mesurable positive sur $\mathbf{R}_+$ et $g_p(t) = -\log(1 - p + pe^{-f(t)})$ pour tout $t \geqslant 0$. Montrer que

$$\mathbf{E}\Big[e^{-\sum_{n\geqslant 1} g_p(T_n)}\Big] = e^{-\lambda p \int_0^{+\infty}(1-e^{-f(t)})\mathrm{d}t}.$$

2. En déduire que $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $p\lambda$.

Exercice 4:

A un arrêt de bus, les bus numéro 1 arrivent selon un processus de Poisson d'intensité $\alpha > 0$ (par heure) et les bus numéro 2 arrivent selon un processus de Poisson d'intensité $\beta > 0$. On suppose que ces 2 processus sont indépendants.

On arrive à l'arrêt à 7h du matin.

1. Quelle est la probabilité que le premier bus soit un numéro 1 ?
2. Quelle est la probabilité que les k premiers soient des numéro 1 ?
3. Quelle est la probabilité que exactement k bus numéro 1 passent à l'arrêt pendant qu'on attend un bus numéro 2 ?

TD 4 : Processus Ponctuel de Poisson

Exercice 1:
Soit $(X_n)_{n\in K}$ un processus ponctuel de Poisson sur $(E,\mathcal{E})$ d'intensité μ (mesure positive σ–finie).

1. Rappeler l'expression de la fonctionnelle de Laplace de $(X_n)_{n\in K}$ définie pour toute fonction mesurable positive $f : E \to \mathbf{R}_+$ par $\mathbf{E}\left[e^{-\sum_{n\in K} f(X_n)}\right]$.
2. Montrer que pour toute fonction mesurable positive $f : E \to \mathbf{R}_+$
$$\mathbf{E}\Big[\sum_{n\in K} f(X_n)\Big] = \int_E f d\mu.$$
3. Montrer que ce résultat est aussi vrai pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^1(E,\mathcal{E},\mu)$ *(formule de Campbell).*

Exercice 2:
Un cobaye reçoit une quantité positive ξ_n d'un médicament à l'instant T_n et la quantité décroît au cours du temps de façon exponentielle (déterminisite) en e^{-at} avec $a > 0$. On suppose que les instants $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont les instants de saut d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et que $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi ν sur $\mathbf{R}_+$ indépendante de $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Que peut-on dire du processus $(T_n, \xi_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Soit Z_t la quantité de médicament présente dans le sang du cobaye à l'instant $t \geqslant 0$.
En utilisant la formule de Campbell, calculer $\mathbf{E}[Z_t]$ et sa limite lorsque t tend vers l'infini.

Exercice 3:
Des clients arrivent aux instants de sauts $T_1 < T_2 < ...$ d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client est immédiatement pris en charge. Le i-ème client est servi en un temps R_i et a une "patience" U_i. Quand le client est servi, il répond à une enquête de satisfaction et se dit "satisfait" si $U_i > R_i$ et "insatisfait" sinon. On suppose que les R_i sont i.i.d. de loi Exponentielle(1) et sont indépendants des U_i qui sont i.i.d. de loi Exponentielle(2). La famille de toutes ces v.a. est supposée indépendante de $(N_t)_{t\geq 0}$.

1. Que peut-on dire la famille $(T_i, R_i, U_i)_{i\geq 1}$? On note M sa fonction de comptage.

2. Soit X_t le nombre de clients satisfaits partis avant l'instant $t > 0$. Exprimer X_t en fonction des v.a. de l'énoncé.

3. Exprimer ensuite X_t en fonction de M.

4. En déduire la loi de X_t.

Exercice 4:
Soit h une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans $]0,1]$. On note $H(t) = \int_0^t h(u)\mathrm{d}u$.

