Sorbonne Université, Ecole Polytechnique
M2 “Probabilités et Finance"

Introduction aux Processus de Diffusion

Lorenzo Zambotti

Année 2022–2023

Version du 19 septembre 2022

Durant le cours ces notes seront mises à jour à la page :
https://www.lpsm.paris/users/zambotti/

Table des matières

Chapitre 1

Construction du mouvement brownien

Ce cours est une introduction au mouvement brownien et au calcul stochastique. Dans ce premier chapitre, on démontre l'existence du mouvement brownien, et étudie quelques propriétés élémentaires.

L'expression "mouvement brownien" provient du mouvement irrégulier des grains de pollen à la surface d'eau, observé par le botaniste écossais Robert Brown en 1828. Bachelier (1900) et Einstein (1905) étudient quantitativement ce mouvement irrégulier en finance (déjà !) et en physique, respectivement. C'est Wiener qui, en 1923, établit la modélisation mathématique du mouvement brownien, que l'on étudie dans ce cours, tandis que la découverte de beaucoup de propriétés profondes du mouvement brownien remonte à Paul Lévy (1939, 1948).

1.1. Rappels sur les variables gaussiennes

Soit ξ une variable gaussienne centrée réduite. On vérifie facilement que la transformée de Laplace complexe de ξ est donnée par

$$\mathbb{E}\left[e^{z\xi}\right] = e^{z^2/2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

En particulier, la fonction caractéristique de ξ vaut

$$\mathbb{E}\left[e^{it\xi}\right] = e^{-t^2/2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1.1 (queue de distribution gaussienne). *Si ξ suit la loi gaussienne centrée réduite, alors pour tout $x > 0$,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} &\le \mathbb{P}(\xi > x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x} e^{-x^2/2}, \\ \mathbb{P}(\xi > x) &\le e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2. (i) On a, $\mathbb{P}(\xi > x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$, $x \to \infty$.

(ii) La borne supérieure $e^{-x^2/2}$ est moins précise, mais plus simple, que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$. Elle peut être utile dans une situation où il n'y a pas d'exigence extrême de précision sur la borne supérieure. □

Preuve du Théorème 1.1.1. Voir TD. □

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle η suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que η suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si $\eta = \sigma\xi + \mu$, où ξ suit la loi gaussienne centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$.

Remarque 1.1.3. Il sera commode de considérer la masse de Dirac δ_μ en un point $\mu \in \mathbb{R}$ comme une loi gaussienne (cas dégénéré). □

Proposition 1.1.4 (convergence de suite de variables gaussiennes). *Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes, telle que ξ_n suive la loi $\mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$.*

(i) Si la suite (ξ_n) converge en loi vers une variable aléatoire ξ, alors ξ suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ et $\sigma := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$.

(ii) Si la suite (ξ_n) converge en probabilité vers ξ, alors la convergence a lieu dans L^p, pour tout $p \in [1, \infty[$.

Preuve. Voir TD. □

Définition 1.1.5 (vecteur aléatoire gaussien). *Un vecteur aléatoire $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées (c'est-à-dire $\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j = \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_n\xi_n$ pour $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$) suit une loi gaussienne.*

Remarque 1.1.6. Si $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ est un vecteur gaussien, alors chaque coordonnée est une variable gaussienne réelle. Attention, la réciproque est **fausse**. □

Proposition 1.1.7. *Pour $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ vecteur gaussien, on définit $m = \mathbb{E}(\xi)$ et $Q_{ij} = \mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

(1) La fonction caractéristique de ξ est donnée par

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle \xi, u\rangle)] = \exp(i\langle m, u\rangle - \frac{1}{2}\langle Qu, u\rangle), \qquad u \in \mathbb{R}^n,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

(2) m et Q déterminent uniquement la loi de ξ. On écrit $\xi \sim \mathscr{N}(m, Q)$.

(3) Si $\det Q \neq 0$ alors la loi de ξ admet une densité explicite :

$$\mathscr{N}(m, Q)(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} \exp(-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-m), x-m\rangle)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

(4) Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $A\xi$ est un vecteur gaussien avec loi $\mathscr{N}(Am, AQA^T)$ ou $A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est la matrice transposée.

(5) Pour que les variables aléatoires $\xi_1, \cdots, \xi_n$ soient indépendantes, il faut et il suffit que la matrice Q des covariances de ξ soit diagonale.

(6) Soit $(\eta_1, \cdots, \eta_N)$ un vecteur gaussien et $0 = n_1 < n_2 < \cdots < n_m = N$. Pour que la famille de vecteurs aléatoires $(\theta_1, \cdots, \theta_{m-1})$, où $\theta_k = (\eta_{n_k+1}, \ldots, \eta_{n_{k+1}})$, soit indépendante, il faut et il suffit que $\mathrm{Cov}(\eta_i, \eta_j) = 0$, $\forall i, j \leq N$ tels que $n_k < i \leq n_{k+1}$ et $n_h < j \leq n_{h+1}$ pour $k \neq h$.

1.2. Construction du mouvement brownien

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.2.1. *Un* **processus** *est une famille $X = (X_t, t \in \mathbf{T})$ de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Un processus $X = (X_t, t \in \mathbf{T})$ est un* **processus gaussien** *si pour tout $n \geq 1$ et tout $(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbf{T}^n$, $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien. On dit que X est centré si pour tout $t \in \mathbf{T}$, $\mathbb{E}(X_t) = 0$.*

Définition 1.2.2. *On dit que $B = (B_t, t \geq 0)$ est un* **mouvement brownien** *(réel, issu de 0), si B est un processus gaussien centré de covariance*

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = \min\{s, t\} =: s \wedge t, \qquad s \geq 0, \ \ t \geq 0.$$

Remarque 1.2.3. (i) De temps en temps, on dit que B est un mouvement brownien standard, car on peut s'intéresser également aux processus gaussiens centrés de covariance $\sigma^2(s \wedge t)$.

(ii) Pour tout réel $T > 0$, on appelle un mouvement brownien (standard) sur $[0, T]$ tout processus gaussien centré de covariance $s \wedge t$, $(s, t) \in [0, T]^2$. □

Proposition 1.2.4. *$(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien si et seulement si il vérifie les conditions suivantes :*

(i) $B_0 = 0$, p.s.

(ii) Pour tout $n \geq 2$, et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, le vecteur aléatoire $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_n - B_{t_{n-1}})$ est une famille indépendante.

(iii) Pour tous $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, t - s)$.

Remarque 1.2.5. On dira que le mouvement brownien est à accroissements indépendants (propriété (ii)) et stationnaires (propriété (iii)). □

Preuve de la Proposition 1.2.4. “Si" : On suppose que B vérifie (i)–(iii). Soient $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$. Par hypothèse, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ sont des variables gaussiennes indépendantes. Donc $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est un vecteur gaussien, et $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ l'est aussi. On a donc démontré que B est un processus gaussien, qui est évidemment centré d'après (iii) et (i).

Pour vérifier que B est un mouvement brownien, il suffit maintenant de déterminer sa fonction de covariance. Soient $t \ge s \ge 0$. On a $\mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2)$. L'indépendance entre B_s et $B_t - B_s$ nous dit que $\mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) = 0$, tandis que d'après (iii), $\mathbb{E}(B_s^2) = s$. Donc $\mathbb{E}(B_s B_t) = s$. Évidemment, si $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ est quelconque, on a alors par symétrie $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$. En conclusion, B est un mouvement brownien.

“Seulement si" : Soit B un mouvement brownien. Alors $\mathbb{E}(B_0^2) = 0$, d'où (i). Soient maintenant $t \ge s \ge 0$. La variable $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne centrée, de variance $\mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = \mathbb{E}(B_t^2) + \mathbb{E}(B_s^2) - 2\mathbb{E}(B_s B_t) = t + s - 2s = t - s$. D'où (iii).

Il reste donc à prouver (ii). Soient $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$. On sait que $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1})$ est un vecteur gaussien. En plus, la matrice de covariance de ce vecteur gaussien est diagonale, car pour $j > i$, $\mathbb{E}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})] = \mathbb{E}(B_{t_j} B_{t_i}) - \mathbb{E}(B_{t_{j-1}} B_{t_i}) - \mathbb{E}(B_{t_j} B_{t_{i-1}}) + \mathbb{E}(B_{t_{j-1}} B_{t_{i-1}}) = t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0$. D'après la Proposition 1.1.7, les composantes de ce vecteur gaussien sont indépendantes. □

Nous obtenons donc que

COROLLAIRE 1.2.6. *Si $B = (B_t, t \ge 0)$ est un mouvement brownien alors pour tous $0 := t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ a densité dans $\mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{P}((B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \in \mathrm{d}x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1 (t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right) \mathrm{d}x,$$

où $x_0 := 0$.

Preuve. On applique la Proposition 1.1.7 à $\xi = (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ qui a loi $\mathscr{N}(0, R)$, où $R := \mathrm{diag}(t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1})$. Si on définit $Ax = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n)$, alors $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = A\xi$ a loi $\mathscr{N}(0, ARA^T)$ et densité donnée par (1.1) avec $Q^{-1} = (A^T)^{-1} R^{-1} A^{-1}$. Un calcul montre que $A^{-1}x = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ et ceci permet de conclure puisque

$$\langle Q^{-1}x, x \rangle = \langle R^{-1}A^{-1}x, A^{-1}x \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}.$$

Pour terminer il faut calculer $\det Q = (\det A)^2 \det R$; or A est une matrice triangulaire inférieure avec $A_{ii} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, donc $\det A = 1$ et $\det Q = \det R = t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})$. □

Théorème 1.2.7. *On peut construire au moins un mouvement brownien.*

Preuve. Nous considérons l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}, \mathrm{d}x)$ où $\mathscr{B}$ sont les Boréliens de $\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{d}x$ est la mesure de Lebesgue. L'espace $H := L^2(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}, \mathrm{d}x)$ est hilbertien séparable et admet donc une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous considérons une suite iid $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables réelles gaussiennes standard et nous définissons

$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \, \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \ n \in \mathbb{N},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de H. Alors pour $m > n$

$$\mathbb{E}((B_t^n - B_t^m)^2) = \sum_{k=n+1}^{m} \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle^2$$

ce qui montre que $(B_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$ car

$$\sum_k \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle^2 = \|\mathbb{1}_{[0,t]}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = t < +\infty.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ il existe donc une limite B_t dans $L^2(\mathbb{P})$ de B_t^n quand $n \to +\infty$.

Il faut maintenant prouver que $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ a les propriétés souhaitées. D'abord, pour tout choix de $(t_1, \ldots, t_i) \in (\mathbb{R}_+)^i$, $(B_{t_1}^n, \ldots, B_{t_i}^n)$ est un vecteur gaussien centré car fonction linéaire du vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, et la limite dans L^p de vecteurs gaussiens centrés est un vecteur gaussien centré. Il reste à calculer la fonction de covariance :

$$\mathbb{E}(B_s^n B_t^n) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle \, \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle$$

et par la convergence dans $L^2(\mathbb{P})$ de B_t^n vers B_t nous obtenons

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,s]} \rangle \, \langle e_k, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle = s \wedge t.$$

Ceci conclut la preuve. □

□

1.3. Régularisation des trajectoires

On se met dans un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables.

Soit $B = (B_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien. Les applications $t \mapsto B_t(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, sont appelées les trajectoires de B. Pour l'instant, on ne peut rien affirmer au sujet de ces trajectoires : il n'est même pas évident (ni vrai en général) que ces applications soient mesurables. Le but de ce paragraphe est de montrer que, quitte à "modifier un peu" B, on peut faire en sorte que les trajectoires soient continues.

DÉFINITION 1.3.1. *Soient $(X_t,\, t \in \mathbf{T})$ et $(\widetilde{X}_t,\, t \in \mathbf{T})$ deux processus aléatoires (c'est-à-dire deux familles de variables aléatoires) indexés par le même ensemble $\mathbf{T}$. On dit que $\widetilde{X}$ est une modification de X si*

$$\forall\, t \in \mathbf{T}, \qquad \mathbb{P}[X_t = \widetilde{X}_t] = 1.$$

On remarque que pour tout $t_1,\, t_2,\, \cdots,\, t_n$, le vecteur aléatoire $(\widetilde{X}_{t_1}, \cdots, \widetilde{X}_{t_n})$ a même loi que $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$. En particulier, si X est un mouvement brownien, alors $\widetilde{X}$ est aussi un mouvement brownien. En revanche, les trajectoires de $\widetilde{X}$ peuvent avoir un comportement totalement différent de celles de X. Il peut arriver par exemple que les trajectoires de $\widetilde{X}$ soient toutes continues alors que celles de X sont toutes discontinues.

DÉFINITION 1.3.2. *Deux processus X et $\widetilde{X}$ sont dits indistinguables si*

$$\mathbb{P}[\,\forall\, t \in \mathbf{T},\;\; X_t = \widetilde{X}_t] = 1.$$

Ceci signifie que l'ensemble $\{\forall\, t \in \mathbf{T}, \quad X_t = \widetilde{X}_t\}$ contient une partie mesurable de probabilité 1.

Si X et $\widetilde{X}$ sont indistinguables, alors $\widetilde{X}$ est une modification de X. La notion d'indistinguabilité est cependant beaucoup plus forte : deux processus indistinguables ont presque sûrement les mêmes trajectoires.

Si $\mathbf{T} = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si X et $\widetilde{X}$ sont deux processus dont les trajectoires sont p.s. continues, alors $\widetilde{X}$ est une modification de X si et seulement si X et $\widetilde{X}$ sont indistinguables. En effet, si $\widetilde{X}$ est une modification de X, alors p.s. pour tout $t \in I \cap \mathbb{Q}$, $X_t = \widetilde{X}_t$. Par continuité, p.s. pour tout $t \in I$, $X_t = \widetilde{X}_t$, c'est-à-dire que X et $\widetilde{X}$ sont indistinguables.

THÉORÈME 1.3.3 (critère de Kolmogorov). *Soit $X = (X_t,\, t \in I)$ un processus aléatoire indexé par un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace métrique complet (E, d). Supposons* *qu'il existe trois réels strictement positifs p, ε et C tels que*

$$\mathbb{E}\left[\, d(X_s, X_t)^p \,\right] \le C\, |t-s|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall\, s,t \in I.$$

Alors il existe une modification $\widetilde{X}$ de X dont les trajectoires sont localement höldériennes d'exposant α, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{p}[$: c'est-à-dire que pour tout $T > 0$ et tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{p}[$, il existe $C_\alpha(T,\omega)$ tel que

$$d(\widetilde{X}_s(\omega),\, \widetilde{X}_t(\omega)) \le C_\alpha(T,\omega)\, |t-s|^\alpha, \qquad \forall\, s,t \in I,\;\; s,t \le T.$$

En particulier, il existe une modification continue de X, qui est unique à indistinguabilité près.

Preuve. L'unicité provient de la remarque avant l'énoncé du théorème.

On démontre l'existence. Pour simplifier l'écriture, on suppose que $I = [0,1]$. L'hypothèse du théorème implique que, pour $a > 0$ et $s,t \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(d(X_s, X_t) \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[d(X_s,X_t)^p]}{a^p} \le \frac{C\,|t-s|^{1+\varepsilon}}{a^p}.$$

On applique cette inégalité à $s = \frac{i-1}{2^n}$ et $t = \frac{i}{2^n}$ et $a = 2^{-n\alpha}$ pour voir que

$$\mathbb{P}\left\{ d(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}) \ge 2^{-n\alpha} \right\} \le \frac{C}{2^{(1+\varepsilon-p\alpha)n}}, \qquad i = 1,2,\cdots,2^n.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left\{ \exists i \le 2^n :\; d(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}) \ge 2^{-n\alpha} \right\} \le \frac{C}{2^{(\varepsilon-p\alpha)n}},$$

ce qui est sommable (car $p\alpha < \varepsilon$). Le lemme de Borel–Cantelli nous dit que l'on peut trouver $A \in \mathscr{F}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$, il existe $n_0 = n_0(\omega) < \infty$ de sorte que

$$(*) \qquad d(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n}) < 2^{-n\alpha}, \qquad \forall n \ge n_0,\;\; \forall 1 \le i \le 2^n.$$

On note D l'ensemble dénombrable des nombres dyadiques de $[0,1[$, c'est-à-dire des réels $t \in [0,1[$ qui s'écrivent

$$t = \sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon_k}{2^k},$$

avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Considérons $s,t \in D$ avec $s < t$. Soit $q \ge 0$ le plus grand entier tel que $t - s \le 2^{-q}$. On note pour $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}, \qquad \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\}.$$

Soit $k := \lfloor 2^q s \rfloor$, et $k \le \lfloor 2^q t \rfloor \le k+1$. On peut trouver deux entiers $\ell \ge 0$ et $m \ge 0$, tels que

$$\begin{aligned} s &= \frac{k}{2^q} + \frac{\varepsilon_{q+1}}{2^{q+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+\ell}}{2^{q+\ell}}, \\ t &= \frac{k}{2^q} + \frac{\widetilde{\varepsilon}_q}{2^q} + \frac{\widetilde{\varepsilon}_{q+1}}{2^{q+1}} + \cdots + \frac{\widetilde{\varepsilon}_{q+m}}{2^{q+m}}, \end{aligned}$$

où ε_j, $\widetilde{\varepsilon}_j = 0$ ou 1 (si $q = 0$, alors $k = 0$). Si l'on note

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{k}{2^q} + \frac{\varepsilon_{q+1}}{2^{q+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+i}}{2^{q+i}}, \qquad 0 \le i \le \ell, \\ t_j &= \frac{k}{2^q} + \frac{\widetilde{\varepsilon}_q}{2^q} + \frac{\widetilde{\varepsilon}_{q+1}}{2^{q+1}} + \cdots + \frac{\widetilde{\varepsilon}_{q+j}}{2^{q+j}}, \qquad 0 \le j \le m, \end{aligned}$$

alors pour $\omega \in A$,

$$\begin{aligned} d(X_s, X_t) &= d(X_{s_\ell}, X_{t_m}) \\ &\le d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \sum_{i=1}^{\ell} d(X_{s_{i-1}}, X_{s_i}) + \sum_{j=1}^{m} d(X_{t_{j-1}}, X_{t_j}) \\ &\le K_\alpha(\omega)\, 2^{-q\alpha} + \sum_{i=1}^{\ell} K_\alpha(\omega)\, 2^{-(q+i)\alpha} + \sum_{j=1}^{m} K_\alpha(\omega)\, 2^{-(q+j)\alpha}, \end{aligned}$$

où

$$K_\alpha(\omega) := \sup_{n\ge 1} \max_{1\le i\le 2^n} \frac{d(X_{(i-1)/2^n}, X_{i/2^n})}{2^{-n\alpha}}$$

qui est finie d'après $(*)$. Donc pour $\omega \in A$,

$$d(X_s, X_t) \le 2K_\alpha(\omega) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(q+i)\alpha} = \frac{2K_\alpha(\omega)2^{-q\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \le \frac{2^{1+\alpha}K_\alpha(\omega)}{1-2^{-\alpha}}\,(t-s)^\alpha,$$

car $2^{-(q+1)} < t-s$. Ceci nous dit que p.s. la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est höldérienne sur D et donc uniformément continue sur D. Puisque (E, d) est complet, cette fonction a p.s. un unique prolongement continu à $I = [0, 1]$, et ce prolongement est lui aussi höldérien d'exposant α. Plus précisément, soit pour tout $t \in [0, 1]$

$$\widetilde{X}_t(\omega) := \lim_{s\to t,\ s\in D} X_s(\omega)$$

si $\omega \in A$, et $\widetilde{X}_t(\omega) := x_0$ (un point quelconque de E) si $\omega \notin A$. D'après les remarques précédentes, $\widetilde{X}$ a des trajectoires höldériennes d'exposant α sur $[0, 1]$.

