EXAMEN 9 janvier 2024
Introduction aux processus de diffusion
M2 Probabilités et Finance

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ et une suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. de v.a. réelles et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 1. On définit pour $a, b \in \mathbb{R}$

$$X_1 := Z_2 + Z_3, \qquad X_2 := aZ_1 + 2Z_2 - bZ_3.$$

(1) 1 Déterminer la loi du vecteur (X_1, X_2).

(2) 1 Pour quelles valeurs de (a, b) la loi de (X_1, X_2) a-t-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?

(3) 2 Calculer

$$\mathbb{E}[X_1 \,|\, X_2], \qquad \mathbb{E}\left[X_1^2 \,|\, X_2\right].$$

(4) 1 Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant X_2 ?

Exercice 2. Fixer s, t tels que $0 < s \leq t$. On définit pour $r \in]0,1]$

$$f(r) := \mathbb{P}\left(\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 > \frac{1}{r} - 1\right).$$

(1) 0,5 Calculer $\mathbb{P}(B_t > 0)$.

(2) 0,5 Montrer que pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et toute v.a. réelle Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z)\,\mathbb{1}_{(Z>0)}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\varphi(|Z|)], \qquad \mathbb{E}\left[\varphi(Z)\,\mathbb{1}_{(Z<0)}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\varphi(-|Z|)].$$

(3) 2 Montrer que

$$\mathbb{P}(B_s < 0, B_t > 0) = \frac{1}{4}\left(1 - f\left(\frac{s}{t}\right)\right).$$

(4) 1 Calculer $\mathbb{P}(B_s > 0, B_t > 0)$.

(5) 1 Montrer que

$$\mathbb{P}\left(B_s < 0, \sup_{s\leq u\leq t} B_u > 0\right) = 2\mathbb{P}(B_s < 0, B_t > 0).$$

(6) 1 Quelle est une variable aléatoire réelle associée au mouvement brownien ayant $(f(r))_{r\in[0,1]}$ comme fonction de répartition ?

Exercice 3. Soit $r > 0$ et $x > \varepsilon > 0$. On définit $T := \inf\{t > 0 : x + B_t = \varepsilon\}$ et $X_t : x + B_{t\wedge T}$.

(1) 1 Trouver une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que
$$M_t := x^{-r}\, X_t^r \exp\left(\int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}s\right)$$
soit une martingale locale.

(2) 1 Quelle EDS (sous forme intégrale) satisfait M ?

(3) 1 Prouver que M est une vraie martingale.

(4) 1 Définir sur $\mathscr{F}_T$ la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := M_T\mathbb{P}$. Quelle EDS satisfait $(X_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}$? De quel type de solution s'agit-il ? Est-ce que cela rappelle un processus connu ?

Exercice 4. Soit $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, avec U et U' uniformément Lipschitz sur $\mathbb{R}$.

(1) 1 Donner un résultat d'existence et unicité pour l'EDS pour $x \in \mathbb{R}$
$$X_t(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^t U'(X_s(x))\,\mathrm{d}s + B_t, \qquad t \geq 0.$$

(2) 2 Trouver une martingale positive $(Z_t)_{t\geq 0}$ d'espérance égale à 1 pour tout $t \geq 0$, telle que si on définit sur $\mathscr{F}_T$ la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := Z_T\mathbb{P}$, alors $(X_t(x) - x)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}$ est un mouvement brownien.

(3) 1 Trouver deux fonctions $V, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que p.s.
$$Z_t = \exp\left(V(X_t(x)) - V(x) - \int_0^t v(X_s(x))\,\mathrm{d}s\right), \quad t \geq 0.$$

(4) 1 Montrer que si $\Phi : C([0,T]) \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable (par rapport à quelle tribu ?) et bornée, et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues à support compact, alors
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathbb{E}[\Phi(x + B_s, s \in [0,T])\, g(x + B_T)]\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathbb{E}[\Phi(x + B_{T-s}, s \in [0,T])\, f(x + B_T)]\,\mathrm{d}x.$$
(On pourra considérer Φ de la forme $\Phi(\omega) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\omega_{t_i})$ avec $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$).

(5) 1 Montrer que pour toutes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à support compact
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathbb{E}[g(X_T(x))]\,e^{-U(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathbb{E}[f(X_T(x))]\,e^{-U(x)}\,\mathrm{d}x.$$

(6) 1 Comment peut-on interpréter la propriété précédente au niveau du semigroupe de transition de $(X_t(x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$?