1. Soit $(T_n, U_n)_{n\geqslant 1}$ un processus ponctuel sur $\mathbf{R}_+ \times [0,1]$ d'intensité $\mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) = \mathrm{d}t\mathrm{d}u$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de comptage défini par
$$\forall t \geqslant 0, \quad Y_t = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{\{T_n\leqslant t, U_n\leqslant h(T_n)\}}$$
On note $(\tilde{T}_k)_{k\geqslant 1}$ les instants de sauts de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$.
Montrer que $(\tilde{T}_k)_{k\geqslant 1}$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}_+$ de mesure intensité $h(t)\mathrm{d}t$.
2. Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité 1 d'instants de saut $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $Z_t = N_{H(t)}$.
Montrer que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de comptage d'instants de sauts $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 1}$ (à déterminer).
En déduire que $(\tilde{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}_+$ de mesure intensité $h(t)\mathrm{d}t$.
3. Conclure.

Exercice 5:
Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, d'instants de sauts $0 < T_1 < T_2 < ...$, et des v.a. réelles $(R_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. intégrables, indépendantes du processus de Poisson.

1. Montrer que N_t/t converge p.s. vers λ quand $t \to \infty$.

2. Montrer que $(\sum_{i=1}^{N_t} R_i)/t$ converge p.s. vers $\lambda \mathbf{E}[R_1]$ quand $t \to \infty$.

Université Pierre et Marie Curie — **Master M1 "Mathématiques et Applications"**
Période 2 — **Processus de sauts 4M036**

TD 5 : Chaîne de Markov, filtration

Exercice 1:
Soit $(W_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. *i.i.d.* à valeurs dans un espace mesurable $(W, \mathscr{W})$ et X_0 une v.a. indépendante de $(W_n)_{n\geqslant 1}$ de loi μ à valeurs dans un ensemble dénombrable E.
On définit la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ par la formule de récurrence

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, W_{n+1}),\ \forall n \geqslant 0,$$

où $\Phi : E \times W \to E$ est une application mesurable.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et en déterminer la matrice de transition.
2. Déterminer la matrice de transition dans le cas $W = E = \mathbf{Z}$ et $\Phi(x, w) = x + w$.
3. Déterminer la matrice de transition dans le cas $W = E = \mathbf{Z}$ et $\Phi(x, w) = (x + w)_+$.

Exercice 2:
On lance un dé de manière répétitive. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Donner leur matrice de transition le cas échéant.

1. X_n le plus grand résultat obtenu après n lancers
2. N_n le nombre de 6 obtenus après n lancers
3. C_n le nombre de lancers à l'instant n depuis le dernier 6 ou depuis le départ tant qu'il n'y a pas eu de 6
4. $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$

Exercice 3:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E, de loi initiale μ et de matrice de transition P.
Soit $F \subset E$, et $\tau = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in F\}$ le temps d'entrée dans F et on pose $Y_n = X_{n\wedge\tau}$.
Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

Exercice 4:
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable muni d'une filtration $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. On note τ et ν deux $\mathbf{F}$–temps d'arrêt. Montrer les propriétés suivantes

(i) $\tau \vee \nu$ et $\tau \wedge \nu$ sont des $\mathbf{F}$–temps d'arrêt,
(ii) si $\tau = p$ alors $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_p$,
(iii) si $\tau \leqslant \nu$ alors $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\nu$,
(iv) $\mathscr{F}_{\tau\wedge\nu} = \mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\nu$,
(v) $\{\tau < \nu\}$ et $\{\tau = \nu\}$ appartiennent à $\mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\nu$.

Exercice 5:
Une information prenant deux valeurs possibles (0 et 1, ou *vrai* et *faux*, etc.) est transmise par n intermédiaires indépendants. Chaque intermédiaire transmet l'information reçue de façon correcte avec une probabilité p ($0 < p < 1$) ou modifie l'information en son contraire avec probabilité $1 - p$.

1. Introduire une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ modélisant l'état de l'information après les différents intermédiaires.
2. Calculer la probabilité que l'information transmise par le dernier intermédiaire soit conforme à l'information initiale.