Il reste à voir que $\widetilde{X}$ est une modification de X. Pour tous $s, t \in [0, 1]$ nous avons par l'hypothèse du théorème

$$\mathbb{E}\,[\,(d(X_s, X_t)^p) \wedge 1\,] \le \mathbb{E}\,[\,d(X_s, X_t)^p\,] \le C\,|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Pour $s \in D$, puisque $X_s = \widetilde{X}_s$,

$$\mathbb{E}\left[\left(d(\widetilde{X}_s, X_t)^p\right) \wedge 1\right] = \mathbb{E}\,[\,(d(X_s, X_t)^p) \wedge 1\,] \le C\,|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Si on fait tendre $s \in D$ vers $t \in [0, 1]$, ce qui est possible par la densité de D dans $[0, 1]$, l'on obtient par convergence dominée

$$\mathbb{E}\left[\left(d(\widetilde{X}_t, X_t)^p\right) \wedge 1\right] = 0.$$

Donc p.s. $\widetilde{X}_t = X_t$. □

Corollaire 1.3.4. *Soit $B = (B_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien. Le processus B admet une modification dont les trajectoires sont localement höldériennes d'exposant $\frac{1}{2} - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. En particulier, B admet une modification continue.*

Preuve. Fixons $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Soient $t, s \geq 0$. La variable aléatoire $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, |t-s|)$. Donc pour tout $p > 0$, $\mathbb{E}[\,|B_t - B_s|^p] = C_p\,(t-s)^{p/2}$, où $C_p = \mathbb{E}[\,|\mathscr{N}(0,1)|^p] < \infty$. Il suffit alors de prendre p suffisamment grand tel que $\frac{1}{2} - \varepsilon < (p/2) - \frac{1}{p}$ pour voir que B admet une modification dont les trajectoires sont localement höldériennes d'exposant $\frac{1}{2} - \varepsilon$. □

On voit donc que si B est un mouvement brownien, on peut toujours le remplacer par un processus B' tel que $\forall\, t \geq 0$, $\mathbb{P}(B'_t = B_t) = 1$ et tel que B' soit à trajectoires continues (voire à trajectoires localement höldériennes d'exposant $\frac{1}{2} - \varepsilon$). Dans la suite, on fera ce remplacement systématiquement : cela revient à dire que dans la définition du mouvement brownien, on impose aussi la condition que le processus soit à trajectoires continues.

Il est naturel de se demander si les trajectoires d'un mouvement brownien peuvent être localement höldériennes d'exposant $\frac{1}{2}$. La réponse à cette question est non, comme on le verra dans l'Exemple 2.2.7. On verra dans le Corollaire 2.5.2 dans le prochain chapitre une autre propriété de (manque de) régularité pour les trajectoires du mouvement brownien.

1.4. Processus canonique et mesure de Wiener

On considère $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}_+$, muni de la topologie de convergence uniforme sur les intervalles fermés bornés :

$$d(\mathrm{w}, \mathrm{w}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\delta_n(\mathrm{w}, \mathrm{w}')}{1 + \delta_n(\mathrm{w}, \mathrm{w}')},$$

où $\delta_n(\mathrm{w}, \mathrm{w}') := \sup_{t \in [0,n]} |\mathrm{w}(t) - \mathrm{w}'(t)|$.

Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ le processus des coordonnées :

$$X_t(\mathrm{w}) := \mathrm{w}(t), \qquad \mathrm{w} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

Le lemme suivant identifie la tribu $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$ engendrée par ces coordonnées (c'est-à-dire la plus petite tribu rendant mesurables toutes les applications X_t) avec la tribu borélienne $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Lemme 1.4.1. *On a $\sigma(X_t,\, t \geq 0) = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.*

Preuve. Pour tout $t \geq 0$, X_t est continue, donc mesurable par rapport à $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Par conséquent, $\sigma(X_t,\, t \geq 0) \subset \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Inversement, pour tout $\mathrm{w}_0 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, la fonction $\mathrm{w} \mapsto \delta_n(\mathrm{w}, \mathrm{w}_0) = \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |\mathrm{w}(t) - \mathrm{w}_0(t)|$ est $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$-mesurable, ainsi que $d(\mathrm{w}, \mathrm{w}_0)$. Soit maintenant F un ensemble fermé quelconque de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et soit (w_n) une suite dense de F (car on est dans un espace séparable), et on a alors

$$F = \{\mathrm{w} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) :\, d(\mathrm{w}, F) = 0\} = \{\mathrm{w} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) :\, \inf_n d(\mathrm{w}, \mathrm{w}_n) = 0\},$$

qui est un élément de $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$. Par conséquent, $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \subset \sigma(X_t,\, t \geq 0)$. $\square$

Soit $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ un processus continu défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On considère l'application φ suivante :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \varphi(\omega) = (t \mapsto Z_t(\omega)). \end{aligned}$$

Cette application est mesurable si on munit l'espace $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de la tribu $\sigma(X_t,\, t \geq 0)$ et donc, par le Lemme précédent, si on le munit de la tribu borélienne.

On appelle **loi** de Z la mesure image sur $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ de $\mathbb{P}$ par l'application φ. Il est clair par le théorème de classe monotone que la loi de Z est déterminée par les lois fini-dimensionnelles $(Z_{t_1}, \cdots, Z_{t_n})$. En effet, deux mesures sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ sont identiques si elles attribuent les mêmes valeurs aux ensembles du type de $(X_{t_1}(\mathrm{w}), \cdots, X_{t_n}(\mathrm{w})) \in A$, où $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$).

Dans le cas particulier où Z est un mouvement brownien, cette mesure image particulière de Z sera notée par $\mathbf{W}$. Il s'agit d'une mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\mathbf{W}\{\mathrm{w} : \mathrm{w}(0) = 0\} = 1$, et que pour tout $n \geq 1$, tout $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ et tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}\left\{\mathrm{w} :\, (X_{t_1}(\mathrm{w}), \cdots, X_{t_n}(\mathrm{w})) \in A\right\} \\ = &\int_A \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{t_k - t_{k-1}}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \end{aligned}$$

avec la notation $x_0 := 0$, par le Corollaire 1.2.6. Cette formule caractérise la mesure de probabilité $\mathbf{W}$, et ne dépend pas du choix du mouvement brownien pour la construction. On appelle $\mathbf{W}$ la **mesure de Wiener**, et le processus des coordonnées $(X_t,\, t \geq 0)$ est appelé **processus canonique** (du mouvement brownien). En résumé, on a prouvé le

THÉORÈME 1.4.2. *Il existe une unique probabilité (mesure de Wiener) sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ sous laquelle le processus des coordonnées $(X_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.*

Le processus canonique du mouvement brownien permet de voir clairement la mesurabilité de la plupart des ensembles dans la pratique. Par exemple, pour tout $t > 0$, $\sup_{0\le s\le t} X_s$ et $\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s$ sont des variables aléatoires. En terme du mouvement brownien générique, on sait que pour tout $t > 0$, $\sup_{0\le s\le t} X_s$ et $\int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}s$ sont des variables aléatoires, si B est un mouvement brownien.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mathbf{W}_x$ la mesure image de $\mathbf{W}$ par l'application $\mathrm{w} \mapsto \mathrm{w} + x$. Autrement dit, $\mathbf{W}_x$ est la loi de $(x + X_t)_{t\ge 0}$. Il est clair que $\mathbf{W}_x\{\mathrm{w} : \mathrm{w}(0) = x\} = 1$. Le processus des coordonnées $(X_t,\, t \ge 0)$ sous $\mathbf{W}_x$ est appelé un mouvement brownien issu de $X_0 = x$. Il s'agit d'un processus à trajectoires continues p.s. et à accroissements indépendants avec $X_0 = x$, p.s., tel que $\forall\, t \ge s$, $X_t - X_s$ suit la loi $\mathscr{N}(0, t-s)$.

Chapitre 2

Mouvement brownien et propriété de Markov

Le mouvement brownien est au carrefour de plusieurs classes importantes de processus aléatoires. Nous l'avons introduit dans le chapitre précédent comme un processus gaussien. Le présent chapitre est consacré à l'étude du mouvement brownien en tant que processus de Markov (au sens fort). Plus tard dans le Chapitre 3, on étudiera le mouvement brownien en tant que martingale.

2.1. Premières propriétés

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $B = (B_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0. Autrement dit, B est un processus à trajectoires continues p.s. et à accroissements indépendants avec $B_0 = 0$, p.s., tel que $\forall\, t \geq s$, $B_t - B_s$ suit la loi $\mathscr{N}(0, t-s)$.

Proposition 2.1.1. *Si B est un mouvement brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements browniens.*

(i) $\widetilde{B}_t = -B_t$. *(symétrie)*
(ii) $\widetilde{B}_t = tB_{1/t}$, $B_0 = 0$. *(inversion du temps)*
(iii) $a > 0$ *fixé,* $\widetilde{B}_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$. *(scaling)*
(iv) $T > 0$ *fixé,* $\widetilde{B}_t = B_T - B_{T-t}$, $t \in [0, T]$. *(retournement du temps)*

Preuve. Triviale. Il suffit de vérifier à chaque fois que B est un processus gaussien centré de covariance $s \wedge t$. Seule la partie (ii) a besoin d'un traitement spécifique puisque les trajectoires ne sont pas nécessairement continues au point 0. Cela ne nous pose pas vraiment de problème, car dans ce cas B est, d'après le critère de Kolmogorov, indistinguable d'un mouvement brownien. □

Exemple 2.1.2 (pont brownien). Soit B un mouvement brownien, et soit $b_t = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$. Il s'agit d'un processus gaussien centré de covariance $(s \wedge t) - st$. On appelle b un pont brownien (standard).

Le processus $(b_t,\, t \in [0, 1])$ est indépendant de la variable aléatoire B_1.

Si b est un pont brownien, alors $(b_{1-t}, t \in [0, 1])$ est aussi un pont brownien.

Si b est un pont brownien, alors $\widetilde{B}_t = (1+t)b_{t/(1+t)}$, $t \geq 0$, est un mouvement brownien. Notons que $b_t = (1-t)\widetilde{B}_{t/(1-t)}$. □

EXEMPLE 2.1.3. Par continuité, $\lim_{t\to 0+} B_t = 0$, p.s. Par inversion du temps, on obtient que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0, \qquad \text{p.s.}$$

□

2.2. Propriété de Markov simple

Dans cette section, $\mathscr{F}_t$ désigne la tribu engendrée par $(B_s,\, 0 \leq s \leq t)$.

THÉORÈME 2.2.1 (propriété de Markov simple). *Soit $s \geq 0$. Le processus $(\widetilde{B}_t := B_{t+s} - B_s,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien, indépendant de $\mathscr{F}_s$.*

Preuve. On peut facilement vérifier que $\widetilde{B}$ est un processus gaussien centré à trajectoires p.s. continues, avec $\widetilde{B}_0 = 0$, p.s., dont la covariance vaut $\mathbb{E}(\widetilde{B}_t \widetilde{B}_{t'}) = t \wedge t'$; il est donc un mouvement brownien.

Pour démontrer l'indépendance, il suffit de montrer que pour $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ et $0 < s_1 < \cdots < s_m \leq s$, les vecteurs $(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n})$ et $(B_{s_1}, \cdots, B_{s_m})$ sont indépendants. Or, $\mathrm{Cov}(\widetilde{B}_{t_i}, B_{s_j}) = \mathbb{E}[(B_{s+t_i} - B_s)B_{s_j}] = 0$ (car $s \geq s_j$) ; comme $(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n}, B_{s_1}, \cdots, B_{s_m})$ est un vecteur gaussien, on a l'indépendance entre $(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n})$ et $(B_{s_1}, \cdots, B_{s_m})$. □

La propriété de Markov du mouvement brownien peut être renforcée de la façon suivante.

THÉORÈME 2.2.2. *Soit $s \geq 0$, et soit*

$$\mathscr{F}_{s+} := \bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u.$$

Le processus $(\widetilde{B}_t := B_{t+s} - B_s,\, t \geq 0)$ est indépendant de $\mathscr{F}_{s+}$.

Preuve. Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier par un argument de classe monotone que, pour $A \in \mathscr{F}_{s+}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n}) \right] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) \right]. \tag{2.2}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 2.2.1, le processus $t \mapsto B_{t+s+\varepsilon} - B_{s+\varepsilon}$ est indépendant de $\mathscr{F}_{s+\varepsilon}$, et a fortiori de $\mathscr{F}_{s+}$. Donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A F(B_{t_1+s+\varepsilon} - B_{s+\varepsilon}, \cdots, B_{t_n+s+\varepsilon} - B_{s+\varepsilon}) \right] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) \right].$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, et à l'aide de la continuité des trajectoires et du théorème de convergence dominée, on obtient (2.2). □

THÉORÈME 2.2.3 (loi 0–1 de Blumenthal). *La tribu* $\mathscr{F}_{0+}$ *est triviale, au sens où* $\forall A \in \mathscr{F}_{0+}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ *ou 1.*

Preuve. Par le Théorème 2.2.2, $\mathscr{F}_{0+}$ est indépendante de la tribu $\sigma(B_t,\, t \geq 0)$. Soit $A \in \mathscr{F}_{0+}$. Comme $\mathscr{F}_{0+}$ est contenue dans $\sigma(B_t,\, t \geq 0)$, on en déduit que A est indépendant de lui-même. □

EXEMPLE 2.2.4. Soit $\tau := \inf\{t > 0 :\ B_t > 0\}$. Alors, p.s. $\tau = 0$.

Preuve. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau = 0\} = \bigcap_{m \geq n,\, m \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq 1/m} B_u > 0 \right\} \in \mathscr{F}_{1/n},$$

donc $\{\tau = 0\} \in \cap_n \mathscr{F}_{1/n} = \mathscr{F}_{0+}$. Pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(\tau \leq t) \geq \mathbb{P}(B_t > 0) = 1/2$. Donc $\mathbb{P}(\tau = 0) = \lim_{t \to 0+} \mathbb{P}(\tau \leq t) \geq 1/2$. Par la loi 0–1 de Blumenthal, $\mathbb{P}(\tau = 0) = 1$. □

EXEMPLE 2.2.5. Grâce à l'exemple précédent, nous obtenons plusieurs résultats intéressants :

(1) Comme $-B$ est un mouvement brownien, on voit que p.s. $\inf\{t \geq 0 :\ B_t < 0\} = 0$. Donc le mouvement brownien visite $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ dans chaque voisinage de 0. Par conséquent, il existe une suite $(t_n = t_n(\omega))_{n \geq 0}$ strictement décroissante vers 0 telle que $B_{t_n}(\omega) = 0$, $\forall n$. En particulier, p.s. $\inf\{t > 0 :\ B_t = 0\} = 0$.

(2) Par inversion du temps, on voit aussi que p.s. $\{t > 0 :\ B_t = 0\}$ est non bornée.

(3) D'autre part, on a vu que $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s > 0) = 1$, $\forall t > 0$. Soit $x > 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s > x \right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

En faisant $t \to +\infty$, le terme à droite tend vers 1. Donc $\mathbb{P}(\sup_{s \geq 0} B_s > x) = 1$, $\forall x > 0$. Autrement dit, $\sup_{s \geq 0} B_s = +\infty$, p.s. Par symétrie, $\inf_{s \geq 0} B_s = -\infty$, p.s. (En particulier, cela confirme que $\{t > 0 :\ B_t = 0\}$ est p.s. non bornée.) Donc, si $\tau_a := \inf\{t > 0 :\ B_t = a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (convention : $\inf \varnothing := \infty$), alors $\mathbb{P}(\tau_a < \infty, \forall a \in \mathbb{R}) = 1$.

EXEMPLE 2.2.6. Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres strictement décroissante vers 0. Alors p.s. $B_{t_n} > 0$ pour une infinité de n, et $B_{t_n} < 0$ pour une infinité de n.

En effet, soit $A_n := \{B_{t_n} > 0\}$. Alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\cup_{n=N}^{\infty} A_n)$, qui est $\geq \limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{2}$. Or pour tous $n \geq m$ on a $A_n \in \mathscr{F}_{t_m}$ et donc $\limsup A_n = \cap_n \cup_{k \geq n} A_k = \cap_{n \geq m} \cup_{k \geq n} A_k \in \mathscr{F}_{t_m}$. Il s'en suit que $\limsup A_n \in \mathscr{F}_{0+}$, d'où $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. □

Exemple 2.2.7. On a

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty, \qquad \text{p.s.}$$

En effet, fixons $K > 0$, et soit $A_n := \{\sqrt{n}\, B_{1/n} > K\}$. Comme $\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N) = \mathbb{P}(B_1 > K) > 0$, on a, par la loi 0–1, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, et a fortiori, $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$, p.s. (Donc p.s. les trajectoires de B ne sont pas höldériennes d'exposant $\frac{1}{2}$.) On obtient le résultat voulu à l'aide de l'inversion du temps et par symétrie. □

On peut énoncer la propriété de Markov du mouvement brownien sous une forme plus faible mais qui aura une extension à une classe plus large de processus. On rappelle les notations introduites dans la section 1.4 ; $X_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X_t(\mathrm{w}) := \mathrm{w}_t$ est le processus canonique, $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est la tribu borélienne de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\mathbf{W}_x$ est la loi de $(x + B_t)_{t\geq 0}$. Nous posons aussi $\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_u, u \leq t)$. Alors

Proposition 2.2.8. *Pour toute fonction mesurable $F : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ et $s \geq 0$*

$$\mathbf{W}_x \left[F(X_{t+s}, t \geq 0) \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbf{W}_{X_s}[F], \qquad \mathbf{W}_x - \text{p.s.}$$

Preuve. Sous $\mathbf{W}_x$, $(X_t - x)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien ; donc par le Théorème 2.2.1 $(X_{t+s} - x - (X_s - x))_{t\geq 0} = (X_{t+s} - X_s)_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma(X_u - x, u \leq s) = \sigma(X_u, u \leq s) = \mathscr{F}_s^X$. Donc pour tout $A \in \mathscr{F}_s^X$

$$\mathbf{W}_x \left[\mathbb{1}_A \, F(X_{t+s}, t \geq 0) \right] = \mathbf{W}_x \left[\mathbb{1}_A \, F(X_s + X_{t+s} - X_s, t \geq 0) \right]$$
$$\mathbf{W}_x \Big[\mathbb{1}_A \, \mathbf{W}_x \left[F(X_s + X_{t+s} - X_s, t \geq 0) \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] \ \Big] = \mathbf{W}_x \Big[\mathbb{1}_A \, \mathbf{W}_{X_s}[F] \ \Big].$$

Ceci conclut la preuve. □

2.3. Semi-groupe du mouvement brownien

On note $C_b(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ continue bornée}\}$. Si on munit $C_b(\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_\infty := \sup |f|$ on obtient un espace de Banach. On note aussi $C_0 := \{f \in C_b(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$; $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ est aussi de Banach. On définit pour $f \in C_b(\mathbb{R})$, $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$P_t f(x) := \mathbf{W}_x[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Proposition 2.3.1. *Pour toute $f \in C_b(\mathbb{R})$, $P_t f \in C_b(\mathbb{R})$ et $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. De plus, $P_t(P_s f) = P_{t+s} f$ et on a les propriétés suivantes :*

1. **Propriété de Feller :** *Si $f \in C_0$, alors $P_t f \in C_0$ et $\lim_{t\downarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0$.*

2. **Générateur infinitésimal :** *Si* $f \in C_K^2$ *(fonction de classe* C^2 *à support compact), alors* $\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2} f''(x)$.
3. **Lien avec l'équation de la chaleur :** *Si* $f \in C_b(\mathbb{R})$*, soit* $u(t,x) := P_t f(x)$*. On a* $u(0,x) = f(x)$ *et*
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0.$$

Preuve. Soit $\mathscr{F}_t^X$, comme avant, la tribu engendrée par le processus canonique $(X_s,\, 0 \le s \le t)$. Par la propriété de Markov, pour tout $s > 0$ et toute fonction borélienne positive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,
$$\mathbf{W}_x[\, f(X_{t+s}) \,|\, \mathscr{F}_s^X \,] = P_t f(X_s) = \mathbf{W}_x[\, f(X_{t+s}) \,|\, X_s \,].$$
On obtient que $P_t(P_s f) = P_{t+s} f$, car
$$P_{t+s} f(x) = \mathbf{W}_x[f(X_{t+s})] = \mathbf{W}_x[\, \mathbf{W}_x[f(X_{t+s}) \,|\, \mathscr{F}_t^X]] = \mathbf{W}_x[P_s f(X_t)] = P_t(P_s f)(x).$$
Soit $t > 0$. On a
$$(P_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + t^{1/2} z) \mathrm{e}^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z.$$
Par convergence dominée (car f est continue et bornée), on a $P_t f \in C_0$.

Montrons maintenant que $\lim_{t\downarrow 0} P_t f = f$ uniformément sur $\mathbb{R}$. On écrit
$$(P_t f)(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2/2} [f(x + t^{1/2} z) - f(x)]\, \mathrm{d}z.$$
Le théorème de convergence dominée permet de voir tout de suite que $P_t f \to f$ simplement. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\int_{|z|>M} \mathrm{e}^{-z^2/2} \|f\|_\infty \, \mathrm{d}z < \varepsilon$. Pour $|z| \le M$, comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \le \delta$, on a $\sup_{|z|\le M} |f(x+t^{1/2}z) - f(x)| \le \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $t \le \delta$, $|P_t f(x) - f(x)| \le \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \varepsilon \le 2\varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On écrit
$$\frac{(P_t f)(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{f(x + t^{1/2} z) + f(x - t^{1/2} z) - 2f(x)}{2t}\, \mathrm{e}^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z.$$
On fait $t \to 0$. Comme $f \in C^2$, on a $\frac{f(x+t^{1/2}z)+f(x-t^{1/2}z)-2f(x)}{2t} \to z^2 f''(x)$, et il existe une constante $K < \infty$ telle que pour tout $t \le 1$, $\frac{f(x+t^{1/2}z)+f(x-t^{1/2}z)-2f(x)}{2t} \le K z^2$ (on utilise, en plus, l'hypothèse que f soit à support compact). Puisque $z^2 \mathrm{e}^{-z^2/2}$ est intégrable, il résulte du théorème de convergence dominée que $\frac{(P_t f)(x) - f(x)}{t} \to \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z^2 f''(x)\, \mathrm{e}^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\, f''(x)$.

Fixons $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a
$$u(t,\, x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(r)\, \frac{1}{t^{1/2}}\, \exp\Big(- \frac{(r-x)^2}{2t} \Big)\, \mathrm{d}r.$$

Comme f est bornée, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour prendre la dérivée (partielle par rapport à r) sous le signe intégrale :

$$\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(r) \Big(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{(r-x)^2}{2t^{5/2}} \Big) \exp\Big(-\frac{(r-x)^2}{2t} \Big) \, \mathrm{d}r.$$

De même, toujours grâce à la bornitude de f et au théorème de convergence dominée, on peut prendre la deuxième dérivée (partielle par rapport à x) sous le signe intégrale :

$$\frac{\partial^2 u(t,\,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(r) \, \frac{1}{t^{1/2}} \Big(-\frac{1}{t} + \frac{(r-x)^2}{t^2} \Big) \exp\Big(-\frac{(r-x)^2}{2t} \Big) \, \mathrm{d}r.$$

On constate alors que $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$. □

2.4. Propriété de Markov forte

Soit B un mouvement brownien défini dans un espace de probabilité complet, et soit $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par $(B_s,\, 0 \le s \le t)$. On note $\mathscr{F}_\infty$ pour la tribu engendrée par $(B_s,\, s \ge 0)$. La propriété de Markov nous dit que pour tout s, $(B_{t+s} - B_s,\, t \ge 0)$ est un mouvement brownien, indépendant de $\mathscr{F}_s$. Dans cette section, on étend cette propriété à des instants aléatoires s.

Définition 2.4.1. *Une application $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \ge 0$, $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$.*

Exemple 2.4.2. Le temps constant $\tau \equiv t$ est un temps d'arrêt. Un autre exemple est $\tau = \tau_a$, où $\tau_a := \inf\{t > 0 :\ B_t = a\}$ (avec la convention habituelle $\inf \emptyset := +\infty$). En effet, pour $a \ge 0$, $\{\tau_a \le t\} = \{\sup_{0 \le s \le t} B_s \ge a\} \in \mathscr{F}_t$. En revanche, $\tau = \sup\{s \le 1 :\ B_s = 0\}$ n'est pas un temps d'arrêt (cela découlera par l'absurde de la propriété de Markov forte ci-dessous et de l'Exemple 2.2.5-(1)). □

Définition 2.4.3. *Soit τ un temps d'arrêt. La tribu des événements antérieurs à τ est*

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F}_\infty :\ \ \forall\, t \ge 0,\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t\}\,.$$

Exemple 2.4.4. Les variables τ et $B_\tau \, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ sont $\mathscr{F}_\tau$-mesurables. Pour τ, il suffit de remarquer que $\{\tau \le u\} \cap \{\tau \le t\} = \{\tau \le u \wedge t\} \in \mathscr{F}_t$ pour tous $u, t \ge 0$. Pour $B_\tau \, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$, on voit que

$$B_\tau \, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{i/2^n < \tau \le (i+1)/2^n\}} \, B_{i/2^n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \big(\mathbb{1}_{\{i/2^n < \tau\}} - \mathbb{1}_{\{(i+1)/2^n < \tau\}} \big) \, B_{i/2^n}$$

et que $\mathbb{1}_{\{s<\tau\}} B_u$ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurables si $u \le s$, puisque

$$\{\mathbb{1}_{\{s<\tau\}} B_u \le a\} \cap \{\tau \le t\} = \{B_u \le a, s < \tau \le t\} \cup \{0 \le a, \tau \le s \wedge t\} \in \mathscr{F}_t.$$

□

THÉORÈME 2.4.5 (propriété de Markov forte). *Soit τ un temps d'arrêt. Conditionnellement à $\{\tau < \infty\}$, le processus $\widetilde{B} := (B_{\tau+t} - B_\tau,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_\tau$.*

Preuve. On va montrer que, pour $A \in \mathscr{F}_\tau$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ continue et bornée,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}\, F(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n})\right] = \mathbb{P}(A \cap \{\tau < \infty\})\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})\right]. \tag{2.3}$$

Cela suffira pour montrer que, conditionnellement à $\{\tau < \infty\}$, $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien (en prenant $A = \Omega$) et qu'il est indépendant de $\mathscr{F}_\tau$.

Si $\tau_m := \lceil \tau 2^m \rceil / 2^m$ sur $\{\tau < \infty\}$, où $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$, alors

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}\, F(B_{\tau_m+t_1} - B_{\tau_m}, \cdots, B_{\tau_m+t_n} - B_{\tau_m})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A\cap\{(k-1)/2^m<\tau\leq k/2^m\}} F(B_{(k/2^m)+t_1} - B_{k/2^m}, \cdots, B_{(k/2^m)+t_n} - B_{k/2^m}).\end{aligned}$$

Par la continuité des trajectoires, le terme gauche de cette égalité converge p.s. quand $m \to \infty$ vers $\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}\, F(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n})$, et par convergence dominée

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}\, F(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n})\right]\\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{(k-1)/2^m<\tau\leq k/2^m\}} F(B_{(k/2^m)+t_1} - B_{k/2^m}, \cdots, B_{(k/2^m)+t_n} - B_{k/2^m})\right].\end{aligned}$$

Pour chaque k, $A \cap \{(k-1)/2^m < \tau \leq k/2^m\} \in \mathscr{F}_{k/2^m}$. Par la propriété de Markov simple au temps $k/2^m$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{(k-1)/2^m<\tau\leq k/2^m\}} F(B_{(k/2^m)+t_1} - B_{k/2^m}, \cdots, B_{(k/2^m)+t_n} - B_{k/2^m})\right] =\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{(k-1)/2^m<\tau\leq k/2^m\}}\right]\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})\right]\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}\, F(\widetilde{B}_{t_1}, \cdots, \widetilde{B}_{t_n})\right] &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{(k-1)/2^m<\tau\leq k/2^m\}}\right]\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})\right]\\ &= \mathbb{P}(A \cap \{\tau < \infty\})\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})\right],\end{aligned}$$

d'où (2.3). □

EXEMPLE 2.4.6. Soit $\tau_a := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$. Par la propriété de Markov forte, le processus $(\tau_a,\, a \geq 0)$ est à accroissements indépendants et stationnaires, et à trajectoires croissantes. En plus, pour tout $c > 0$, les processus $(c^{-2}\tau_{ca},\, a \geq 0)$ et $(\tau_a,\, a \geq 0)$ ont la même loi car

$$\begin{aligned}(c^{-2}\tau_{ca})_{a\geq 0} &= (\inf\{c^{-2}t > 0 :\ B_t = ca\})_{a\geq 0} = (\inf\{t > 0 :\ c^{-1}B_{ct} = a\})_{a\geq 0} \\ &\overset{(d)}{=} (\inf\{t > 0 :\ B_t = a\})_{a\geq 0} = (\tau_a)_{a\geq 0}.\end{aligned}$$

On dit que $(\tau_a,\, a \geq 0)$ est un subordinateur stable d'indice (1/2). □

Théorème 2.4.7 (principe de réflexion). *Soit $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$, $t > 0$. Alors*

$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a,\ B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - b\right), \qquad a \geq 0,\ \ b \leq a. \tag{2.4}$$

En particulier, pour tout $t > 0$ fixé, S_t a la même loi que $|B_t|$.

Remarque 2.4.8. L'identité en loi entre S_t et $|B_t|$ n'est vraie que pour $t > 0$ fixé. Les processus $(S_t,\, t \geq 0)$ et $(|B_t|,\, t \geq 0)$ ont des comportements tout à fait différents (par exemple, le premier est monotone, ce qui n'est pas le cas pour le second). Un résultat de P. Lévy dit néanmoins que $(S_t - B_t,\, t \geq 0)$ et $(|B_t|,\, t \geq 0)$ ont la même loi. □

Preuve du Théorème 4.7. Rappelons que $\tau_a < \infty$, p.s. On a

$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a,\ B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left(\tau_a \leq t,\ B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left(\tau_a \leq t,\ \widetilde{B}_{t-\tau_a} \leq b - a\right),$$

où $\widetilde{B}_s := B_{s+\tau_a} - B_{\tau_a} = B_{s+\tau_a} - a$. Par la propriété de Markov forte, $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_{\tau_a}$. En particulier le couple $(\tau_a, \widetilde{B})$ est indépendant. Puisque $-\widetilde{B}$ a même loi que $\widetilde{B}$, nous obtenons que $(\tau_a, -\widetilde{B})$ a même loi que $(\tau_a, \widetilde{B})$ et donc

$$\mathbb{P}\left(\tau_a \leq t,\ \widetilde{B}_{t-\tau_a} \leq b - a\right) = \mathbb{P}\left(\tau_a \leq t,\ -\widetilde{B}_{t-\tau_a} \leq b - a\right).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_t \geq a,\ B_t \leq b\right) &= \mathbb{P}\left(\tau_a \leq t,\ -\widetilde{B}_{t-\tau_a} \leq b - a\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\tau_a \leq t,\ B_t \geq 2a - b\right),\end{aligned}$$

ce qui prouve (2.4), car $\{B_t \geq 2a - b\} \subset \{\tau_a \leq t\}$ par $a \geq b$.

Pour compléter la preuve du théorème, il suffit de noter que

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(S_t \geq a,\ B_t > a) + \mathbb{P}(S_t \geq a,\ B_t \leq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a). \qquad \square$$

Corollaire 2.4.9. *La loi du couple (S_t, B_t) a pour densité*

$$f_{(S_t,B_t)}(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0,\ b<a\}}.$$

EXEMPLE 2.4.10. On s'intéresse à la loi de τ_a. D'après le Théorème 2.4.7, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_a \le t) = \mathbb{P}(S_t \ge a) = \mathbb{P}(|B_t| \ge a) = \mathbb{P}(\sqrt{t}\,|B_1| \ge a) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \le t\right).$$

Donc τ_a a même loi que a^2/B_1^2, $\forall a \in \mathbb{R}$. D'où, pour $a \neq 0$,

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{t>0\}}.$$

En particulier, $\mathbb{E}(\tau_a) = \infty$ si $a \neq 0$. On rappelle que, par les exemples 2.2.4 et 2.2.5-(3), $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1$. □

2.5. Variation quadratique du mouvement brownien

PROPOSITION 2.5.1 (Lévy). *Fixons $t > 0$. Soit $\Delta_n := \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t\}$ une suite de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, c'est-à-dire* $\sup_i(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$, *$n \to \infty$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 = t, \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{P}).$$

Si en plus les subdivisions sont emboîtées, c'est-à-dire $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots$, alors la convergence a lieu également au sens presque sûr.

Preuve. Montrons d'abord la convergence dans $L^2(\mathbb{P})$. Soit

$$Y_i = Y_i^n := (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n), \qquad 1 \le i \le p_n.$$

Les variables aléatoires $(Y_i,\, 1 \le i \le p_n)$ sont indépendantes et centrées. De plus, (soit $a := t_i^n - t_{i-1}^n$), $\mathbb{E}(Y_i^2) = a^2\mathbb{E}[(B_1^2 - 1)^2] = a^2(\mathbb{E}(B_1^4) - 1) = 2a^2$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{p_n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - t\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{p_n} Y_i\Big)^2\Big] = \sum_{i=1}^{p_n} \mathrm{Var}(Y_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{p_n}(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\
&\le 2t \sup_{1\le i\le p_n} (t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0.
\end{aligned}$$

D'où la convergence dans $L^2(\mathbb{P})$.

On démontre la convergence p.s. seulement [1] pour le cas particulier où $t_i^n = i/2^n$, $0 \le i \le \lfloor t2^n \rfloor := p_n$. On a vu que

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{p_n} Y_i\Big)^2\Big] = 2\sum_{i=1}^{p_n}(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \le \frac{t}{2^{n-1}}.$$

1. La preuve de la convergence p.s. dans le cas général est plus technique ; on peut consulter par exemple la Proposition 2.12 du Chapitre II du livre de Revuz et Yor 1999.

Par l'inégalité de Tchebychev,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{p_n} Y_i\Big| > \frac{1}{n}\Big) \le \frac{tn^2}{2^{n-1}},$$

qui est sommable en $n \ge 1$. Par le lemme de Borel–Cantelli, il existe un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = 0$, et que pour tout $\omega \in A^c$, on puisse trouver $n_0 = n_0(\omega) < \infty$ satisfaisant

$$\Big|\sum_{i=1}^{p_n} Y_i\Big| \le \frac{1}{n}, \qquad \forall\, n \ge n_0.$$

D'où la convergence p.s. □

Corollaire 2.5.2. *Le mouvement brownien a p.s. variation infinie sur tout intervalle* $[a, b]$*,* $0 \le a < b$*, i.e.*

$$|B|([a,b]) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{p} |B(t_i) - B(t_{i-1})|\right\} = +\infty,$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$ *de* $[a, b]$*.*

Preuve. Soit $O \subset \Omega$ un mesurable tel que $\mathbb{P}(O) = 1$ et pour tout $\omega \in O$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\lfloor b2^n \rfloor} (B_{t_i^n}(\omega) - B_{t_{i-1}^n}(\omega))^2 = b,$$

pour tous les $b \in \mathbb{Q}$, où $t_i^n = i/2^n$, $i \ge 0$. Soit $\omega \in O$ et $a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Nous avons que

$$\sum_{a \le t_i^n \le b} (B_{t_i^n}(\omega) - B_{t_{i-1}^n}(\omega))^2 \le |B.(\omega)|([a,b]) \cdot \sup_{s,r\in[a,b],|s-r|\le 2^{-n}} |B_s(\omega) - B_r(\omega)|.$$

Puisque $r \mapsto B_r(\omega)$ est uniformément continue sur $[a, b]$, si la variation totale $|B.(\omega)|([a, b])$ sur $[a, b]$ est finie, alors la limite du terme de droite quand $n \to +\infty$ doit être nulle, alors que nous savons que le terme de gauche tend vers $b - a > 0$. Si $a < b$ sont génériques, il suffit de considérer $a < a' < b' < b$ avec $a', b' \in \mathbb{Q}$. □

Remarque 2.5.3. Dans la Proposition 2.5.1, si l'on enlève la condition que les subdivisions soient emboîtées, la convergence p.s. ne peut avoir lieu en général. Pour des discussions détaillées sur ce sujet, voir p. 48 du livre de D. Freedman intitulé “Brownian Motion and Diffusion" (Holden-Day, 1971). □

2.6. Les zéros du mouvement brownien

Proposition 2.6.1. *Soit* $\mathscr{Z} := \{t \ge 0 : B_t = 0\}$*. Montrer que p.s.* $\mathscr{Z}$ *est fermé, non borné, sans points isolés.*

Preuve. Par la continuité de $t \mapsto B_t$ nous obtenons que $\mathscr{Z}$ est un ensemble fermé. Dans l'exemple 2.2.5 nous avons montré que $\mathscr{Z}$ est p.s. non-borné. Il s'agit donc de vérifier que $\mathscr{Z}$ n'admet p.s. pas de point isolé.

Pour tout $t \geq 0$, soit $\tau_t := \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$ qui est un temps d'arrêt. Il est clair que $\tau_t < \infty$, p.s., $B_{\tau_t} = 0$. La propriété de Markov forte nous dit que τ_t n'est pas un zéro isolé de $\mathscr{Z}$. Donc, p.s., pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, τ_r n'est pas un zéro isolé.

Soit $t \in \mathscr{Z} \backslash \{\tau_r, r \in \mathbb{Q}_+\}$. Il suffit de montrer que t n'est pas un zéro isolé. Soit une suite de rationnels $(r_n) \uparrow\uparrow t$. Il est clair que $r_n \leq \tau_{r_n} < t$. Par le théorème des gendarmes, $\tau_{r_n} \to t$, et donc t n'est pas un zéro isolé. □

Il est connu en analyse (voir, p.72 du livre de Hewitt, E. et Stromberg, K. : *Real and Abstract Analysis*. Springer, New York, 1969) qu'un ensemble fermé sans points isolés est infini non-dénombrable. Donc $\mathscr{Z}$ est p.s. infini non-dénombrable.

2.7. Mouvement brownien multi-dimensionnel

Un processus $(B_t^{(d)})_{t\geq 0} := ((B_t^1, \cdots, B_t^d))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ si $B^1, \cdots, B^d$ sont n mouvements browniens indépendants. La plupart des propriétés du mouvement brownien que l'on a étudiées jusqu'à maintenant peuvent être étendues en dimension quelconque. En particulier, la propriété de Markov forte reste vraie, avec exactement la même démonstration.

Chapitre 3

Martingales à temps continu

On présente les rudiments de la théorie des processus, au moins la partie qui nous sera utile par la suite. On commence par introduire les notions de filtration, tribu, temps d'arrêt et processus, pour étudier ensuite les martingales à temps continu.

3.1. Filtrations et conditions habituelles

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une **filtration** $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace est une famille croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$. On dit que $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

DÉFINITION 3.1.1. *Une application* $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *est un* **temps d'arrêt** *si* $\forall\, 0 \leq t \leq \infty$, $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s.$$

La famille $(\mathscr{F}_{t+},\, t \geq 0)$ est aussi une filtration. On voit facilement que $\sigma : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt ssi pour tout $t \geq 0$ l'on a $\{\sigma < t\} \in \mathscr{F}_t$, car

(1) si $\{\sigma < t\} \in \mathscr{F}_t$ pour $t \geq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{\sigma \leq t\} = \bigcap_{k\geq n} \{\sigma < t + 1/k\} \in \mathscr{F}_{t+1/n}$$

et donc $\{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}$;

(2) si $\{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$\{\sigma < t\} = \bigcup_{n} \{\sigma \leq t - 1/n\} \in \mathscr{F}_t.$$

EXEMPLE 3.1.2. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien et $(\mathscr{F}_t)$ sa filtration canonique. Alors pour $a \in \mathbb{R}$

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}, \qquad \inf \emptyset := +\infty,$$

est un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. Or si $a \geq 0$ et

$$\sigma_a := \inf\{t \geq 0 : B_t > a\}, \qquad \inf \emptyset := +\infty,$$

alors on sait par les exemples 2.2.4-2.2.5 et la propriété de Markov forte que p.s. $\tau_a = \sigma_a$. D'un autre côté, σ_a n'est pas un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{\sigma_a < t\} = \{S_t > a\} \in \mathscr{F}_t$$

et donc σ_a est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt. Voir les exemples 3.2.3 et 3.2.4 ci-dessous. □

Cet exemple montre que la propriété d'être un temps d'arrêt par rapport à la filtration canonique n'est pas stable si on change la variable sur un ensemble de probabilité nulle. Ce phénomène semble peu naturel et motive les définitions suivantes.

DÉFINITION 3.1.3. *On dit que la filtration $(\mathscr{F}_t,\, t \geq 0)$ est* **continue à droite** *si $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$, $\forall\, t \geq 0$. Si $(\mathscr{F}_t)$ est une filtration et $\mathscr{F}_0$ (donc toute $\mathscr{F}_t$) contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables, alors on dit que la filtration est* **complète**.

Il est clair que la filtration $(\mathscr{F}_{t+},\, t \geq 0)$ est continue à droite.

DÉFINITION 3.1.4. *On dit que la filtration $(\mathscr{F}_t)$ satisfait les* **conditions habituelles** *si elle est à la fois continue à droite et complète.*

Étant donnée une filtration $(\mathscr{F}_t)$ quelconque, on peut construire une filtration qui satisfait les conditions habituelles, simplement en ajoutant à chaque tribu $\mathscr{F}_{t+}$ la classe des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}$. C'est l'**augmentation habituelle** de la filtration $(\mathscr{F}_t)$. On suppose dorénavant que nos filtration satisfont les conditions habituelles sans le répéter chaque fois.