TD 6 : Chaîne de Markov, classification des états

Notations : $x \rightsquigarrow y$ la relation transitive « *y est accessible à partir de l'état x* »
$x \sim y$ la relation d'équivalence « *x et y communiquent* »

Exercice 1:
On considère sur $E = \{1, \ldots, 6\}$ la matrice de transition P

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.
2. Déterminer toutes les classe d'équivalences d'états pour la relation $\sim$.
3. Refaire l'exercice en changeant la valeur de $P(6,5)$ à $1/4$ et $P(6,6)$ à $3/4$.

Exercice 2:
Soit P une matrice de transition sur E dénombrable.

1. Montrer que $x \rightsquigarrow y$ (et $x \neq y$) si et seulement s'il existe $n \geqslant 1$ et des états $a_1, \ldots, a_{n-1}$ de E tels que
$$P(x, a_1) > 0, P(a_1, a_2) > 0, \ldots, P(a_{n-1}, y) > 0.$$
Montrer qu'on peut choisir les a_i de sorte que $x, a_1, \ldots, a_{n-1}, y$ soient 2 à 2 distincts.
2. Soit Q une autre matrice de transition sur E vérifiant
$$\forall x, y \in E, x \neq y, \quad P(x,y) > 0 \quad \Longrightarrow \quad Q(x,y) > 0.$$
Montrer que si $x \rightsquigarrow y$ pour P alors $x \rightsquigarrow y$ pour Q.
En déduire que si la chaîne associée à P est irréductible alors il en est de même pour celle associée à Q.

Exercice 3:
Soit une chaîne de Markov à valeurs dans E de matrice de transition P. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \quad x_0 \rightsquigarrow x, \\ \forall x \in E, \quad \mathbf{P}_x [T_{x_0} < +\infty] = 1, \end{cases}$$

où $T_{x_0} = \inf \{n \geqslant 0, X_n = x_0\}$. Montrer que la chaîne est récurrente irréductible.

Exercice 4:
On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ sur $\mathbf{N}$ de noyau de transition P défini par

$$\forall n \geqslant 0, \quad P(n, 0) = p_n, \quad P(n, n+1) = 1 - p_n,$$

où pour tout $n \geqslant 0$, $p_n \in]0, 1[$.

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = +\infty$ (étudier la récurrence en 0).
3. Etudier la récurrence dans les 3 cas : $p_n = p$ pour tout $n \geqslant 0$, $p_n = \frac{1}{n+1}$ et $p_n = \alpha^n$ ($\alpha \in]0, 1[$).

Exercice 5:
Un serveur informatique reçoit des requêtes. Pour traiter ces requêtes, le serveur crée une *file d'attente* des requêtes. On suppose que le temps de traitement d'une requête est constant (le même pour toutes les requêtes) et que le serveur ne peut traîter qu'une requête à la fois. On considère que le temps est discret et l'unité de temps correspond à ce temps de traitement constant.
On note ξ_{n+1} le nombre de requêtes arrivant pendant la période de temps $[n, n+1[$ et on suppose que la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi μ (sur $\mathbb{N}$).
On note X_n le nombre de requêtes dans la file d'attente à l'instant n et l'on suppose X_0 indépendant de la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.
2. Montrer que si $\mathbf{E}[\xi_1] > 1$ alors $\lim_n X_n = +\infty$ *p.s.*
   En déduire que la chaîne est transitoire.
3. Montrer que si $\mathbf{E}[\xi_1] < 1$ alors l'état 0 est récurrent.

Exercice 6:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P. On note $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et $\mathbf{F}$ la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$. On suppose la chaîne récurrente irréductible.

1. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 1, X_n \neq X_0\}$. Montrer que τ est un $\mathbf{F}$–temps d'arrêt fini *p.s.* et déterminer sa loi.
   Déterminer la loi de X_τ.

On définit la suite de variables aléatoires $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n, X_k \neq X_{\tau_n}\}$$

2. Monter que $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\mathbf{F}$–temps d'arrêt finis *p.s.*
3. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

Exercice 7:
Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans E, de transition P. Soit $C \subset E$ et $T_C = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in C\}$ le temps d'entrée dans C.