On étudie maintenant la mesurabilité pour les processus. Un processus $(X_t,\, t \geq 0)$ est dit continu à droite (resp. à gauche) si ses trajectoires sont p.s. continues à droite (resp. à gauche).

DÉFINITION 3.1.5. *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit* **mesurable** *si l'application*

$$(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$$

définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}$.

Cette propriété est plus forte que de dire que $\forall\, t \geq 0$, X_t est $\mathscr{F}$-mesurable. En revanche, si les trajectoires sont assez régulières (par exemple, continues à droite ou à gauche), alors les deux propriétés sont équivalentes ; il suffit en effet d'approcher X par des processus "en escalier" qui sont quant à eux mesurables.

DÉFINITION 3.1.6. *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit* **adapté** *(par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$) si $\forall\, t \geq 0$, X_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable.*

DÉFINITION 3.1.7. *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit* **progressif** *ou progressivement mesurable (par rapport à la filtration* $(\mathscr{F}_t)$*) si* $\forall\, t \geq 0$,

$$(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$$

est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ *muni de la tribu* $\mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t$.

Il est clair que tout processus progressif est adapté et mesurable (car, pour tout $A \in \mathscr{E}$ où l'on suppose que (X_t) est à valeurs dans $(E, \mathscr{E})$, $\{(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega :\ X_s(\omega) \in A\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(s, \omega) \in [0, n] \times \Omega :\ X_s(\omega) \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F})$. Le résultat suivant nous fournit une inversion partielle.

PROPOSITION 3.1.8. *Tout processus adapté et continu à droite (ou continu à gauche) à valeurs dans un espace métrique est progressif.*

Preuve. Soit (X_t) adapté et continu à droite. Soit $t > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$X_s^{(n)} := X_{t\wedge \frac{(\lfloor ns/t\rfloor+1)t}{n}}, \qquad s \in [0, t].$$

Alors $X_s^{(n)}(\omega) \to X_s(\omega)$ par la continuité à droite. D'autre part, pour tout $A \in \mathscr{E}$ (on suppose que (X_t) est à valeurs dans l'espace $(E, \mathscr{E}, d)$)

$$\begin{aligned}
&\big\{(s, \omega) :\ s \in [0, t],\ X_s^{(n)}(\omega) \in A\big\}\\
&\quad= \bigcup_{k=1}^{n}\left(\Big[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}\Big[\times \{X_{kt/n} \in A\}\right) \cup (\{t\} \times \{X_t \in A\})\\
&\quad\in \mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t,
\end{aligned}$$

donc $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ sur $[0, t] \times \Omega$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t$.

La preuve est similaire si (X_t) est adapté et continu à gauche ; il suffit alors de prendre $X_s^{(n)} := X_{\lfloor ns/t\rfloor \frac{t}{n}}$. □

Une partie $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}$ est dite progressive si le processus $X_t(\omega) := \mathbb{1}_A(t, \omega)$ est progressif. L'ensemble des parties progressives forme une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, que l'on appelle la **tribu progressive**. On peut facilement vérifier par définition qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est progressif si et seulement si l'application $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ muni de la tribu progressive.

3.2. Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ un espace filtré. On définit

$$\mathscr{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\geq 0}\mathscr{F}_t\Big) =: \bigvee_{t\geq 0}\mathscr{F}_t,$$

la tribu engendrée par tous les éléments de toutes les tribus $\mathscr{F}_t$, $t \geq 0$.

À chaque temps d'arrêt τ, on peut associer les tribus suivantes :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_\tau &:= \{A \in \mathscr{F}_\infty :\ \forall\, t \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\},\\ \mathscr{F}_{\tau+} &:= \{A \in \mathscr{F}_\infty :\ \forall\, t \geq 0,\ A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}.\end{aligned}$$

On se donne quelques propriétés simples de ces tribus. Leur preuve est tout à fait élémentaire.

- $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_{\tau+}$;
- si $(\mathscr{F}_t)$ est une filtration continue à droite, alors $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_\tau$;
- une application τ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt si et seulement si $\forall\, t$, $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$, ou encore si et seulement si $\forall\, t$, $\tau \wedge t$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable ;
- si $\tau \equiv t$, alors $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$ et $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_{t+}$;
- τ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable ;
- pour tout $A \in \mathscr{F}_\infty$, $\tau^A := \tau\, \mathbb{1}_A + (+\infty)\mathbb{1}_{A^c}$ est un temps d'arrêt si et seulement si $A \in \mathscr{F}_\tau$.
- Si $\sigma \leq \tau$ sont deux temps d'arrêt, alors $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

PROPOSITION 3.2.1. *Soit τ un temps d'arrêt, alors*

$$\tau_n := \frac{\lceil \tau 2^n \rceil}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n}\, \mathbb{1}_{\{(k-1)/2^n < \tau \leq k/2^n\}} + (+\infty)\, \mathbb{1}_{\{\tau = \infty\}}$$

est une suite de temps d'arrêt qui décroît vers τ.

Preuve. Il est clair que (τ_n) décroît vers τ. Il suffit de montrer que chaque τ_n est un temps d'arrêt. Or, τ_n est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable, et comme $\tau_n \geq \tau$, on a $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau_n \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, car $\{\tau_n \leq t\} \in \mathscr{F}_\tau$. □

C'est le moment de préciser la principale raison pour laquelle on a introduit la notion de processus progressif dans la section précédente.

THÉORÈME 3.2.2. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus progressif à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et si τ est un temps d'arrêt, alors $X_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.*

Preuve. Soit $Y := X_\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$. Pour que Y soit $\mathscr{F}_\tau$-mesurable, il suffit que $Y\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ soit $\mathscr{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$. Or $Y\, \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} = X_{\tau\wedge t}\, \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$. On remarque que $X_{\tau \wedge t}$ est la composition des deux applications :

$$\begin{aligned}(\Omega,\ \mathscr{F}_t) &\longrightarrow ([0,t]\times\Omega,\ \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t)\\ \omega &\longmapsto (\tau(\omega) \wedge t,\ \omega)\end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{rcl} ([0,t]\times\Omega,\ \mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d,\ \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s,\omega) & \longmapsto & X_s(\omega) \end{array}$$

qui sont toutes les deux mesurables (la deuxième par la définition d'un processus progressif). Donc $X_{\tau\wedge t}$, ainsi que $X_{\tau\wedge t}\,\mathbb{1}_{\{\tau\le t\}}$, sont $\mathscr{F}_t$-mesurables. $\square$

EXEMPLE 3.2.3. Si $(X_t)_{t\ge 0}$ est un processus adapté continu à valeurs dans un espace métrique (E,d), alors pour tout ouvert $G\subset E$,

$$\tau_G := \inf\{t\ge 0 :\ X_t\in G\}$$

est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt. En effet, $\{\tau_G<t\}=\bigcup_{s\in[0,t[\,\cap\mathbb{Q}}\{X_s\in G\}$. $\square$

EXEMPLE 3.2.4. Si $(X_t)_{t\ge 0}$ est adapté et continu à valeurs dans un espace métrique (E,d), alors pour tout fermé $F\subset E$,

$$\tau_F := \inf\{t\ge 0 :\ X_t\in F\}$$

est un temps d'arrêt. En effet, $\{\tau_F\le t\}=\{\inf_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} d(X_s,F)=0\}$. $\square$

3.3. Rappels sur les martingales à temps discret

Soit $(M_n)_{n\ge 0}$ un processus réel adapté défini sur l'espace filtré $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$ tel que $\mathbb{E}(|M_n|)<+\infty$ pour tout $n\ge 0$. On dit que $(M_n)_{n\ge 0}$ est

(i) une sous-martingale si $\mathbb{E}(M_m\,|\,\mathscr{F}_n)\ge M_n$ p.s. pour tout $m\ge n\ge 0$

(ii) une sur-martingale si $\mathbb{E}(M_m\,|\,\mathscr{F}_n)\le M_n$ p.s. pour tout $m\ge n\ge 0$

(iii) une martingale si $\mathbb{E}(M_m\,|\,\mathscr{F}_n)= M_n$ p.s. pour tout $m\ge n\ge 0$.

Si $(M_n)_{n\ge 0}$ est une sous-martingale et il existe $M_\infty\in L^1$ tel que p.s. $M_n\le\mathbb{E}(M_\infty\,|\,\mathscr{F}_n)$ alors on dit que $(M_n)_{n\ge 0}$ est *fermée* par M_∞ en tant que sous-martingale. Si $M_n=\mathbb{E}(M_\infty\,|\,\mathscr{F}_n)$ pour tout n alors $(M_n)_{n\ge 0}$ est *fermée* par M_∞ en tant que martingale.

Soit $(X_\alpha,\ \alpha\in A)$ une famile de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble non vide A quelconque. Alors $(X_\alpha,\ \alpha\in A)$ est dite *uniformément intégrable* si

$$\lim_{K\to+\infty}\sup_{\alpha\in A}\mathbb{E}(|X_\alpha|\,\mathbb{1}_{(|X_\alpha|>K)})=0.$$

Nous rappelons les résultats suivants :

(1) $(M_n)_{n\ge 0}$ sous-martingale, τ temps d'arrêt $\Rightarrow$ $(M_{\tau\wedge n})_{n\ge 0}$ sous-martingale.

(2) (Doob) $(M_n)_{n\ge 0}$ martingale, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p>1,\ q>1)$, $k\ge 0$, $\Rightarrow$

$$\Big\|\max_{0\le n\le k}|M_n|\Big\|_p\le q\,\|M_k\|_p,\qquad \Big\|\sup_{n\ge 0}|M_n|\Big\|_p\le q\,\sup_{k\ge 0}\|M_k\|_p.$$

(3) (Lévy) ξ v.a. intégrable $\Rightarrow \mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{F}_n) \to \mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{F}_\infty)$ p.s. et dans L^1.

(4) (Théorème d'arrêt) $(M_n)_{n\geq 0}$ martingale fermée, $\sigma \leq \tau$ temps d'arrêt. Alors p.s. $\mathbb{E}(M_\tau \,|\, \mathscr{F}_\sigma) = M_\sigma$.

(5) Si $\xi \in L^1(\mathbb{P})$, alors la famille de v.a. $(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}), \mathscr{G}$ tribu $\subset \mathscr{F})$ est uniformément intégrable.

(6) Si X_n est une v.a. qui tend en probabilité vers X quand $n \to +\infty$, alors $(X_n)_n$ est uniformément intégrable si et seulement si $X_n \to X$ dans $L^1(\mathbb{P})$.

(7) Une martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ est fermée si et seulement si elle est uniformément intégrable.

3.4. Martingales à temps continu

Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire réel défini sur l'espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$.

Définition 3.4.1. *On dit que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale (resp. surmartingale ; sous-martingale) si*

(i) $(M_t)_{t\geq 0}$ est adapté ;
(ii) $\forall\, t \geq 0$, $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;
(iii) $\forall\, s < t$, $\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) = M_s$, p.s. (resp. $\leq M_s$; $\geq M_s$).

Exemple 3.4.2. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien, et soit $(\mathscr{F}_t)$ sa filtration canonique. Alors $(B_t, t \geq 0)$ est une martingale.

On peut facilement vérifier que $B_t^2 - t$ est aussi une martingale, car, pour $t > s$, $\mathbb{E}(B_t^2 - t \,|\, \mathscr{F}_s) = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \,|\, \mathscr{F}_s)] - t$, et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(B_t - B_s + x)^2] = \mathrm{Var}(B_t - B_s) + x^2 = t - s + x^2$, on obtient $\mathbb{E}(B_t^2 - t \,|\, \mathscr{F}_s) = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$.

Il existe une autre martingale importante : $\exp(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque. En effet, comme $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta(B_t - B_s)}] = \mathrm{e}^{\theta^2(t-s)/2}$, on a $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t} \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathrm{e}^{\theta^2(t-s)/2} \mathrm{e}^{\theta B_s - \frac{\theta^2}{2} t} = \mathrm{e}^{\theta B_s - \frac{\theta^2}{2} s}$. □

Exemple 3.4.3. L'exemple précédent s'étend à tous les processus à accroissements indépendants (PAI), i.e. un processus $(X_t,\, t \geq 0)$ tel que pour $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$, $X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \cdots, X_{t_1}$ sont indépendantes. Le mouvement brownien est un PAI. Un autre exemple PAI est le processus de Poisson $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n \leq t\}}$, où $\tau_n := W_1 + \cdots W_n$, et (W_i) est une suite iid de variables aléatoires exponentielles.

Soit $(\mathscr{F}_t)$ la filtration canonique d'un PAI $(X_t,\, t \geq 0)$. Par classe monotone, pour tout $s < t$, $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathscr{F}_s$.

(i) Si pour tout t, X_t est intégrable, alors $\widetilde{X}_t := X_t - \mathbb{E}(X_t)$ est clairement une martingale ;

(ii) Si, pour tout t, X_t est de carré-intégrable, alors $Y_t := \widetilde{X}_t^2 - \mathbb{E}(\widetilde{X}_t^2)$ est une martingale. En effet, si $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[\,Y_t \,|\, \mathscr{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\,(\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s + \widetilde{X}_s)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\right] - \mathbb{E}[\widetilde{X}_t^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\,(\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s)^2 \,|\, \mathscr{F}_s\right] + \widetilde{X}_s^2 + 2\widetilde{X}_s\,\mathbb{E}\left[\,\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s \,|\, \mathscr{F}_s\right] - \mathbb{E}[\widetilde{X}_t^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\,(\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s)^2\,\right] + \widetilde{X}_s^2 + 2\widetilde{X}_s\,\mathbb{E}\left[\,\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s\,\right] - \mathbb{E}[\widetilde{X}_t^2] \\
&= \mathbb{E}[\widetilde{X}_t^2] - \mathbb{E}[\widetilde{X}_s^2] + \widetilde{X}_s^2 - \mathbb{E}[\widetilde{X}_t^2] \\
&= Y_s.
\end{aligned}$$

(iii) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\theta X_t}) < \infty$ pour tout t, alors

$$Z_t := \frac{\mathrm{e}^{\theta X_t}}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X_t}]}$$

est une martingale. En effet, pour $t > s$,

$$\mathbb{E}\,[\,Z_t \,|\, \mathscr{F}_s] = \frac{\mathrm{e}^{\theta X_s}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta(X_t - X_s)} \,|\, \mathscr{F}_s]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X_s}]\;\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta(X_t - X_s)}]} = \frac{\mathrm{e}^{\theta X_s}}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X_s}]} = Z_s. \qquad \square$$

Il est facile de voir que la plupart des propriétés élémentaires des martingales à temps discret sont encore valables pour les martingales à temps continu. Par exemple si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et si f est une fonction convexe telle que $\mathbb{E}(|f(M_t)|) < \infty$, $\forall\, t$, alors $(f(M_t))$ est une sous-martingale. Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale et si f est une fonction convexe et croissante telle que $\mathbb{E}(|f(M_t)|) < \infty$, alors $(f(M_t))$ est une sous-martingale.

Une autre observation est que si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, et si $p \geq 1$, alors $t \mapsto \mathbb{E}(|M_t|^p)$ est croissante, car $(|M_t|^p)$ est une sous-martingale.

Théorème 3.4.4 (inégalité de Doob). *Soit $(M_s)_{s\geq 0}$ une martingale continue à droite, telle que $M_t \in L^p(\mathbb{P})$, alors*

$$\Big\| \sup_{s\in[0,t]} |M_s| \Big\|_p \leq q\,\|M_t\|_p\,, \qquad \Big\| \sup_{s\geq 0} |M_s| \Big\|_p \leq q\,\sup_{t\geq 0}\|M_t\|_p\,,$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Preuve. Soit $D \subset \mathbb{R}_+$ dénombrable et dense. Par l'inégalité de Doob pour les martingales à temps discret et convergence monotone,

$$\Big\| \sup_{s\in[0,t]\cap D} |M_s| \Big\|_p \leq q\,\|M_t\|_p\,.$$

Comme la continuité à droite des trajectoires de $(M_s)_{s\geq 0}$ nous dit que $\sup_{s\in[0,t]\cap D}|M_s| = \sup_{s\in[0,t]}|M_s|$ p.s., on obtient l'inégalité cherchée. La deuxième inégalité suit en prenant la limite $t \to +\infty$ dans la première, et en remarquant que pour une martingale la fonction $t \mapsto \|M_t\|_p$ est monotone non-décroissante par la remarque qui précède l'énoncé. $\square$

Proposition 3.4.5. *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite, et soit τ un temps d'arrêt. Alors $(M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale (et a fortiori, une $(\mathscr{F}_{\tau\wedge t})$-martingale).*

Preuve. Soit $0 \leq s \leq t$. En considérant éventuellement $\tau \wedge t$ on peut supposer que τ est borné. Soit n fixé et $\tau_n := 2^{-n}\lceil 2^n \tau\rceil$ comme dans la Proposition 3.2.1. Alors τ_n est un $(\mathscr{F}_{k2^{-n}})_{k\geq 0}$-temps d'arrêt qui prend valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{k2^{-n}, k \in \mathbb{N}\}$ et $(M_{k2^{-n}})_{k\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_{k2^{-n}})_{k\geq 0}$-martingale. Nous notons $t_n := 2^{-n}\lceil 2^n t\rceil \geq t$. Par le résultat sur les martingales à temps discret, pour tout $s \leq t$ nous avons $\mathbb{E}(M_{\tau_n\wedge t_n} \,|\, \mathscr{F}_{s_n}) = M_{\tau_n\wedge s_n}$, i.e. pour tout $A \in \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_{s_n}$: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, M_{\tau_n\wedge t_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, M_{\tau_n\wedge s_n}]$.

Nous voulons maintenant passer à la limite quand $n \to +\infty$: il suffit de remarquer que la famille $(M_{\tau_n\wedge t_n})_n$ est uniformément intégrable car $M_{\tau_n\wedge t_n} = \mathbb{E}[M_{\lceil t\rceil} \,|\, \mathscr{F}_{\tau_n\wedge t_n}]$. La continuité des trajectoires de M nous dit que, quand $n \to +\infty$, $M_{\tau_n\wedge t_n} \to M_{\tau\wedge t}$ p.s. et dans L^1 et cela donne que $M_{\tau\wedge t} \in L^1$ et $(M_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ est une martingale. $\square$

Une martingale $(M_t, t \geq 0)$ est dite *fermée* s'il existe $M_\infty \in L^1$ telle que $M_t = \mathbb{E}(M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t)$ p.s. pour tout $t \geq 0$. Quitte à remplacer M_∞ par $\mathbb{E}(M_\infty \,|\, \mathscr{F}_\infty)$, on peut supposer que M_∞ soit $\mathscr{F}_\infty$-mesurable. En particulier on a que $M_\sigma = M_\sigma\, \mathbb{1}_{\{\sigma<\infty\}} + M_\infty\, \mathbb{1}_{\{\sigma=\infty\}}$ est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable.

Théorème 3.4.6 (Théorème d'arrêt). *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite et fermée. Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt. Alors p.s.*

$$\mathbb{E}(M_\tau \,|\, \mathscr{F}_\sigma) = M_\sigma. \tag{3.5}$$

Preuve. Montrons que M_τ est intégrable. Soient $\tau_n := 2^{-n}\lceil 2^n\tau\rceil$ et $\sigma_n := 2^{-n}\lceil 2^n\sigma\rceil$ comme dans la Proposition 3.2.1 deux suites de temps d'arrêt. Il est clair que, pour tout n, le processus $(M_{i/2^{n+1}},\ i \geq 0)$ est une martingale à temps discret, fermée par M_∞. Le théorème d'arrêt (pour les martingales à temps discret) permet alors de dire que p.s. $\mathbb{E}(M_\infty \,|\, \mathscr{F}_{\tau_n}) = M_{\tau_n}$, donc $(M_{\tau_n})_n$ forme une famille uniformément intégrable. Or par la continuité à droite des trajectoires, M_{τ_n} converge p.s. vers M_τ quand $n \to +\infty$; donc M_{τ_n} converge vers M_τ dans L^1 et M_τ est intégrable.