1. Montrer que $u(x) = \mathbf{P}_x[T_C < +\infty]$ est solution de

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ (Pu)(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

2. Montrer que $v(x) = \mathbf{E}_x[T_C]$ est solution de

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ 1 + (Pv)(x) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

TD 7 : Chaîne de Markov, récurrence et mesure stationnaire

Exercice 1:
Retour à l'exercice 5 de la feuille 6. On considère la file d'attente des requêtes à un serveur informatique : X_n représente la taille de la file d'attente à l'instant n et ξ_{n+1} le nombre de requêtes qui arrivent entre n et $n+1$ ($(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ suite *i.i.d.* de loi μ), une requête (au maximum) est traitée par unité de temps.

1. Soit ϕ la fonction génératrice de ξ_1 et G_n celle de X_n. Donner une relation liant G_{n+1} à G_n et ϕ.
2. On suppose que $\mathbf{E}[\xi_1] \geq 1$ et que Var $\xi_1 > 0$. Montrer qu'il n'existe pas de probabilité invariante.

Exercice 2:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $\mathbf{Z}$ par la récurrence suivante

$$X_0 = 0, \quad X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$

avec $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *i.i.d.* de loi de Bernoulli $\mathbf{P}[Z_1 = 1] = p = 1 - \mathbf{P}[Z_1 = -1]$, avec $o \in]0,1[$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer P son noyau de transition.
2. Calculer pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{P}_0[X_n = 0]$.
3. Montrer que la chaîne est irréductible.
4. En utilisant la formule de Stirling
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$
montrer que $\mathbf{E}_0[N_0] = \infty$ si et seulement si $p = \frac{1}{2}$, où $N_0 = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{X_n=0}$.
5. Etudier la récurrence en fonction du paramètre p.

Exercice 3:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ de noyau de transition Q défini pour un $p \in]0,1[$ par

$$\begin{cases} Q(0,1) = 1 \\ Q(n, n+1) = p, \quad Q(n, n-1) = 1 - p, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Ecrire une formule de récurrence pour la chaîne (introduire une suite Z_n i.i.d. avec $\mathbf{P}[Z_1 = 1] = p = 1 - \mathbf{P}[Z_1 = -1]$).
2. La chaîne est-elle irréductible ?
3. Montrer que la chaîne est transiente si $p > \frac{1}{2}$.
4. Soit $p < \frac{1}{2}$. Déterminer l'unique probabilité réversible. Qu'en déduit-on sur la récurrence de la chaîne ?

Exercice 4:
Soit X une μ–P chaîne de Markov sur E. Soit $\psi : E \to F$ une application dans F dénombrable.

1. On suppose ψ bijective. Montrer que si $Y_n = \psi(X_n)$ alors $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur F. Déterminer sa loi initiale ν et sa matrice de transition Q.
2. On suppose ψ surjective telle que pour tout $j \in F$
$$P(x, \psi^{-1}(j)) = P(y, \psi^{-1}(j)) \quad \text{si} \quad \psi(x) = \psi(y). \tag{$*$}$$
(On a noté $P(x, \psi^{-1}(j)) = \sum_{z\in\psi^{-1}(j)} P(x,z)$). Montrer que $Y_n = \psi(X_n)$ est une chaîne de Markov de transition Q où pour tout $i, j \in F$
$$Q(i,j) = P(x, \psi^{-1}(j)) \quad \text{avec} \quad x \in \psi^{-1}(i).$$
3. Dans le cas de la question 2 (qui inclut le cas de la question 1), montrer que si π est une probabilité stationnaire pour P alors la loi image $\pi \circ \psi^{-1}$ est une probabilité stationnaire pour Q.