Soit $(\sigma_n)_n$ la suite de temps d'arrêt associée à σ. De même, $M_{\sigma_n} \to M_\sigma$ p.s. et dans L^1. Puisque $\sigma_n \leq \tau_n$, le théorème d'arrêt (version à temps discret) nous dit que $M_{\sigma_n} = \mathbb{E}[\, M_{\tau_n} \,|\, \mathscr{F}_{\sigma_n}\,]$, et donc pour tout $A \in \mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_{\sigma_n}$, $\mathbb{E}[\, M_{\sigma_n}\, \mathbb{1}_A\,] = \mathbb{E}[\, M_{\tau_n}\, \mathbb{1}_A\,]$. En faisant tendre $n \to \infty$ et en constatant la convergence dans L^1, on obtient : $\mathbb{E}[\, M_\sigma\, \mathbb{1}_A\,] = \mathbb{E}[\, M_\tau\, \mathbb{1}_A\,]$. Puisque $A \in \mathscr{F}_\sigma$ est quelconque, on a p.s. $\mathbb{E}[\, M_\sigma \,|\, \mathscr{F}_\sigma\,] = \mathbb{E}[\, M_\tau \,|\, \mathscr{F}_\sigma\,]$. Or, $(M_t)_{t\geq 0}$ est progressif (Proposition 3.1.8), on sait que $M_\sigma = M_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma<\infty\}} + M_\infty \mathbb{1}_{\{\sigma=\infty\}}$ est $\mathscr{F}_\sigma$-mesurable (Théorème 3.2.2), on obtient (3.5). □

REMARQUE 3.4.7. Si σ et τ sont *bornés* par une constante finie K, alors le théorème d'arrêt est valable pour toute martingale continue à droite $(M_t)_{t\geq 0}$: il suffit de remplacer $(M_t)_{t\geq 0}$ par $(M_{t\wedge K})_{t\geq 0}$ pour obtenir une martingale fermée.

REMARQUE 3.4.8. Une conséquence importante du théorème d'arrêt est que, sous les mêmes hypothèses,

$$\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_\sigma).$$

3.5. Mouvement brownien en tant que martingale

DÉFINITION 3.5.1. *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ *un espace filtré. On dit que* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $(\mathscr{F}_t)$-*mouvement brownien si*

(i) $(B_t)_{t\geq 0}$ *est* $(\mathscr{F}_t)$-*adapté ;*

(ii) pour tout $s > 0$, $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien indépendant de* $\mathscr{F}_s$.

Par exemple, un mouvement brownien standard est un mouvement brownien par rapport à sa filtration canonique.

Durant toute la section, on suppose que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien. On se donne quelques exemples d'applications des théorèmes d'arrêt.

EXEMPLE 3.5.2. Soit $\tau_1 := \inf\{t > 0 : B_t = 1\}$. Par l'exemple 2.2.5-(3) ce temps d'arrêt est p.s. fini mais par l'exemple 2.4.10 $\mathbb{E}(\tau_1) = +\infty$. Puisque p.s. $B_{\tau_1} = 1$,

$$1 = \mathbb{E}[B_{\tau_1} \mid \mathscr{F}_0] \neq B_0 = 0.$$

Dans ce cas $(B_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une martingale fermée et τ_1 n'est pas borné ; le théorème d'arrêt ne s'applique donc pas. □

EXEMPLE 3.5.3 (identités de Wald). Soit τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\tau) < \infty$. Alors $B_\tau \in L^2$, $\mathbb{E}(B_\tau) = 0$ et $\mathbb{E}(B_\tau^2) = \mathbb{E}(\tau)$.

Observons d'abord que $(B_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une martingale fermée et τ n'est pas supposé être borné ; le théorème d'arrêt ne s'applique donc pas directement. Par la Proposition 3.4.5, $B_{t\wedge\tau}$ et $B_{t\wedge\tau}^2 - t\wedge\tau$ sont des martingales et $\mathbb{E}(B_{t\wedge\tau}^2) = \mathbb{E}(t\wedge\tau) \leq \mathbb{E}(\tau)$, et donc $\sup_t \mathbb{E}(B_{t\wedge\tau}^2) \leq \mathbb{E}(\tau) < \infty$. Par conséquent, $B_{t\wedge\tau}$ est une martingale continue uniformément intégrable, fermée par B_τ (en particulier, B_τ est intégrable). Par le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}(B_\tau) = \mathbb{E}(B_{0\wedge\tau}) = 0$.

Par l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} B_{t\wedge\tau}^2\right] \leq 4\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\left[B_{t\wedge\tau}^2\right] \leq 4\mathbb{E}(\tau) < \infty,$$

et donc $(B_{t\wedge\tau}^2, t\geq 0)$ est uniformément intégrable. Comme $(t\wedge\tau, t\geq 0)$ est uniformément intégrable, $B_{t\wedge\tau}^2 - t\wedge\tau$ est une martingale continue uniformément intégrable, fermée par $B_\tau^2 - \tau$ (en particulier, B_τ est de carré-intégrable). Par le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}(B_\tau^2 - \tau) = 0$. Autrement dit, $\mathbb{E}(B_\tau^2) = \mathbb{E}(\tau)$. □

Exemple 3.5.4. Soit $\tau_a := \inf\{t\geq 0 :\ B_t = a\}$. Soit $\theta > 0$. On sait que $(\mathrm{e}^{\theta B_t - \theta^2 t/2})_{t\geq 0}$ est une martingale. Si $a > 0$, alors $\theta B_{t\wedge\tau_a} - \theta^2(t\wedge\tau_a)/2 \leq \theta a$, donc, par la Proposition 3.4.5, $(\mathrm{e}^{\theta B_{t\wedge\tau_a} - \theta^2(t\wedge\tau_a)/2},\ t\geq 0)$ est une martingale continue bornée qui converge p.s. vers $\mathrm{e}^{\theta a - \theta^2\tau_a/2}$ quant $t\to+\infty$ (rappelons que $\tau_a < \infty$ p.s.). On a par le théorème de convergence dominée que

$$1 = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta a - \theta^2\tau_a/2}\right].$$

Autrement dit, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta^2\tau_a/2}] = \mathrm{e}^{-\theta a}$. De façon équivalente, pour tout $a\in\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_a}\right] = \mathrm{e}^{-|a|\sqrt{2\lambda}}, \qquad \lambda\geq 0.$$

On peut facilement vérifier que ceci est en accord avec la densité de τ_a donnée dans l'Exemple 2.4.10. □

Exemple 3.5.5. Soit $((X_t, Y_t))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ issu de $(X_0, Y_0) = (0,1)$ (c'est-à-dire que (X_t) et (Y_t) sont deux mouvements browniens linéaires indépendants). Soit $\tau := \inf\{t\geq 0 :\ Y_t = 0\}$. Quelle est la loi de X_τ ?

D'après l'exemple précédent, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta^2\tau/2}] = \mathrm{e}^{-|\theta|}$. Comme τ est indépendante de $\sigma(X_t)_{t\geq 0}$, on a pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\theta X_\tau}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\theta\sqrt{\tau}\,X_1}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\theta^2\tau/2}\right] = \mathrm{e}^{-|\theta|}.$$

Autrement dit, X_τ suit la loi de Cauchy standard.

Cela donne un exemple d'une variable non-intégrable obtenue en calculant la position d'un brownien à un temps d'arrêt p.s. fini. □

Chapitre 4

Semimartingales continues

De même que les mesures sont les objets mathématiques pour lesquels on peut construire des intégrales déterministes, les semimartingales sont des processus aléatoires pour lesquels on peut construire un calcul intégral puissant qui étend le calcul intégral déterministe. Nous travaillerons toujours avec des semimartingales continues, mais il est possible, au prix de difficultés techniques supplémentaires, de faire de même avec des processus admettant des sauts.

Une semimartingale se décompose en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. Nous allons étudier séparément les deux notions.

4.1. Processus à variation finie

Commençons par un rappel sur les fonctions (déterministes) croissantes.

Théorème 4.1.1 (Stieltjes). *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante continue à droite. Il existe une unique mesure* $\mathrm{d}F$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$*, appelée* mesure de Stieltjes associée à F, *vérifiant :*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b, \qquad \mathrm{d}F(]a,b]) = F(b) - F(a).$$

Pour une démonstration, voir l'ouvrage de Briane et Pagès.

Exemple 4.1.2. L'exemple principal est $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. La mesure de Stieltjes associée est la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$. Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$, si on définit

$$F(t) := \mathbb{P}(X \leq t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

alors la mesure de Stieltjes associée à F est la loi de X et F est appelée la fonction de répartition de (la loi de) X. De façon équivalente, pour toute mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$, si on définit

$$F(t) := \mu(]-\infty, t]), \qquad t \in \mathbb{R},$$

alors la mesure de Stieltjes associée à F est μ.

REMARQUE 4.1.3. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et continue à droite, alors F est continue en x si et seulement si $\mathrm{d}F(\{x\}) = 0$, car

$$\mathrm{d}F(\{x\}) = F(x) - F(x-), \qquad F(x-) := \lim_{y \uparrow x} F(y).$$

La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{d}F$ n'a pas d'atômes. □

EXEMPLE 4.1.4. Un exemple très instructif est la fonction *escalier du diable*, construite par récurrence de la façon suivante. On prend $f_0 : [0,1] \to [0,1]$, $f_0(x) = x$, $x \in [0,1]$. La fonction $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ est la fonction continue affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $1/2$ sur $[1/3, 2/3]$.

On passe de même de f_n à f_{n+1} en remplaçant f_n, sur chaque intervalle $[u,v] = \left[\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}\right]$ où elle n'est pas constante, par la fonction continue affine par morceaux qui vaut $\frac{f_n(u)+f_n(v)}{2}$ sur le tiers central de l'intervalle $[u,v]$.

Alors on vérifie que pour tout $x \in [0,1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n-1}$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément, et donc que la suite f_n converge uniformément. La fonction limite f est continue, monotone, et l'on a $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ comme annoncé.

De plus, f a une dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble de Cantor K, construit par récurrence de la façon suivante. Nous définissons

$$K_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \qquad K_{n+1} := \frac{K_n}{3} \cup \frac{2 + K_n}{3}, \ n \geq 1.$$

On voit facilement que $K_n \subset K_{n+1} \subset [0,1]$ et $K := \cap_n K_n$ est donc un compact. En plus la mesure de Lebesgue de K_n est égale à $(2/3)^n$, donc K a mesure de Lebesgue nulle. Le complémentaire $A := [0,1] \setminus K$ et un ouvert avec mesure de Lebesgue 1 donc dense dans $[0,1]$. Donc f est dérivable sur A avec dérivée nulle, où $A \subset [0,1]$ est un ouvert dense dans $[0,1]$. Pourtant f est continue et$f(1) = 1 > 0 = f(0)$, donc f n'est pas constante !

L'explication est que la mesure de Stieltjes $\mathrm{d}f$ associée à f est concentrée sur K, qui a mesure de Lebesgue nulle. Comme expliqué dans la Remarque 4.1.3, la continuité de f implique que $\mathrm{d}f$ n'a pas d'atômes. Voir l'ouvrage de Briane et Pagès pour plus de détails. □

Nous passons maintenant aux fonctions (déterministes) à variation finie. Soit $T > 0$ fixé. On rappelle qu'une mesure signée sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ est toute différence de deux mesures finies positives.

DÉFINITION 4.1.5. *Une fonction* $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ *continue à droite avec* $a(0) = 0$ *est dite* **à variation finie** *s'il existe une mesure signée, notée* $\mathrm{d}a$*, sur* $[0,T]$ *telle que* $a(t) = \mathrm{d}a([0,t])$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

Remarque 4.1.6. Une fonction $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ continue à droite avec $a(0) = 0$ est donc à variation finie ssi $a = F_1 - F_2$ où $F_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ est croissante continue à droite : il suffit d'écrire $\mathrm{d}a = \mu_1 - \mu_2$ avec μ_i mesure finie positive, et $F_i(t) := \mu_i([0,t])$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2$.

Si a est croissante, $\mathrm{d}a$ est la mesure de Stieltjes de a. Pour toute a à variation finie, par classe monotone la mesure $\mathrm{d}a$ est déterminée de façon unique par a. Par contre la décomposition de $\mathrm{d}a = \mu_1 - \mu_2$ comme différence de deux mesures finies positives n'est pas unique, mais elle le devient si l'on impose de plus que les mesures de μ_1 et μ_2 soient étrangères (c'est-à-dire, $\mu_1(E) = 0 = \mu_2(E^c)$ pour un borélien E).

Lemme 4.1.7. *Si a est une fonction à variation finie alors il existe un seul couple $(\mathrm{d}a_+, \mathrm{d}a_-)$ de mesures finies sur $[0,T]$ étrangères et telles que $\mathrm{d}a = \mathrm{d}a_+ - \mathrm{d}a_-$.*

Preuve. Pour une décomposition quelconque $\mathrm{d}a = \mu_1 - \mu_2$ la mesure $\nu = \mu_1 + \mu_2$ est positive finie telle que $\mu_1 \ll \nu$ et $\mu_2 \ll \nu$. Par le théorème de Radon-Nikodym il existe deux fonctions boréliennes non-négatives h_1 et h_2 sur $[0,T]$ telles que

$$\mathrm{d}\mu_i = h_i \, \mathrm{d}\nu, \qquad i = 1,2.$$

Si on pose $h := h_1 - h_2$ alors

$$\mathrm{d}a = h \, \mathrm{d}\nu = h^+ \, \mathrm{d}\nu - h^- \, \mathrm{d}\nu =: \mathrm{d}a_+ - \mathrm{d}a_-$$

et les deux mesures $\mathrm{d}a_+$ et $\mathrm{d}a_-$ sont portées par les ensembles boréliens disjoints $D_+ := \{t \in [0,T] : h(t) > 0\}$ et $D_- := \{t \in [0,T] : h(t) < 0\}$ respectivement.

L'unicité de cette décomposition découle du fait que

$$\mathrm{d}a_+(A) = \sup\{\mathrm{d}a(C) : C \in \mathscr{B}([0,T]),\ C \subseteq A\}, \qquad \forall\, A \in \mathscr{B}([0,T]),$$

car pour tout C borélien contenu dans A

$$\mathrm{d}a(C) = \mathrm{d}a_+(C) - \mathrm{d}a_-(C) \le \mathrm{d}a_+(C) \le \mathrm{d}a_+(A), \qquad \mathrm{d}a_+(A) = \mathrm{d}a(A \cap D_+).$$

Ceci conclut la preuve. □

On note

$$|\mathrm{d}a| := \mathrm{d}a_+ + \mathrm{d}a_-,$$

mesure finie appelée **variation totale** de $\mathrm{d}a$. On a $|\mathrm{d}a|(E) \le |\mathrm{d}a(E)|$ pour tout $A \in \mathscr{B}([0,T])$, mais l'égalité est fausse en général. La densité de Radon-Nikodym de $\mathrm{d}a$ par rapport à $|\mathrm{d}a|$ est donnée par

$$\mathrm{d}a = \left(\mathbb{1}_{D_+} - \mathbb{1}_{D_-}\right) |\mathrm{d}a|. \tag{4.6}$$

PROPOSITION 4.1.8. *Une fonction a continue est à variation bornée sur $[0,T]$ si et seulement si elle s'écrit comme différence de deux fonctions continues croissantes.*

Preuve. Le seul point à prouver est que si a continue est la différence de deux fonctions croissantes, alors a est la différence de deux fonctions croissantes *continues*. Puisque la mesure $\mathrm{d}a$ n'a pas d'atomes par la continuité de a, l'on obtient que $\mathrm{d}a_+$ et $\mathrm{d}a_-$ doivent avoir les mêmes atomes qui appartiennent donc à l'intersection des deux supports. Puisque les deux mesures sont étrangères, elles n'ont donc pas d'atomes et leurs fonctions de répartition sont continues. $\square$

EXEMPLE 4.1.9. Si μ est une mesure finie sur $[0,T]$ et $f : [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonctionne borélienne telle que $\int_{[0,T]} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, alors la fonction

$$a_t := \int_0^t f \, \mathrm{d}\mu, \qquad t \in [0,T],$$

est à variation finie et

$$\mathrm{d}a = f \, \mathrm{d}\mu, \qquad \mathrm{d}a_+ = f^+ \, \mathrm{d}\mu, \qquad \mathrm{d}a_- = f^- \, \mathrm{d}\mu, \qquad |\mathrm{d}a| = |f| \, \mathrm{d}\mu,$$

où $f^+ := \max\{f, 0\}$ et $f^- := \max\{-f, 0\}$. $\square$

On peut maintenant définir l'intégrale par rapport à une fonction à variation finie : si $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ est à variation finie, et si $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que $\int_{[0,T]} |f| \, |\mathrm{d}a| < \infty$, alors les intégrales suivantes sont bien définies :

$$\begin{aligned}
\int_0^T f \, \mathrm{d}a &= \int_0^T f(s) \, \mathrm{d}a_+(s) - \int_0^T f(s) \, \mathrm{d}a_-(s), \\
\int_0^T f \, |\mathrm{d}a| &= \int_0^T f(s) \, \mathrm{d}a_+(s) + \int_0^T f(s) \, \mathrm{d}a_-(s).
\end{aligned}$$

On a l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_0^T f \, \mathrm{d}a \right| \le \int_0^T |f| \, |\mathrm{d}a| \, .$$

Remarquons que la fonction $t \mapsto \int_0^t f \, \mathrm{d}a := \int_0^T f \, \mathbb{1}_{[0,t]} \, \mathrm{d}a$ est aussi à variation finie, la mesure associée étant $f \, \mathrm{d}a$.

Une façon alternative de présenter les fonctions à variation finie consiste à regarder la variation de a par rapport aux subdivisions de $[0,T]$:

PROPOSITION 4.1.10. *Si a est à variation bornée, alors pour tout $t \in [0,T]$*

$$|\mathrm{d}a| \, ([0,t]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p |a(t_i) - a(t_{i-1})| \right\},$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ *de* $[0, t]$.

Preuve. La minoration est triviale, car $|a(t_i) - a(t_{i-1})| \le |\mathrm{d}a|\,(\,]t_{i-1}, t_i])$. Pour la majoration, on utilise un argument de martingale. On suppose pour simplifier l'écriture que $t = 1$. On munit $\Omega := [0,1]$ de la tribu borélienne $\mathscr{F} := \mathscr{B}([0,1])$ et de la probabilité $\mathbb{P} := \frac{|\mathrm{d}a|}{|\mathrm{d}a|([0,1])}$. Si l'on pose en rappelant (4.6)

$$Y(s) := \frac{\mathrm{d}a}{|\mathrm{d}a|}(s) = \mathbb{1}_{D_+}(s) - \mathbb{1}_{D_-}(s), \qquad s \in [0,1],$$

alors Y est une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable.

Pour chaque n, soit $\mathscr{B}_n$ la tribu engendrée par les intervalles $I_i = I_i(n) :=]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]$, $1 \le i \le 2^n$. On considère la martingale $M_n := \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{B}_n)$. D'après le Théorème de Lévy rappelé dans la section 3.3, $M_n \to \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{B}_\infty)$, p.s. et dans L^1, où $\mathscr{B}_\infty := \bigvee_n \mathscr{B}_n$ est la tribu borélienne de $[0,1]$ (donc $\mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{B}_\infty) = Y$). En particulier,

$$\mathbb{E}(|M_n|) \to \mathbb{E}(|Y|) = 1, \qquad n \to \infty,$$

(cette dernière identité étant claire car $|Y| = 1$, $\mathbb{P}$-p.s.). Or, M_n étant $\mathscr{B}_n$-mesurable est constant sur chaque $]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]$; soit $M_n = \sum_{i=1}^{2^n} c_i \, \mathbb{1}_{I_i}$. Comme

$$\mathbb{E}[Y\,\mathbb{1}_{I_i}] = \frac{\mathrm{d}a(I_i)}{|\mathrm{d}a|([0,1])}, \qquad \mathbb{E}[M_n\,\mathbb{1}_{I_i}] = c_i \mathbb{P}(I_i) = \frac{c_i\,|\mathrm{d}a|(I_i)}{|\mathrm{d}a|([0,1])},$$

on obtient $c_i = \frac{\mathrm{d}a(I_i)}{|\mathrm{d}a|(I_i)}$, et donc

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \frac{1}{|\mathrm{d}a|([0,1])} \sum_{i=1}^{2^n} \left| a(\frac{i}{2^n}) - a(\frac{i-1}{2^n}) \right|.$$

Ceci permet de conclure la preuve. □

Corollaire 4.1.11. *Une fonction* $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ *continue à droite avec* $a(0) = 0$ *est à variation bornée si et seulement si*

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{p} |a(t_i) - a(t_{i-1})| \right\} < +\infty, \tag{4.7}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ *de* $[0, T]$.

Preuve. Si a est à variation bornée, alors (4.7) suit de la Proposition 4.1.10. Inversement, si l'on suppose (4.7), alors la fonction

$$S_t := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{p} |a(t_i) - a(t_{i-1})| \right\}, \qquad t \in [0,T]$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ de $[0,t]$, est bien définie et croissante. En plus, la fonction $S - a$ est aussi croissante et par la Proposition 4.1.8 nous obtenons que a est à variation bornée. □

LEMME 4.1.12. *Si $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ est une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0, alors*

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)(a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)).$$

Preuve. Soit f_n la fonction définie par $f_n(s) := f(t_{i-1}^n)$ si $s \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$ (et $f_n(0) := 0$). On a

$$\sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)(a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)) = \int_0^T f_n(s)\mu(\mathrm{d}s),$$

et le résultat voulu en découle par convergence dominée. □

On dira qu'une fonction continue à droite $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à variation finie sur $\mathbb{R}_+$ si pour tout $T > 0$, la restriction de a sur $[0,T]$ est à variation finie. Il est facile d'étendre les définitions précédentes. En particulier, $\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}a(s)$ est bien définie pour toute fonction mesurable f telle que $\int_0^\infty |f(s)|\,|\mathrm{d}a(s)| = \sup_{T>0} \int_0^T |f(s)|\,|\mathrm{d}a(s)| < \infty$.

Passons maintenant au cas aléatoire. Fixons $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, dont la filtration vérifie les conditions habituelles.

DÉFINITION 4.1.13. *Un processus* **à variation finie** $A := (A_t)_{t\geq 0}$ *est un processus* **continu** *adapté dont les trajectoires sont p.s. à variation finie avec $A_0 = 0$. Le processus A est appelé processus* **croissant** *si de plus les trajectoires de A sont p.s. croissantes.*

En particulier, A est un processus progressif.

PROPOSITION 4.1.14. *Soit A un processus à variation finie, et soit H un processus progressif tel que pour tout $t > 0$,*

$$\int_0^t |H_s(\omega)|\,|\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty, \qquad \text{p.s.}$$

Alors le processus $H \cdot A$ défini par

$$(H \cdot A)_t := \int_0^t H_s\,\mathrm{d}A_s$$

est aussi un processus à variation finie.

Preuve. Presque sûrement, $\int_0^t |H_s(\omega)|\,|\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty$ pour tout $t > 0$. Il est alors clair d'après les remarques précédentes que les trajectoires de $H \cdot A$ sont p.s. à variation finie.

Il nous faut maintenant vérifier que $H \cdot A$ est adapté. Il suffit de montrer que si $h : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$, et si $\int_0^t |h(s,\omega)|\,|\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty$, p.s., alors la variable $\int_0^t h(s,\omega)\,\mathrm{d}A_s(\omega)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Lorsque $h(s,\omega) = \mathbb{1}_{]u,v]}(s)\,\mathbb{1}_\Gamma(\omega)$, avec $]u,v] \subset [0,t]$ et $\Gamma \in \mathscr{F}_t$, le résultat est évident. Par classe monotone, il est encore vrai si $h = \mathbb{1}_G$, où $G \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$. Si h est positive, alors on peut toujours l'écrire comme limite (ponctuelle) d'une suite croissante de fonctions étagées h_n, ce qui assure que $\int_0^t h_n(s,\omega)\,\mathrm{d}A_s(\omega) \to \int_0^t h(s,\omega)\,\mathrm{d}A_s(\omega)$ par convergence monotone. Enfin, pour le cas général, il suffit de considérer séparément h^+ et h^-. □

4.2. Martingales locales continues

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ qui vérifie les conditions habituelles. Si τ est un temps d'arrêt, et si $X := (X_t,\ t \geq 0)$ est un processus continu, on note X^τ le processus arrêté $(X_t^\tau = X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.

DÉFINITION 4.2.1. *Un processus continu adapté $M := (M_t)_{t\geq 0}$ est appelé une* **martingale locale** *(continue) s'il existe une suite croissante $(\tau_n,\ n \geq 1)$ de temps d'arrêt telle que $\tau_n \uparrow \infty$ p.s. et que pour tout n, $M^{\tau_n} - M_0$ soit une martingale uniformément intégrable.*

On dit que la suite de temps d'arrêt (τ_n) **réduit** *M.*

REMARQUE 4.2.2. Si M est une martingale locale, la variable aléatoire M_t n'est pas nécessairement intégrable. En particulier, on n'a aucune information a priori sur M_0, à part qu'il s'agit d'une variable aléatoire $\mathscr{F}_0$-mesurable. □

Voici une collection de propriétés élémentaires pour les martingales locales :

EXERCICE 4.2.3.

(1) Une martingale continue est une martingale locale (la suite $\tau_n := n$ réduisant M).

(2) Dans la définition d'une martingale locale, on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale" (il suffit de remplacer τ_n par $\tau_n \wedge n$).

(3) Si M est une martingale locale, alors pour tout temps d'arrêt τ, M^τ est une martingale locale (rappeler la Proposition 3.4.5).

(4) Si (τ_n) réduit M et si (σ_n) est une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\sigma_n \uparrow \infty$, alors la suite $(\sigma_n \wedge \tau_n)$ réduit M.

(5) L'espace des martingales locales est un espace vectoriel (utiliser la propriété précédente).

On se gardera d'appliquer sans précaution aux martingales locales les résultats que l'on a démontrés pour les martingales. Il est important de savoir si une martingale locale est une vraie martingale. Nous allons prouver quelques premiers résultats dans ce sens. Nous rappellons d'abord le

Lemme 4.2.4 (Fatou version conditionnelle). *Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a. non-négatives et $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ est une tribu, alors p.s.*

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n X_n \,\middle|\, \mathscr{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathscr{G}\right].$$

Preuve. Soit $Y_n := \inf_{k \geq n} X_k$. Alors Y_n est une suite croissante et $\liminf_n X_n = \sup_n Y_n$. Donc p.s. pour tout $k \geq n$

$$\mathbb{E}\left[Y_n \mid \mathscr{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X_k \mid \mathscr{G}\right]$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[Y_n \mid \mathscr{G}\right] \leq \inf_{k \geq n} \mathbb{E}\left[X_k \mid \mathscr{G}\right].$$

Il est facile de montrer la propriété de convergence monotone de l'espérance monotone : ici, p.s. $\mathbb{E}\left[\lim_n Y_n \mid \mathscr{G}\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[Y_n \mid \mathscr{G}\right]$. Nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n X_n \,\middle|\, \mathscr{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}\left[X_n \mid \mathscr{G}\right]$$

p.s., et la preuve est terminée. □

Proposition 4.2.5. *Soit M une martingale locale.*

(1) Une martingale locale positive M telle que $M_0 \in L^1(\mathbb{P})$ est une surmartingale.

(2) Si pour tout t, $\mathbb{E}(\sup_{s \in [0,t]} |M_s|) < \infty$, alors M est une martingale.

(3) La suite de temps d'arrêt $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_0| = n\}$ réduit M.

Preuve.

(1) Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt qui réduit M_t. Comme $M_0 \in L^1(\mathbb{P})$, M^{τ_n} est une martingale. Donc pour $s < t$,

$$\mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_n} \mid \mathscr{F}_s\right] = M_{s \wedge \tau_n}, \qquad \text{p.s.} \tag{4.8}$$

On applique le Lemme 4.2.4 pour $n \to \infty$, pour voir que

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathscr{F}_s\right] \leq M_s, \qquad \text{p.s.}$$

(A fortiori, ceci confirme l'intégrabilité de M_t en considérant $s = 0$.) Par conséquent, M est une surmartingale.

(2) On a toujours (4.8). Comme $M_{t\wedge\tau_n} \to M_t$, p.s., et $|M_{s\wedge\tau_n}| \leq Y_t := \sup_{u\in[0,t]} |M_u| \in L^1$ pour tout $s \in [0,t]$, le théorème de convergence dominée nous dit que $M_{t\wedge\tau_n} \to M_t$ et $M_{s\wedge\tau_n} \to M_s$ dans L^1. En faisant $n\to\infty$ dans (4.8), on obtient alors $\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] = M_s$, p.s.

(3) Il s'agit d'une conséquence de (2), car $(M - M_0)^{\tau_n}$ est une martingale locale bornée par n donc une martingale uniformément intégrable.

La preuve est terminée. $\square$

Remarque 4.2.6. La propriété (2) de la Proposition 4.2.5 pourrait donner l'impression que toute martingale locale telle que $(M_s, s\in[0,t])$ soit uniformément intégrable pour tout $t\geq 0$ est une martingale, mais cela est faux ! On verra dans la suite un exemple d'une martingale locale bornée dans L^2 qui n'est pas une martingale.

Théorème 4.2.7. *Soit M une martingale locale continue. Si M est à variation finie, alors $\mathbb{P}(M_t = M_0, \ \forall\, t\geq 0) = 1$.*

Preuve. Quitte à remplacer M par $M - M_0$, on peut supposer que p.s. $M_0 = 0$. Supposons que M soit à variation finie. Posons

$$\tau_n := \inf\left\{ t : \int_0^t |\mathrm{d}M_s| \geq n \right\}.$$

Comme $\tau_n \leq \inf\{t : |M_t| \geq n\}$, la Proposition 4.2.5, partie (2), nous dit que $N = M^{\tau_n}$ est une (vraie) martingale bornée, issue de $N_0 = 0$, p.s. Soit $t > 0$, et soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de $[0,t]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_t^2) &= \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\left[N_{t_i}^2 - N_{t_{i-1}}^2 \right] = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\left[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2 \right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_{1\leq i\leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right].
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \leq n$ par la Proposition 4.1.10, on obtient

$$\mathbb{E}(N_t^2) \leq n\, \mathbb{E}\left[\sup_{1\leq i\leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right].$$

Prenons maintenant une suite de subdivisions $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 quand $k\to\infty$. Puisque N est continue et bornée, le théorème de convergence dominée nous confirme que $\mathbb{E}(N_t^2) = 0$, soit par la continuité des trajectoires $\mathbb{P}(M_{t\wedge\tau_n} = 0, \ \forall\, t\geq 0) = 1$. Il suffit alors de faire n tendre vers $+\infty$. $\square$

4.3. Variation quadratique d'une martingale locale

On se place toujours dans un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles. Le théorème suivant joue un rôle très important dans la suite du cours.

THÉORÈME 4.3.1. *Soit M une martingale locale continue. Il existe un processus croissant, noté $\langle M\rangle := (\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$, unique à indistinguabilité près, tel que $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ soit une martingale locale et $\langle M\rangle_0 = 0$.*

De plus, pour tout $t > 0$, si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = \langle M\rangle_t, \qquad \textit{en probabilité.}$$

REMARQUE 4.3.2.

(i) Le processus $\langle M\rangle$ est appelé la **variation quadratique** de M.

(ii) Quand $M = B$ est un mouvement brownien, on sait que $\langle B\rangle_t = t$. C'est une conséquence du Théorème de Lévy (Proposition 2.5.1), ou du fait que $B_t^2 - t$ est une martingale.

(iii) On ne va pas prouver ce théorème en détail. Néanmoins plus tard on donnera une preuve pour une classe moins générale de martingale, qui couvre la totalité des exemples que nous verrons dans ce cours, voir la Remarque 5.2.3 ci-dessous.

Preuve. L'unicité découle du Théorème 4.2.7. En effet, si A et $\widetilde{A}$ sont deux processus croissants satisfaisant les conditions du théorème, alors le processus $A - \widetilde{A} = (M_t^2 - \widetilde{A}_t) - (M_t^2 - A_t)$ est une martingale locale continue issue de 0 et à variation finie.

Pour une démonstration détaillée de l'existence, voir par exemple le livre de Le Gall (Thm 4.2, page 64). On mentionne la version pour les martingales à temps discret, dont l'énoncé est alors très concret et simple. Soit $(X_n,\ n \geq 0)$ une martingale telle que $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, $\forall\, n$. Soit

$$A_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\,(X_i - X_{i-1})^2 \,|\, \mathscr{F}_{i-1}\,\right].$$

Alors $X_n^2 - A_n$ est une martingale. □

PROPOSITION 4.3.3. *Soit M une martingale locale, et soit τ un temps d'arrêt. Alors*

$$\langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau.$$

Preuve. Puisque $M_{t\wedge\tau}^2 - \langle M\rangle_{t\wedge\tau}$ est une martingale locale, on a $\langle M\rangle_{t\wedge\tau} = \langle M^\tau\rangle_t$. □

DÉFINITION 4.3.4. *Une martingale continue M est de carré intégrable (ou dans L^2) si $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout t.*

THÉORÈME 4.3.5. *Soit M une martingale locale telle que p.s. $M_0 = 0$. Alors $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si M est une martingale de carré intégrable. Dans ce cas, $(M_t^2 - \langle M\rangle_t, t \geq 0)$ est une martingale.*

Preuve. Partie "si". Supposons que M soit une martingale de carré intégrable. Quitte à remplacer M par M^T pour $T \geq 0$ fixé, on peut supposer que M soit bornée dans L^2.

Pour tout n, soit $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \ \langle M\rangle_t \geq n\}$. Alors τ_n est un temps d'arrêt, tel que $\langle M\rangle_{t\wedge\tau_n} \leq n$. La martingale locale $M^2_{t\wedge\tau_n} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}$ étant dominée par la variable aléatoire $n + \sup_{t\geq 0} M_t^2$ qui est intégrable, elle est une vraie martingale uniformément intégrable (Proposition 4.2.5) et nulle au temps 0, ce qui implique $\mathbb{E}[\langle M\rangle_{\tau_n}] = \mathbb{E}[M^2_{\tau_n}]$. Par le Théorème d'arrêt $M_{\tau_n} = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_{\tau_n}]$ p.s. et donc $\|M_{\tau_n}\|_{L^2} \leq \|M_\infty\|_{L^2}$ pour tout n. Par conséquent, à l'aide de la convergence monotone l'on obtient

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\langle M\rangle_{\tau_n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M^2_{\tau_n}] \leq \mathbb{E}[M^2_\infty] < +\infty.$$

Partie "seulement si". Supposons que $\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) < \infty$ pour tout t. Soit $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| + \langle M\rangle_t \geq n\}$. Alors $M^2_{t\wedge\tau_n} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale locale bornée donc une martingale (Proposition 4.2.5), et $\mathbb{E}(M^2_{t\wedge\tau_n}) = \mathbb{E}(\langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}) \leq \mathbb{E}(\langle M\rangle_t)$. D'autre part, $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ étant une (vraie) martingale bornée, on a, d'après l'inégalité de Doob, $\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} M^2_{s\wedge\tau_n}) \leq 4\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}(M^2_{s\wedge\tau_n}) \leq 4\mathbb{E}(\langle M\rangle_t)$. Par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} M_s^2\right] \leq 4\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) < \infty. \tag{4.9}$$

Donc si $\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors, par la Proposition 4.2.5, M est une martingale de carré intégrable.

Montrons maintenant que $(M_s^2 - \langle M\rangle_s, s \in [0,t])$ est une martingale sous la condition que $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$: en effet, la martingale locale $(M_s^2 - \langle M\rangle_s, s \in [0,t])$ est dominée par la variable aléatoire intégrable $\sup_{s\in[0,t]} M_s^2 + \langle M\rangle_t$, et elle est donc une vraie martingale par la Proposition 4.2.5. □

COROLLAIRE 4.3.6. *Soit M une martingale dans L^2 telle que p.s. $M_0 = 0$. Alors*

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\langle M\rangle_t), \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{4.10}$$

En plus $\langle M\rangle_t = 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$ si et seulement si $(M_t)_{t\geq 0}$ est indistinguable de 0.

Preuve. La preuve de (4.10) suit du fait que $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale et que p.s. $\langle M\rangle_0 = 0$. Supposons que $\langle M\rangle_t = 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$. D'après les Théorèmes 4.3.1 et 4.3.5, M^2 est une martingale. Donc $\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(M_0^2) = 0$ et M est indistinguable de 0 par la continuité des trajectoires. □

On étend maintenant la notion de crochet pour un couple de martingales locales.

DÉFINITION 4.3.7. *Soient M et N deux martingales locales. On pose*

$$\langle M,N\rangle_t := \frac{1}{4}\Big[\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t\Big] = \frac{1}{2}\Big[\langle M+N\rangle_t - \langle M\rangle_t - \langle N\rangle_t\Big].$$

En particulier, $\langle M,M\rangle = \langle M\rangle$.

PROPOSITION 4.3.8. *Soient M et N deux martingales locales.*

(1) $\langle M,N\rangle$ est l'unique (à indistinguabilité près) processus à variation finie tel que $M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$ soit une martingale locale.

(2) L'application $(M,N) \mapsto \langle M,N\rangle$ est bilinéaire et symétrique.

(3) Soit $t > 0$. Si $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}) = \langle M,N\rangle_t, \qquad \text{en probabilité.} \tag{4.11}$$

(4) Si τ est un temps d'arrêt, alors $\langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M,N\rangle^\tau$.

Preuve. Les parties (1) et (3) découlent de leur analogue dans le Théorème 4.3.1 par polarisation. Les parties (2) et (4) sont des conséquences de (3) (car arrêter M ou N ou $\langle M,N\rangle$ revient à sommer sur les t_i tels que $t_i \leq \tau$). □

DÉFINITION 4.3.9. *On dit que deux martingales M et N locales sont orthogonales si $\langle M,N\rangle = 0$, ce qui équivaut à dire que le produit MN est une martingale locale.*

THÉORÈME 4.3.10 (Inégalité de Kunita–Watanabe). *Soient M et N deux martingales locales continues, et H et K deux processus mesurables. Alors pour tout $T \geq 0$*

$$\int_0^T |H_s|\,|K_s|\,|\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s| \;\leq\; \sqrt{\int_0^T H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s}\;\sqrt{\int_0^T K_s^2\,\mathrm{d}\langle N\rangle_s}\,. \tag{4.12}$$

Preuve. Écrivons $\langle M,N\rangle_s^t := \langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s$ pour $s \leq t$. Pour chaque couple $s < t$, il résulte des approximations de $\langle M,N\rangle$, $\langle M\rangle$ et $\langle N\rangle$ données par (4.11) et de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\big|\langle M,N\rangle_s^t\big| \leq \sqrt{\langle M\rangle_s^t}\,\sqrt{\langle N\rangle_s^t}\,, \tag{4.13}$$

presque sûrement. Donc (4.13) est valable p.s. pour tous les rationnels $s < t$, et par continuité p.s. pour tous $s < t$. Fixons à partir de maintenant $\omega \in \Omega$ tel que (4.13) soit valable pour tous $s < t$, et on travaillera toujours avec cette valeur de ω.

Soit $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de $[s,t]$. Alors d'après (4.13),

$$\sum_{i=1}^{p} |\langle M,N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}| \leq \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\langle M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\,\sqrt{\langle N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}.$$

Par Cauchy–Schwarz, le terme de droite est majoré par

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\langle M\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\langle N\rangle_{t_{i-1}}^{t_i}} = \sqrt{\langle M\rangle_s^t}\,\sqrt{\langle N\rangle_s^t}\,.$$

D'après la Proposition 4.1.10, ceci implique que pour tous $s < t$,

$$\int_s^t |\mathrm{d}\langle M,N\rangle_u| \leq \sqrt{\langle M\rangle_s^t}\,\sqrt{\langle N\rangle_s^t}\,. \tag{4.14}$$

On montre que cette inégalité peut être généralisée de la façon suivante : pour toute partie borélienne $A \subset \mathbb{R}_+$,

$$\int_A |\mathrm{d}\langle M,N\rangle_u| \leq \sqrt{\int_A \mathrm{d}\langle M\rangle_u}\,\sqrt{\int_A \mathrm{d}\langle N\rangle_u}\,. \tag{4.15}$$

En effet, soit $\mu(A) := \int_A |\mathrm{d}\langle M,N\rangle_u|$, et soit $\nu(A) := \mu(A) + \int_A \mathrm{d}\langle M\rangle_u + \int_A \mathrm{d}\langle N\rangle_u$. Il est clair que μ, $\mathrm{d}\langle M\rangle$ et $\mathrm{d}\langle N\rangle$ sont des mesures positives absolument continues par rapport à ν, et on note $f := \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\nu$, $g := \mathrm{d}\langle M\rangle/\mathrm{d}\nu$ et $h := \mathrm{d}\langle N\rangle/\mathrm{d}\nu$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons

$$a(t) := \lambda^2\langle M\rangle_t + 2\lambda\mu([0,t]) + \langle N\rangle_t, \qquad t \geq 0.$$

Il est clair que $a(0) = 0$ et que $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue et croissante (la monotonie étant une conséquence de (4.14)). Donc $\mathrm{d}a$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$, et on a $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\nu = \lambda^2 g + 2\lambda f + h \geq 0$, ν-p.p. Ceci étant simultanément vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, on déduit que $f^2 \leq gh$, ν-p.p. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_0^\infty 1_A f\,\mathrm{d}\nu \leq \int_0^\infty 1_A\sqrt{gh}\,\mathrm{d}\nu \\
&\leq \sqrt{\int_0^\infty 1_A g\,\mathrm{d}\nu}\sqrt{\int_0^\infty 1_A h\,\mathrm{d}\nu} \\
&= \sqrt{\int_A \mathrm{d}\langle M\rangle_u}\,\sqrt{\int_A \mathrm{d}\langle N\rangle_u}\,.
\end{aligned}$$

D'où (4.15).