TD 8 : Chaîne de Markov, ergodicité

Exercice 1:
Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de transition P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe de la chaîne.
2. Soit $C = \{3, 4\}$ et $\tau = \inf\{n \geqslant 0, X_n \in C\}$. Calculer $\mathbf{E}_x[\tau]$ pour tout $x \in E$.
3. Calculer pour $x \in E$ et $y \in C$, $\mathbf{P}_x[X_\tau = y]$.
4. Montrer que $(X_{n+\tau})_{n\geq 0}$ est une chaîne irréductible (à valeurs dans $\{3, 4\}$), calculer sa matrice de transition et sa probabilité invariante.
5. Déterminer pour tout $x \in E$, et $f : E \mapsto \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$, $\mathbf{P}_x$–$p.s.$

Exercice 2:
Soit X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. Le nombre de particules dans ce volume V évolue sur la période $[n, n+1[$ d'après la dynamique suivante :
— chaque particule (parmi les X_n) a une probabilité $p \in]0, 1[$ de quitter V (indépendamment les unes des autres)
— un nombre aléatoire Z_{n+1} de particules entre dans V.
La suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de X_0. On introduit une famille $(\xi_{n,k})_{n\geq 1,k\geq 1}$ de v.a. i.i.d. et Bernoulli(p) qui représentent les départs des particules : on dit que $\xi_{n,k} = 1$ (resp. 0) si, à l'étape n, la k-ème particule présente quitte V (seuls les $\xi_{n,k}$ pour $k \leq X_{n-1}$). On a donc

$$X_{n+1} = X_n + Z_n - \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n+1,k} \qquad (*)$$

avec la convention que $\sum_1^0 = 0$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de transition
$$Q(x, y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x\wedge y} C_x^k (1-p)^k p^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$
En déduire que la chaîne est irréductible.
2. Montrer que si X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ alors X_1 suit aussi une loi de Poisson. En déduire une probabilité invariante. Que peut-on dire de la récurrence de $(X_n)_{n\geqslant 0}$?
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

Exercice 3:
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbf{N}$ de matrice de transition

$$P(x, x-1) = q_x, \quad P(x, x) = r_x, \quad P(x, x+1) = p_x,$$

avec $q_x + r_x + p_x = 1$, $q_0 = 0$, $q_x > 0$ pour tout $x > 0$ et $p_x > 0$ pour tout $x \geq 0$.
On pose $T_x = \inf\{n \geqslant 0, X_n = x\}$ et on pose, pour $a > 0$, $u(x) = \mathbf{P}_x[T_0 < T_a]$ et $\gamma(x) = \frac{q_1\cdots q_x}{p_1\cdots p_x}$ (avec la définition $\gamma(0) = 1$).

1. Montrer que la chaîne est irréductible.

2. Montrer que pour tout $0 < x < a$, $u(x) = q_x u(x-1) + r_x u(x) + p_x u(x+1)$ puis

$$u(x+1) - u(x) = \frac{q_x}{p_x}(u(x) - u(x-1)).$$

3. En déduire que $u(x) = u(0) + (u(1) - u(0)) \sum_{y=0}^{x-1} \gamma(y)$ pour tout $0 \leq x \leq a$, puis que $u(1) = 1 - 1/(\sum_{y=0}^{a-1} \gamma(y))$.
4. En déduire que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{y \geqslant 0} \gamma_y = +\infty$.

TD 9 : Processus markovien de sauts

Exercice 1:
Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E de probabilité de transition P indépendante d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ de paramètre $\alpha > 0$. On suppose que P vérifie $\forall i \in E$, $P(i,i) = 0$, et on définit

$$\forall t \geqslant 0, \quad X_t = Z_{N_t}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts de noyaux de transition $(P_t)_{t\geqslant 0}$ définis par

$$\forall t \geqslant 0, (i,j) \in E^2, \quad P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n P^n(i,j)}{n!}.$$

2. Déterminer les taux d'évenement $\lambda(i)$ et la matrice de transition $Q(i,j)$ du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Exercice 2:
Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$ et d'instants de sauts $(T_n)_{n\geqslant 1}$. On définit le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ appelé *processus du télégraphe* par

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}[, \quad X_t = 1 - X_{T_{n-1}}, \qquad X_0 \sim \mathscr{B}(p),$$

où $p \in]0,1[$ et $T_0 = 0$.