Soient $h = \sum_i a_i \, \mathbb{1}_{A_i}$ et $k = \sum_i b_i \, \mathbb{1}_{A_i}$ deux fonctions étagées positives. On a

$$\begin{aligned} \int h(u)k(u)\,|\mathrm{d}\langle M, N\rangle_u| &= \sum_i a_i b_i \int_{A_i} |\mathrm{d}\langle M, N\rangle_u| \\ &\le \sqrt{\sum_i a_i^2 \int_{A_i} \mathrm{d}\langle M\rangle_u}\,\sqrt{\sum_i b_i^2 \int_{A_i} \mathrm{d}\langle N\rangle_u} \\ &= \sqrt{\int h^2(u)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_u}\,\sqrt{\int k^2(u)\,\mathrm{d}\langle N\rangle_u}\,, \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité voulue pour les fonctions étagées. Il reste à écrire une fonction mesurable positive comme limite croissante de fonctions étagées positives. □

4.4. Semimartingales continues

Définition 4.4.1. *Un processus $X = (X_t,\ t \ge 0)$ est appelé une* **semimartingale continue** *s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t,$$

où M est une martingale locale continue et V est un processus à variation finie, avec $M_0 = V_0 = 0$.

Remarque 4.4.2. D'après le Théorème 4.2.7, la décomposition $X_t = X_0 + M_t + V_t$ pour une semimartingale continue est unique à indistinguabilité près. Elle est appelée la “décomposition canonique" de la semimartingale X. □

Définition 4.4.3. *Soient $X_t = X_0 + M_t + V_t$ et $\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_0 + \widetilde{M}_t + \widetilde{V}_t$ deux semimartingales continues. On pose*

$$\langle X, \widetilde{X}\rangle_t := \langle M, \widetilde{M}\rangle_t.$$

En particulier, $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

Proposition 4.4.4. *Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(\widetilde{X}_{t_i^n} - \widetilde{X}_{t_{i-1}^n}) = \langle X, \widetilde{X}\rangle_t, \qquad \textit{en probabilité.}$$

Preuve. Par polarisation, i.e. par la Définition 4.3.7, il suffit de traiter le cas où $X = \widetilde{X}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p_n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 &= \sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 + \sum_{i=1}^{p_n}(V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n})^2 \\ &\quad +2\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}) \\ &=: I_1(n) + I_2(n) + I_3(n),\end{aligned}$$

avec des notations évidentes. Le Théorème 4.3.1 nous dit que $I_1(n) \to \langle M\rangle_t = \langle X\rangle_t$ en probabilité. D'autre part, par la Proposition 4.1.10,

$$\begin{aligned}I_2(n) &\leq \left(\max_{1\leq i\leq p_n} |V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}|\right) \sum_{i=1}^{p_n} |V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}| \\ &\leq \left(\max_{1\leq i\leq p_n} |V_{t_i^n} - V_{t_{i-1}^n}|\right) \int_0^t |\mathrm{d}V_s|,\end{aligned}$$

qui converge p.s. vers 0 par la continuité de $s \mapsto V_s$. De même,

$$|I_3(n)| \leq \left(\max_{1\leq i\leq p_n} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}|\right) \int_0^t |\mathrm{d}V_s| \to 0, \qquad \text{p.s.}$$

Par conséquent, $I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) \to \langle X\rangle_t$ en probabilité. $\square$

Chapitre 5

Intégrale stochastique

Nous nous approchons dans ce chapitre de l'objet principal du cours : l'intégrale stochastique par rapport à une semimartingale continue. La construction de l'intégrale stochastique se fait en deux étapes : nous commençons par construire l'intégrale stochastique par rapport à une martingale continue et dans L^2 ; ensuite nous définissons l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale continue.

5.1. Intégration pour les martingales dans L^2

Durant tout le chapitre, on se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ qui vérifie les conditions habituelles, et on construit l'intégrale stochastique par rapport à une martingale continue et dans L^2 sur $[0,T]$.

DÉFINITION 5.1.1. *On note $\mathscr{M}_T^2$ l'espace des martingales $(M_t, t \in [0,T])$ continues, dans L^2 et telles que $M_0 = 0$. On définit le produit scalaire sur $\mathscr{M}_T^2$*

$$(M,N)_{\mathscr{M}_T^2} := \mathbb{E}[M_T N_T].$$

En identifiant les processus indistinguables, nous obtenons

PROPOSITION 5.1.2. *L'espace $\mathscr{M}_T^2$ muni du produit scalaire $(M,N)_{\mathscr{M}_T^2}$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. Il faut montrer que $\mathscr{M}_T^2$ est complet pour la norme $\|M\|_{\mathscr{M}_T^2}$. Soit $(M^n)_n$ une suite de Cauchy pour cette norme. Comme $\|N\|_{\mathscr{M}_T^2} = \|N_T\|_{L^2}$ pour tout $N \in \mathscr{M}_T^2$, M_T^n converge dans L^2 vers une v.a. $X \in L^2(\mathscr{F}_\infty)$. Il faut maintenant montrer qu'il existe une (unique à indistinguabilité près) martingale continue $M = (M_t,\ t \in [0,T])$ dans $\mathscr{M}_T^2$ telle que p.s. $M_T = X$.

Tout d'abord nous allons prouver qu'il existe un processus continu $(M_t, t \in [0,T])$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} (M_t^n - M_t)^2\right] = 0. \tag{5.16}$$

Remarquons que par l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}(M_t^n - M_t^m)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[(M_T^n - M_T^m)^2\right],$$

qui tend vers 0 si $m, n \geq N$ et $N \to +\infty$. Il suffirait de remarquer que l'espace $L^2(\Omega; C([0,T]))$ est complet par rapport à la norme $\|f\| := \|\sup|f|\|_{L^2(\mathbb{P})}$. Nous donnons maintenant une preuve plus directe.

Il existe une suite déterministe (n_k) telle que $n_{k+1} > n_k$ et $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}(M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k})^2] < 2^{-k}$ pour tout k. Si on pose $A_k := \{\sup_{t\in[0,T]}|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}|^2 > k^{-4}\}$ alors par l'inégalité de Markov $\mathbb{P}(A_k) \leq k^2 2^{-k}$ et donc par Fubini $\mathbb{P}(L) = 1$ où $L := \liminf A_k^c$. Or pour tout $\omega \in L$, il existe $k(\omega)$ tel que si $j \geq k(\omega)$ alors

$$\sup_{t\in[0,T]}|M_t^{n_{j+1}}(\omega) - M_t^{n_j}(\omega)| \leq \frac{1}{j^2}$$

et si on définit pour tout $\omega \in L$

$$M_t(\omega) := M_t^{n_1}(\omega) + \sum_{j=1}^{\infty}(M_t^{n_{j+1}}(\omega) - M_t^{n_j}(\omega)), \qquad t \in [0,T],$$

alors

$$\sup_{[0,T]}|M(\omega) - M^{n_j}(\omega)| \leq \sum_{k=j}^{\infty}\sup_{[0,T]}|M^{n_{k+1}}(\omega) - M^{n_k}(\omega)| \to 0$$

si $j \to +\infty$. Par conséquent, p.s. $M^{n_k} \to M$ uniformément sur $[0,T]$, et donc M est p.s. continu sur $[0,T]$. De plus par construction

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]}|M - M^{n_j}|\right] \leq \sum_{k=j}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]}|M^{n_{k+1}} - M^{n_k}|\right] \leq \sum_{k=j}^{\infty}2^{-k} \to 0$$

quand $j \to +\infty$.

Maintenant que (5.16) est prouvé, nous allons montrer que M appartient à $\mathscr{M}_T^2$. Puisque M_T^n converge vers X dans $L^2(\Omega)$, nous avons par la continuité de l'espérance conditionnelle dans $L^2(\Omega)$ que pour tout $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(M_T^n \,|\, \mathscr{F}_t) = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{F}_t), \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Puisque p.s. $M^{n_k} \to M$ uniformément sur $[0,T]$, cela implique que $M_t = \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{F}_t)$ p.s. pour tout $t \in [0,T]$ et donc M est une martingale continue dans L^2. $\square$

On remarque que pour toute $M, N \in \mathscr{M}_T^2$, par le Corollaire 4.3.6

$$(M,N)_{\mathscr{M}_T^2} = \mathbb{E}[\langle M,N\rangle_T], \qquad \|M\|_{\mathscr{M}_T^2}^2 = \mathbb{E}[\langle M\rangle_T] \tag{5.17}$$

où $\langle M,N\rangle_T$ et $\langle M\rangle_T$ sont les crochets définis dans la Section 4.3.

DÉFINITION 5.1.3. *On note $\mathscr{P}$ la tribu progressive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ définie à la fin de la section 3.1. Pour $M \in \mathscr{M}_T^2$, on note $L_T^2(M) := L^2([0,T]\times\Omega,\ \mathscr{P},\ \mathrm{d}\langle M\rangle_s \otimes \mathrm{d}\mathbb{P})$, l'espace des processus progressifs H tels que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] < \infty.$$

REMARQUE 5.1.4. Comme n'importe quel espace L^2, l'espace $L_T^2(M)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(H,K)_{L_T^2(M)} := \mathbb{E}(\int_0^T H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s)$. □

REMARQUE 5.1.5. Dans le cas du mouvement brownien B, puisque p.s. $\langle B\rangle_t = t$, ces formules sont particulièrement simples : $L_T^2(B) := L^2([0,T]\times\Omega,\ \mathscr{P},\ \mathrm{d}s\otimes\mathrm{d}\mathbb{P})$,

$$(H,K)_{L_T^2(B)} := \int_0^T \mathbb{E}(H_s K_s)\,\mathrm{d}s, \qquad \|H\|_{L_T^2(B)} := \int_0^T \mathbb{E}(H_s^2)\,\mathrm{d}s. \qquad \square$$

DÉFINITION 5.1.6. *On dit que $H : [0,+\infty[\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$ est élémentaire s'il s'écrit sous la forme*

$$H_s := \sum_{i=0}^{p} H^{(i)}(\omega)\,\mathbb{1}_{]t_i,\,t_{i+1}]}(s), \qquad s \geq 0,$$

où $p \geq 0$ est un entier, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{p+1}$ sont des réels, et $H^{(i)}$ est une variable aléatoire réelle bornée et $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurable (pour $0 \leq i \leq p$). Notons $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel formé des processus élémentaires.

LEMME 5.1.7. *$\mathscr{E} \subset L_T^2(M)$ est dense dans $L_T^2(M)$.*

Preuve. Il est clair que $\mathscr{E} \subset L_T^2(M)$.

Soit $K \in L_T^2(M)$ orthogonal à $\mathscr{E}$. Il s'agit de prouver que K est l'élément 0 de $L_T^2(M)$.

Considérons le processus X défini par $X_t := \int_0^t K_s \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$. Ce processus est bien défini, Puisque $K \in L_T^2(M)$, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz et rappeler que $M \in \mathscr{M}_T^2$, pour voir que X est bien défini, et que $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, $\forall t \in [0,T]$. Par conséquent, pour tous $v > u \geq 0$ et $A \in \mathscr{F}_u$, on a

$$\mathbb{E}[(X_v - X_u)\,\mathbb{1}_A] = 0.$$

Il suffit, en effet, d'écrire $(H,\,K)_{L_T^2(M)} = 0$ pour le processus $H \in \mathscr{E}$ défini par $H_t(\omega) := \mathbb{1}_A(\omega)\,\mathbb{1}_{]u,\,v]}(t)$. Ceci signifie que X est une martingale continue. Comme X, par la Proposition 4.1.14, est également un processus à variation finie, on a $X = 0$ par le Théorème 4.2.7. Donc p.s.

$$\int_0^t K_s \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = 0, \qquad t \geq 0,$$

ce qui entraîne que p.s. $K_s = 0$, $\mathrm{d}\langle M\rangle_s$-presque partout. Autrement dit, K est l'élément 0 de $L_T^2(M)$. □

THÉORÈME 5.1.8. *Soit $M \in \mathscr{M}_T^2$ et $H \in \mathscr{E}$. On définit le processus*

$$(H \cdot M)_t := \sum_{i=0}^{p} H^{(i)}\,(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}), \qquad t \in [0,T].$$

Alors $(H \cdot M)_{t\in[0,T]}$ est dans $\mathscr{M}_T^2$ avec variation quadratique $\langle H \cdot M\rangle = \int_0^\cdot H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$ et

$$\mathbb{E}\left((H \cdot M)_T^2\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right].$$

En particulier, l'application $H \mapsto H \cdot M$ est une isométrie de $\mathscr{E}$ muni de la norme de $L_T^2(M)$ dans $\mathscr{M}_T^2$.

Preuve. Il est clair que $H \cdot M$ est une martingale continue et dans L^2, nulle en 0. Autrement dit, $H \cdot M \in \mathscr{M}_T^2$. De plus, l'application $H \mapsto H \cdot M$ est de toute évidence linéaire. Montrons maintenant $\|H \cdot M\|_{\mathscr{M}_T^2} = \|H\|_{L_T^2(M)}$, $\forall H \in \mathscr{E}$.

Soit $H := \sum_{i=0}^p H^{(i)}(\omega)\,\mathbb{1}_{]t_i,\,t_{i+1}]} \in \mathscr{E}$. Alors $(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^p L_t^{(i)}$, où, pour $0 \le i \le p$,

$$L_t^{(i)} := H^{(i)}\,(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}).$$

Il est facile de voir que $((L_t^{(i)})^2 - \left(H^{(i)}\right)^2 (\langle M\rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M\rangle_{t_i\wedge t}))_{t\ge 0}$ est une martingale ; en particulier, p.s. $\langle L^{(i)}\rangle_t = \left(H^{(i)}\right)^2 (\langle M\rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M\rangle_{t_i\wedge t})$. Or les martingales $(L^{(i)})_{i=0,\dots,p}$ sont orthogonales, et donc

$$\langle H \cdot M\rangle_t = \sum_{i=0}^{p} [H^{(i)}]^2\,(\langle M\rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M\rangle_{t_i\wedge t}) = \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\ .$$

Par conséquent, $\|H \cdot M\|_{\mathscr{M}_T^2}^2 = \mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s] = \|H\|_{L_T^2(M)}^2$. □

DÉFINITION 5.1.9. *Soit $M \in \mathscr{M}_T^2$. On note $H \mapsto H \cdot M$ l'isométrie de $L_T^2(M)$ dans $\mathscr{M}_T^2$ qui est l'unique prolongement continu de $\mathscr{E} \ni H \mapsto H \cdot M \in \mathscr{M}_T^2$ si on munit $\mathscr{E}$ de la norme de $L_T^2(M)$. La martingale $H \cdot M$ est appelée* **intégrale stochastique** *ou* **intégrale d'Itô** *de H par rapport à M. On écrira souvent*

$$\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s := (H \cdot M)_t.$$

Par le Théorème 5.1.8, pour toute $M \in \mathscr{M}_T^2$ et $H \in L_T^2(M)$ nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right]. \tag{5.18}$$

Attention : ces deux identités ne seront plus vraies en général pour les extensions de l'intégrale stochastique qui seront définies dans la section suivante.

DÉFINITION 5.1.10. *Nous notons par* $\mathscr{M}^2$ *l'espace des martingales continues* $(M_t, t \geq 0)$ *qui appartiennent à* $\mathscr{M}_T^2$ *pour tout* $T \geq 0$. *Pour* $M \in \mathscr{M}^2$ *nous notons par* $L^2(M)$ *l'ensemble des processus progréssifs* $(H_t, t \geq 0)$ *qui appartiennent à* $L_T^2(M)$ *pour tout* $T \geq 0$.

Par les considérations précédentes, l'intégrale stochastique $((H \cdot M)_t, t \geq 0)$ de H par rapport à M est bien définie et appartient à $\mathscr{M}^2$ pour tous $M \in \mathscr{M}^2$ et $H \in L^2(M)$. On peut d'ailleurs pour tout $T \geq 0$ plonger canoniquement $\mathscr{M}_T^2 \to \mathscr{M}^2$ par l'injection $M \mapsto M_{\cdot \wedge T}$. De même l'application $H \mapsto H\, \mathbb{1}_{[0,T]}$ donne un plongement canonique de $L_T^2(M)$ dans $L^2(M)$.

5.2. Variation quadratique d'une intégrale stochastique

Grâce aux Définitions 5.1.9 et 5.1.10, nous avons une construction de la martingale $H \cdot M$ pour toute $M \in \mathscr{M}^2$ et tout $H \in L^2(M)$. Nous étudions maintenant la variation quadratique $\langle H \cdot M \rangle$ de $H \cdot M$.

THÉORÈME 5.2.1. *Soit* $M \in \mathscr{M}^2$. *Pour tout* $H \in L^2(M)$, $H \cdot M$ *est le seul élément de* $\mathscr{M}^2$ *tel que*

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle, \qquad \forall\, N \in \mathscr{M}^2, \tag{5.19}$$

où $H \cdot \langle M, N \rangle := \int_0^{\cdot} H_s \, \mathrm{d}\langle M, N \rangle_s$ *est l'intégrale de* H *par rapport au processus à variation finie* $\langle M, N \rangle$.

Preuve. Commençons par prouver l'unicité. Soient L et $\widetilde{L}$ deux éléments de $\mathscr{M}^2$ tels que $\langle L, N \rangle = \langle \widetilde{L}, N \rangle$, pour tout $N \in \mathscr{M}^2$. En particulier, $\langle L - \widetilde{L} \rangle = 0$. Comme $L_0 - \widetilde{L}_0 = 0$, il résulte du Corollaire 4.3.6 que $L = \widetilde{L}$.

Montrons d'abord (5.19) lorsque $H \in \mathscr{E}$. Soit $H := \sum_{i=0}^p H^{(i)}(\omega)\, \mathbb{1}_{]t_i,\, t_{i+1}]} \in \mathscr{E}$. Avec les mêmes notations que dans la preuve du Théorème 5.1.8, on a $\langle H \cdot M,\, N \rangle_t = \sum_{i=0}^p \langle L^{(i)},\, N \rangle_t$, et $\langle L^{(i)},\, N \rangle_t = H^{(i)}\,(\langle M,\, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M,\, N \rangle_{t_i \wedge t})$. Donc

$$\langle H \cdot M,\, N \rangle_t = \sum_{i=0}^p \langle L^{(i)},\, N \rangle_t = H^{(i)}\,(\langle M,\, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M,\, N \rangle_{t_i \wedge t}) = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}\langle M,\, N \rangle_s \ ,$$

ce qui donne l'identité cherchée.

Montrons maintenant l'identité $\langle H \cdot M,\, N \rangle_\cdot = \int_0^\cdot H_s \, \mathrm{d}\langle M,\, N \rangle_s$ dans le cas général $H \in L^2(M)$. Soit $T \geq 0$. Par le Lemme 5.1.7 il existe une suite $(H^n)_n$ d'éléments de $\mathscr{E}$ telle que $H^n \to H$ dans $L_T^2(M)$. Par la définition de $H \cdot M$ et (5.18), nous avons la convergence $H^n \cdot M \to H \cdot M$ dans $\mathscr{M}_T^2$.

D'autre part, H^n étant un élément de $\mathscr{E}$, d'après ce que l'on a prouvé ci-dessus, $\langle H^n \cdot M,\, N \rangle_t = \int_0^t H_s^n \, \mathrm{d}\langle M,\, N \rangle_s$ pour tout $t \in [0, T]$. D'après l'inégalité de Kunita–Watanabe

(4.12),

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (H_s^n - H_s)\,\mathrm{d}\langle M,\, N\rangle_s\right|\right] \leq \|H^n - H\|_{L^2_T(M)}\,\|N\|_{\mathscr{M}^2_T},$$

i.e. $\int_0^t H_s^n\,\mathrm{d}\langle M,\, N\rangle_s$ converge dans L^1 vers $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle M,\, N\rangle_s$.