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et que

$$X_{t+s} = \begin{cases} X_s & \text{si } N_{t+s} - N_s = 0 \mod 2 \quad \text{(nombre pair de sauts entre } s \text{ et } t+s) \\ 1 - X_s & \text{si } N_{t+s} - N_s = 1 \mod 2 \quad \text{(nombre impair de sauts entre } s \text{ et } t+s) \end{cases}$$

2. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts de noyaux de transition $(P_t)_{t\geqslant 0}$ définis par

$$P_t(0,1) = P_t(1,0) = e^{-\alpha t} \sum_{k\geqslant 0} \frac{(\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$P_t(0,0) = P_t(1,1) = e^{-\alpha t} \sum_{k\geqslant 0} \frac{(\alpha t)^{2k}}{(2k)!}$$

3. Déterminer les taux d'évenement $\lambda(i)$ et la matrice de transition $Q(i,j)$ du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Exercice 3:
Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut sur $E = \{1,2,3\}$ de loi initiale μ et de générateur

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $(T_n)_{n\geqslant 1}$ les instants de sauts de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $S_n = T_n - T_{n-1}$ les délais entre les sauts (avec $T_0 = 0$).

1. Déterminer les taux d'évenement λ et la matrice de transition Q.
2. On note $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne induite $(X_{T_n})_{n\geqslant 0}$. Rappeler la loi de $(S_1, \ldots, S_n)$ sachant $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$.
3. Montrer qu'on peut représenter $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de la façon suivante : soit $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ une μ–Q chaîne de Markov sur E et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre 1, alors

$$X_t = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n \mathbf{1}_{[V_n, V_{n+1}[}(t),$$

avec $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{\lambda(\xi_{k-1})}$ (avec la convention $1/0 = +\infty$).

Exercice 4:
Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un PMS à valeurs dans $\mathbf{Z}$ de taux d'évènement $\lambda(i) = q_i$ et de matrice $Q(i,i-1) = \mu/(\alpha+\mu)$ et $Q(i,i+1) = \alpha/(\alpha+\mu)$ (les autres entrées de la matrice Q étant nulles). On suppose les $q_i > 0$ et $\alpha > 0$, $\mu \geq 0$. On suppose enfin (inutile) que $X_0 = 0$.

1. Supposons $\mu = 0$. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ n'explose pas si et seulement si $\sum_{i=1}^{+\infty}(1/q_i) = +\infty$.
2. Supposons $\mu \neq 0$. Montrer que chacune des conditions suivantes garantit la non-explosion.
   — $\alpha = \mu$
   — $\alpha > \mu$ et $\sum_{i=1}^{+\infty}(1/q_i) = \infty$
   — $\alpha < \mu$ et $\sum_{i=1}^{+\infty}(1/q_{-i}) = \infty$.
3. Montrer que si $\alpha > \mu$ et $\sum_{i=1}^{+\infty}(1/q_i) < \infty$ (ou $\alpha < \mu$ et $\sum_{i=1}^{+\infty}(1/q_{-i}) < \infty$), il y a p.s. explosion.

Exercice 5:
Une bactérie se divise en deux bactéries identiques après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, qui se divisent elles-mêmes de la même façon indépendamment les unes des autres, etc. Soit X_t le nombre de bactéries au temps t et on suppose $X_0 = 1$ et $\mu : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par $\mu(t) = \mathbf{E}[X_t]$.

1. Prouver informellement que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de saut
2. Trouver ses taux d'évenement et sa matrice de transition.
3. Ecrire Kolmogorov Forward.
4. Calculer $\frac{d}{dt}\mathbf{E}_1[X_t]$, sans justifier l'interversion somme-dérivation, et montrer que $\mu(t) = e^{\alpha t}$.

TD 10 : Processus markovien de sauts (2)

Exercice 1:
On suppose qu'une machine a une durée de vie aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Lorsqu'elle tombe en panne, elle est remplacée, après un délai de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, par une autre machine identique qui tombera en panne après un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, puis remplacée après un délai aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, etc.
On note pour tout $t \geqslant 0$, X_t l'état du système : $X_t = 1$ si une machine fonctionne à l'instant t et $X_t = 0$ sinon.

1. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts, déterminer E, λ, Q.
2. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible récurrent positif.
3. Déterminer sa probabilité invariante.
4. Ecrire les équations de Kolmogorov Forward.
5. Calculer $P_t(0,0)$ et $P_t(1,1)$.
6. Déterminer $\lim_{t\to\infty} P_t(0,0)$ et $\lim_{t\to\infty} P_t(1,1)$.

Exercice 2:
Un chauffeur-routier emprunte l'autoroute. On suppose que sa vitesse peut prendre trois valeurs : $v_1 = 100$ (km/h), $v_2 = 110$ (km/h) et $v_3 = 120$ (km/h). On note V_t sa vitesse à l'instant $t \geqslant 0$.
Son patron le contacte à des instants $T_1^+ < T_2^+ < \cdots$ suivant un processus de Poisson de paramètre λ^+. Si sa vitesse est v_1 ou v_2 il accélère de 10 (km/h) et si sa vitesse est v_3 il la conserve.
Indépendamment, il croise des gendarmes à des instants $T_1^- < T_2^- < \cdots$ suivant un processus de Poisson de paramètre λ^-. Si sa vitesse est v_2 ou v_3 il ralentit de 10 (km/h) et si sa vitesse est v_1 il la conserve.

1. Expliquer informellement pourquoi $(V_t)_{t\geqslant 0}$ est un PMS, donner E, λ, Q.
2. Montrer qu'il est récurrent positif.
3. Déterminer sa probabilité invariante π.
4. Soit $D_t = \int_0^t V_s ds$ la distance totale parcourue par le chauffeur à l'instant t. Calculer $\lim_{t\to\infty} \frac{D_t}{t}$.

Exercice 3:
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\alpha = \sum_{n\geqslant 1} a_n < +\infty$. On considère un processus markovien de saut $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $E = \mathbf{N}$, avec $\lambda(0) = \alpha$ et, pour tout $k \geq 1$, $Q(0,k) = a_k/\alpha$, $\lambda(k) = a_k$ et $Q(k, k-1) = 1$.

1. Montrer que la chaîne de Markov induite est irréductible récurrente.
2. Vérifier qu'elle est récurrente positive si et seulement si $\sum_{n\geqslant 1} n a_n < +\infty$.
3. Montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est récurrent et déterminer une mesure invariante π.
4. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est-il récurrent positif ?

Exercice 4:
Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus markovien de saut à valeurs dans $E = \mathbf{N}$ récurrent positif, de paramètres λ et Q, de probabilité invariante π. On suppose que $Q(0,1) = 1$. Soit T_1 le premier instant de saut du processus. Pour $i \geq 0$, on pose

$$S_i = \inf \{t \geqslant T_1, \quad X_t = i\} .$$

1. Montrer que $\mathbf{E}_0 [S_0] = \mathbf{E}_0 [S_1] + \mathbf{E}_1 [S_0]$.
2. En déduire $\mathbf{E}_1 [S_0]$ en fonction de π et de λ.

TD 11 : Files d'attente markoviennes

Exercice 1:
Des véhicules arrivent à une station suivant un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. Le n-ème véhicule dépose V_n passagers qui se placent dans une file. Il y a un unique caissier. Les temps de service sont *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ et indépendants des arrivées. On suppose les V_n i.i.d. (à valeurs dans $\mathbf{N}_*$) de loi H. On note M_t le nombre de clients arrivés entre 0 et t et X_t le nombre de clients présents à l'instant t.

1. Montrer proprement que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un PMS. Déterminer ses paramètres $\tilde{\lambda}, \tilde{Q}$. Écrire que les équations de KF. En déduire $\mathbf{E}_i[M_t]$ pour $i \in \mathbf{N}$. Calculer $f(s) = \mathbf{E}_0[s^{M_t}]$ pour $s \in (0,1]$.
2. Expliquer informellement pourquoi le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un PMS et déterminer ses paramètres λ, Q.
3. Montrer que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est irréductible.
4. Montrer qu'on peut construire deux v.a. V, Z, telles que
   (i) $V \geq Z$ p.s.,
   (ii) V est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et $\mathbf{P}(V = k) = H(k)$,
   (iii) Z est à valeurs dans $\{-1\} \cup \mathbf{N}_*$, $\Pr(Z = -1) = \mu/(\alpha + \mu)$ et $\mathbf{P}(Z = k) = \alpha H(k)/(\alpha + \mu)$ $\forall\, k \geq 1$.
5. Soit $(V_k, Z_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de couples satisfaisant les conditions de la question précédente. Montrer que $Y_0 = 0$, $Y_{n+1} = Y_n + V_{k+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=0\}} + Z_{k+1}\mathbf{1}_{\{Y_n\geq 1\}}$ définit une chaîne de Markov de transition Q.
6. Montrer que cette chaîne est transitoire si $\mu < \mathbf{E}[V_1]\alpha$ et récurrente si $\mu > \mathbf{E}[V_1]\alpha$.
7. Conclure que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est transitoire si $\mu < \mathbf{E}[V_1]\alpha$ et récurrent si $\mu > \mathbf{E}[V_1]\alpha$.

Exercice 2:
On considère une file M/M/s : les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre $\alpha > 0$. Il y a s serveurs. Chaque client requiert un temps de service de loi exponentielle de paramètre μ. On appelle X_t le nombre de clients présents dans le système (file et caisses) à l'instant t. On sait que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un PMS à valeurs dans $\mathbb{N}$, et qu'il est récurrent positif si et seulement si $s\mu > \alpha$, ce qu'on suppose désormais. Soit π sa probabilité invariante. On appelle M_t le nombre de clients sortis du système avant l'instant t. On veut montrer qu'à l'équilibre (i.e. sous $\mathbf{P}_\pi$), $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α. (Ceci fonctionne en fait pour tout PNM récurrent positif).

1. Rappeler les caractéristiques λ, Q de $(X_t)_{t\geq 0}$.

2. Montrer qu'il existe une probabilité ν sur $\mathbb{N}$ telle que $\nu_i\lambda(i)Q(i,j) = \nu_j\lambda(j)Q(j,i)$ pour tout i, j.

3. Montrer que $\nu = \pi$.

4. Soient $T_n, n \geq 1$ les instants de saut du processus X. Montrer que pour tout $t \geq 0$, tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}_\pi[T_n = t] = 0$.

5. Pour $t > 0$, on pose $X_{t-} = \lim_{s\to t, s<t} X_s$. Montrer que $\mathbf{P}_\pi[X_{t-} = X_t] = 1$. (Ceci n'a rien à voir avec π).

6. On fixe désormais $T > 0$. On pose $\tilde{X}_t = X_{(T-t)-}$. Montrer que sous $\mathbf{P}_\pi$, $(\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ est un PMS de semi-groupe
$$\tilde{P}_t(i,j) = \frac{\pi_j}{\pi_i}P_t(j,i).$$

7. Montrer que $\lambda(i) = -P_0'(i,i)$ et $Q(i,j) = P_0'(i,j)/\lambda(i)$ (ceci est vrai pour tout PMS). On pourra utiliser les équations de KF.

8. Déduire de 7, 6, 2, 3 que (sous $\mathbf{P}_\pi$) les caractéristiques de $\tilde{X}$ sont λ et Q. Ainsi, $(\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ a la même loi, sous $\mathbf{P}_\pi$, que $(X_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbf{P}_\pi$.

9. Montrer que si $(N_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Poisson de paramètre α, alors $(N_T - N_{(T-t)-})_{t\in[0,T]}$ est aussi un processus de Poisson de paramètre α.

10. Exprimer proprement que N_t est le nombre de sauts positifs de X durant $[0,t]$, et que M_t est le nombre de sauts négatifs de X durant $[0,t]$.

11. Soient $\tilde{N}_t$ est le nombre de sauts positifs de $\tilde{X}$ durant $[0,t]$ (pour $t \in [0,T]$). Montrer que $M_t = \tilde{N}_T - \tilde{N}_{(T-t)-}$ pour tout $t \in [0,T]$.

12. Conclure que $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Poisson de paramètre α.