Soit $N \in \mathscr{M}^2_T$. Pour tout n le processus $X^n := (H^n \cdot M)N - H^n \cdot \langle M,\, N\rangle$ est une martingale et par les convergences que l'on vient de prouver on obtient que $X_t^n \to X_t := [(H \cdot M)N - H \cdot \langle M,\, N\rangle]_t$ pour tout $t \in [0,T]$ dans L^1 ; par conséquent le processus continu $(X_t, t \in [0,T])$ est une martingale et cela signifie que $\langle H \cdot M,\, N\rangle = H \cdot \langle M,\, N\rangle$. □

Corollaire 5.2.2. *Soit $M \in \mathscr{M}^2$ et $H \in L^2(M)$. Alors $\langle H \cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$, $t \geq 0$.*

Preuve. Par le Théorème 5.2.1

$$\langle H \cdot M\rangle = \langle H \cdot M, H \cdot M\rangle = H \cdot \langle M, H \cdot M\rangle = H^2 \cdot \langle M, M\rangle = H^2 \cdot \langle M\rangle.$$

Cela termine la preuve. □

Remarque 5.2.3. Nous rappelons que dans la preuve du Théorème 4.3.1 nous n'avons pas prouvé l'existence de la variation quadratique d'une martingale générale dans L^2 continue, mais seulement (dans l'Exemple 3.4.2 et dans la Proposition 2.5.1) dans le cas d'un mouvement brownien. Par le Corollaire 5.2.2, si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, $H \in L^2(B)$ et $M := H \cdot B = \int_0^\cdot H_s\,\mathrm{d}B_s$ alors $(M_t^2 - \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s)_{t\geq 0}$ est une martingale. En particulier, p.s. $\langle H \cdot B\rangle_t = \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$ et pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[H_s^2\right]\,\mathrm{d}s. \tag{5.20}$$

Proposition 5.2.4 (Associativité). *Si $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K \cdot M)$, alors $HK \in L^2(M)$, et*

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M).$$

Preuve. D'après le Corollaire 5.2.2, $\langle K \cdot M\rangle = K^2 \cdot \langle M\rangle$. Donc

$$\int_0^T H_s^2 K_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = \int_0^T H_s^2\,\mathrm{d}\langle K \cdot M\rangle_s,$$

ce qui donne $HK \in L^2(M)$. De plus, pour tout $N \in \mathscr{M}^2$,

$$\begin{aligned}\langle (HK) \cdot M,\, N\rangle &= HK \cdot \langle M,\, N\rangle = H \cdot (K \cdot \langle M,\, N\rangle)\\ &= H \cdot \langle K \cdot M,\, N\rangle = \langle H \cdot (K \cdot M),\, N\rangle,\end{aligned}$$

ce qui implique que $(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$. □

La prochaine proposition est cruciale dans la construction de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale donnée dans la Section 5.4.

PROPOSITION 5.2.5. *Soit $M \in \mathscr{M}^2$, et soit $H \in L^2(M)$. Si τ est un temps d'arrêt, alors*

$$H \cdot M^\tau = (H\,\mathbb{1}_{[0,\tau]}) \cdot M = (H \cdot M)^\tau.$$

Preuve. Il est clair que $\mathbb{1}_{[0,\tau]} \in L^2(M)$. Pour tout $N \in \mathscr{M}^2$, puisque $t \mapsto \langle M,\ N\rangle_t$ est à variation finie,

$$\langle M,\ N\rangle^\tau = \int_0^{\tau\wedge\cdot} \mathrm{d}\langle M,\ N\rangle = \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot \langle M,\ N\rangle.$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème 5.2.1, pour tout $N \in \mathscr{M}^2$

$$\langle M^\tau,\ N\rangle = \langle M,\ N\rangle^\tau = \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot \langle M,\ N\rangle = \langle \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot M,\ N\rangle$$

et donc $M^\tau = \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot M$. D'après la Proposition 5.2.4, on a

$$H \cdot M^\tau = H \cdot (\mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot M) = (H\,\mathbb{1}_{[0,\tau]}) \cdot M.$$

D'autre part, puisque $M^\tau = \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot M$, en remplaçant M par $H \cdot M$, on obtient $(H \cdot M)^\tau = \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot (H \cdot M)$. Il résulte alors de la Proposition 5.2.4 que

$$(H \cdot M)^\tau = \mathbb{1}_{[0,\tau]} \cdot (H \cdot M) = (\mathbb{1}_{[0,\tau]} H) \cdot M.$$

La preuve de la proposition est complète. □

REMARQUE 5.2.6.

(i) De manière informelle, l'égalité dans la proposition 5.2.4 s'écrit

$$\int_0^t H_s(K_s\,\mathrm{d}M_s) = \int_0^t (H_s K_s)\,\mathrm{d}M_s.$$

(ii) La propriété dans (5.19) s'écrit

$$\Big\langle \int_0^\cdot H_s\,\mathrm{d}M_s,\ N\Big\rangle_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle M,\ N\rangle_s.$$

En appliquant deux fois cette relation, on a aussi

$$\Big\langle \int_0^\cdot H_s\,\mathrm{d}M_s,\ \int_0^\cdot K_s\,\mathrm{d}N_s\Big\rangle_t = \int_0^t H_s K_s\,\mathrm{d}\langle M,\ N\rangle_s.$$

En particulier,

$$\Big\langle \int_0^\cdot H_s\,\mathrm{d}M_s\Big\rangle_t = \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

(iii) Si M et N sont des éléments de $\mathscr{M}^2$, et $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$, alors pour tout temps d'arrêt borné τ

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau H_s \,\mathrm{d}M_s\right] = 0,$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau H_s \,\mathrm{d}M_s\right)\left(\int_0^\tau K_s \,\mathrm{d}N_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s\right].$$

□

5.3. Les intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien

Nous considérons dans cette section le cas particulier où $M = B$ est un mouvement brownien. Nous voulons compléter la preuve du Théorème 4.3.1 pour une classe de martingales obtenues comme intégrale stochastique par rapport à B.

PROPOSITION 5.3.1. *Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien et $F \in L^2_T(B)$ un processus progressif dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{P}))$, i.e. tel que $F_t \in L^2(\mathbb{P})$ pour tout t et $\|F_s - F_t\|_{L^2(\mathbb{P})} \to 0$ quand $|t-s| \to 0$. Soit $\sigma = \{t_0, \dots, t_p\}$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ une subdivision de $[0,T]$ de pas $|\sigma| := \sup_{i=1,\dots,p}(t_i - t_{i-1})$. Alors*

$$\lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^p F_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = \int_0^T F_s \,\mathrm{d}s \quad \textit{dans } L^2.$$

Preuve. Soit $J_\sigma := \sum_{i=1}^p F_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$. Il suffit de montrer que

$$G_\sigma := \mathbb{E}\left[\left(J_\sigma - \sum_{i=1}^p F_{t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1})\right)^2\right] \to 0,$$

puisque par Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^p F_{t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1}) - \int_0^T F_s \,\mathrm{d}s\right)^2\right] \le T \sum_{i=1}^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbb{E}\left[\left(F_{t_{i-1}} - F_s\right)^2\right] \mathrm{d}s$$

qui tend vers 0 par convergence dominée puisque $F \in C([0,T]; L^2(\mathbb{P}))$. Or, en posant

$$a_i = t_i - t_{i-1}, \quad Y_i := (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - a_i, \quad H_i := F_{t_{i-1}}, \qquad 1 \le i \le p,$$

nous avons

$$G_\sigma = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^p H_i\, Y_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\left[(H_i\, Y_i)^2\right] + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}\left[H_i\, H_j\, Y_i\, Y_j\right].$$

En utilisant l'indépendance des accroissements de B, on voit que la dernière somme est nulle car pour $i < j$

$$\mathbb{E}\left[H_i\, H_j\, Y_i\, Y_j\right] = \mathbb{E}\left[H_i\, H_j\, Y_i\right] \mathbb{E}\left[Y_j\right] = 0.$$

Pour la même raison

$$G_\sigma = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[H_i^2\right] \mathbb{E}\left[Y_i^2\right].$$

Puisque $\mathbb{E}(Y_i^2) = a_i^2 \mathbb{E}[(B_1^2 - 1)^2] = a_i^2(\mathbb{E}(B_1^4) - 1) = 2a_i^2$,

$$G_\sigma = 2\sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[H_i^2\right](t_i - t_{i-1})^2 \leq 2 \sup_{i=1,\dots,p} |t_i - t_{i-1}| \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[H_i^2\right](t_i - t_{i-1})$$

qui tend vers 0 quand $|\sigma| \to 0$, d'où la convergence dans $L^2(\mathbb{P})$ souhaitée. $\square$

Proposition 5.3.2. *Soient B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, $H \in L_T^2(B)$ un processus progressif dans $C([0,T]; L^4(\mathbb{P}))$, i.e. tel que $H_t \in L^4(\mathbb{P})$ pour tout t et $\|H_s - H_t\|_{L^4(\mathbb{P})} \to 0$ quand $|t-s| \to 0$. Soit $M_t := \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$, $t \geq 0$, et $\sigma = \{t_0, \dots, t_p\}$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ une subdivision de $[0,T]$ de pas $|\sigma| := \sup_{i=1,\dots,p}(t_i - t_{i-1})$. Alors*

$$\lim_{|\sigma| \to 0} \sum_{i=1}^{p} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 = \int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s \quad \textit{dans } L^1.$$

Preuve. Nous écrivons

$$\sum_{i=1}^{p} \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2 = \alpha_\sigma + \beta_\sigma,$$

$$\alpha_\sigma := \sum_{i=1}^{p} H_{t_{i-1}}^2 \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2, \quad \beta_\sigma := \sum_{i=1}^{p} \left\{ \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2 - H_{t_{i-1}}^2 \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \right\}.$$

Puisque $H \in C([0,T]; L^4(\mathbb{P}))$, $H^2 \in C([0,T]; L^2(\mathbb{P}))$ et par la Proposition 5.3.1, $\alpha_\sigma \to \int_0^T H_s^2 \, \mathrm{d}s$ dans L^2. Concernant β_σ, nous avons par Cauchy-Schwarz et (5.20)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\beta_\sigma|] &\leq \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_s - H_{t_{i-1}}) \, \mathrm{d}B_s\right| \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_s + H_{t_{i-1}}) \, \mathrm{d}B_s\right|\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \left\{ \mathbb{E}\left[\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_s - H_{t_{i-1}}) \, \mathrm{d}B_s\right|^2\right] \mathbb{E}\left[\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_s + H_{t_{i-1}}) \, \mathrm{d}B_s\right|^2\right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbb{E}\left[(H_s - H_{t_{i-1}})^2\right] \mathrm{d}s \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbb{E}\left[(H_s + H_{t_{i-1}})^2\right] \mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Par les hypothèses sur H, on voit que $\mathbb{E}[H_s^2] \leq M < +\infty$ pour tout $s \in [0,T]$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, si $|\sigma|$ est suffisamment petit alors $\mathbb{E}\left[(H_s - H_{t_{i-1}})^2\right] \leq \varepsilon$. Nous obtenons que $\mathbb{E}[|\beta_\sigma|] \leq 2\sqrt{M\varepsilon}$ et la convergence souhaitée est prouvée. $\square$

Remarque 5.3.3. La proposition 5.3.2 complète une prouve rigoureuse du Théorème 4.3.1 pour une classe de martingales définies par des intégrales stochastiques $H \cdot B$ où B est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien et H un processus progressif avec des propriétés d'intégrabilité appropriées.

5.4. Intégration stochastique pour les martingales locales

Définition 5.4.1. *Soit M une martingale locale nulle en 0. On note $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty, \qquad \text{p.s.}$$

Théorème 5.4.2. *Soit M une martingale locale issue de 0.*

(1) Pour tout $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $H \cdot M$, telle que pour toute martingale locale N,

$$\langle H \cdot M,\ N\rangle = H \cdot \langle M,\ N\rangle.$$

(2) Si τ est un temps d'arrêt, on a $H \cdot M^\tau = (H\,\mathbf{1}_{[0,\tau]}) \cdot M = (H \cdot M)^\tau$.

(3) Lorsque $M \in \mathscr{M}^2$ et $H \in L^2(M)$, cette définition étend celle du Théorème 5.1.8.

Preuve. Soit $\tau_n := \inf\{t \geq 0 :\ \langle M\rangle_t + \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \geq n\}$. Nous avons $\langle M^{\tau_n}\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n} \leq n$, et donc $\mathbb{E}(\langle M^{\tau_n}\rangle_\infty) < \infty$. D'après la Proposition 4.3.5, $M^{\tau_n} \in \mathscr{M}^2$.

D'autre part, $\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M^{\tau_n}\rangle_s = \int_0^{\tau_n} H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \leq n$. Donc $H \in L^2(M^{\tau_n})$. On peut donc définir pour chaque n l'intégrale stochastique $H \cdot M^{\tau_n}$.

Soient $m > n$. Pour tout $N \in \mathscr{M}^2$, comme

$$\begin{aligned}\langle (H \cdot M^{\tau_m})^{\tau_n},\ N\rangle &= \langle H \cdot M^{\tau_m},\ N\rangle^{\tau_n} = (H \cdot \langle M^{\tau_m},\ N\rangle)^{\tau_n}\\ &= H \cdot \langle M^{\tau_m},\ N\rangle^{\tau_n} = H \cdot \langle M^{\tau_n},\ N\rangle = \langle H \cdot M^{\tau_n},\ N\rangle,\end{aligned}$$

par l'unicité prouvée dans le Théorème 5.2.1 l'on a $(H \cdot M^{\tau_m})^{\tau_n} = H \cdot M^{\tau_n}$. Ceci étant vrai pour tout couple $m > n$, on déduit qu'il existe un (unique) processus, noté $H \cdot M$, tel que $(H \cdot M)^{\tau_n} = H \cdot M^{\tau_n}, \forall\, n$. En effet, il suffit de prendre $(H \cdot M)_0 := 0$ et $(H \cdot M)_t := (H \cdot M^{\tau_n})_t$, si $\tau_{n-1} < t \leq \tau_n$; on voit que $H \cdot M$ est un processus continu et adapté. Comme $H \cdot M^{\tau_n}$ est une martingale dans $\mathscr{M}^2$, $H \cdot M$ est une martingale locale issue de 0 et (τ_n) réduit $H \cdot M$.

Soit N une martingale locale *issue de* 0. Soit $\sigma_n := \inf\{t \geq 0 :\ |N_t| \geq n\}$, et soit $S_n := \tau_n \wedge \sigma_n$. On a

$$\begin{aligned}\langle H \cdot M,\ N\rangle^{S_n} &= \langle (H \cdot M)^{S_n},\ N^{S_n}\rangle = \langle (H \cdot M^{\tau_n})^{S_n},\ N^{S_n}\rangle = \langle H \cdot M^{S_n},\ N^{S_n}\rangle\\ &= H \cdot \langle M^{S_n},\ N^{S_n}\rangle = H \cdot \langle M,\ N\rangle^{S_n} = (H \cdot \langle M,\ N\rangle)^{S_n},\end{aligned}$$

d'où l'égalité $\langle H \cdot M,\ N\rangle = H \cdot \langle M,\ N\rangle$. Ceci est vrai sans l'hypothèse $N_0 = 0$, car $\langle M,\ N\rangle = \langle M,\ N - N_0\rangle$.

Le fait que cette égalité valable pour toute martingale locale N caractérise $H \cdot M$ se démontre avec l'argument d'unicité qui se trouve au début de la preuve du Théorème 5.2.1.

La preuve de $H \cdot M^T = (H\,\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot M = (H \cdot M)^T$ est identique à celle de la Proposition 5.2.5, car elle utilise seulement la propriété caractéristique (5.19) que l'on vient d'étendre, et l'associativité que l'on formule et démontre aisément.

Enfin, si $M \in \mathscr{M}^2$ et $H \in L^2(M)$, l'égalité $\langle H \cdot M\rangle = H^2 \cdot \langle M\rangle$ (où $H \cdot M$ est le processus que l'on vient de définir) montre que $\mathbb{E}(\langle H \cdot M\rangle_T) < \infty$ pour tout $T \geq 0$, et donc $H \cdot M \in \mathscr{M}^2$. La propriété caractéristique (5.19) montre alors que $H \cdot M$ n'est autre que l'objet défini dans le Théorème 5.2.1. $\square$

REMARQUE 5.4.3. Soit M une martingale locale issue de 0, et soit $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$. Soit τ un temps d'arrêt (en particulier, si $\tau = t \in [0, \infty]$). **Si** $\mathbb{E}[\langle H \cdot M\rangle_\tau] = \mathbb{E}[\int_0^\tau H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s] < \infty$, alors par le Théorème 4.3.5 $(H \cdot M)^\tau \in \mathscr{M}^2$ et de plus $(H \cdot M)^\tau$ est fermée par $(H \cdot M)_\tau \in L^2$, et on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau H_s \,\mathrm{d}M_s\right] = 0, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right].$$

Par contre, en général ces formules sont fausses, d'autant que l'on ne sait même pas si $(H \cdot M)_t$ est intégrable pour $t \geq 0$. $\square$

On étend maintenant l'intégrale stochastique à toutes les semimartingales continues.

DÉFINITION 5.4.4. *On dit qu'un processus progressif H est* **localement borné** *si*

$$\text{p.s.}, \quad \forall\, t \geq 0, \qquad \sup_{s \in [0,t]} |H_s| < \infty.$$

Remarquons que tout processus continu adapté est localement borné. De plus, si H est localement borné, alors pour tout process V à variation finie,

$$\text{p.s.} \qquad \forall\, t \geq 0 : \qquad \int_0^t |H_s|\,|\mathrm{d}V_s| < \infty.$$

De même, si H est localement borné, alors $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ pour toute martingale locale M.

DÉFINITION 5.4.5. *Soit $X = X_0 + M + V$ une semimartingale (continue), et soit H un processus progressif localement borné. L'intégrale stochastique $H \cdot X$ est alors définie par*

$$H \cdot X := H \cdot M + H \cdot V,$$

et l'on note

$$\int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s := (H \cdot X)_t.$$

EXERCICE 5.4.6.

(1) L'application $(H, X) \mapsto H \cdot X$ est bilinéaire.

(2) Si H et K sont localement bornés, alors $H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X$.

(3) Si τ est un temps d'arrêt, alors $(H \cdot X)^\tau = (H \, \mathbf{1}_{[0,\tau]}) \cdot X = H \cdot X^\tau$.

(4) Si X est une martingale locale (resp. un processus à variation finie), alors il en va de même pour $H \cdot X$.

(5) Si H est un processus progressif de forme $H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H^i(\omega) \, \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$, où, pour chaque i, H^i est $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurable, alors

$$(H \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H^i \, (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}).$$

Ces propriétés découlent facilement des résultats obtenus quand X est une martingale locale, resp. un processus à variation finie. Il est à noter que dans la propriété (5) on ne suppose pas que la variable H^i soit bornée.

PROPOSITION 5.4.7. *Soient X une semimartingale (continue) et H un processus continu adapté. Alors pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0,*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} H_{t_i^n} \, (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s \, , \qquad \text{en probabilité.}$$

Preuve. On peut traiter séparément les parties martingale et à variation finie de X. La partie à variation finie est déjà traitée par le Lemme 4.1.12. On peut donc supposer que $X = M$ est une martingale locale issue de 0.

Pour chaque n, soit K^n le processus défini par

$$K_s^n = H_{t_i^n} \, \mathbb{1}_{(t_i^n < s \le t_{i+1}^n)}.$$

Posons $\tau_m := \inf\{s \ge 0 : |H_s| + \langle M \rangle_s \ge m\}$. Remarquons que $H \, \mathbf{1}_{[0,\tau_m]}$, $K^n \, \mathbf{1}_{[0,\tau_m]}$ et $\langle M^{\tau_m} \rangle$ sont tous bornés. D'après le Théorème 5.2.1 et la Proposition 5.2.5,

$$t \mapsto \big((K^n - H) \, \mathbf{1}_{[0,\tau_m]} \cdot M^{\tau_m} \big)_t^2 - \int_0^t (K^n - H)^2 \, \mathbf{1}_{[0,\tau_m]} \, \mathrm{d}\langle M^{\tau_m} \rangle_s$$

est une martingale (uniformément intégrable). Donc

$$\mathbb{E}\left[\big((K^n - H) \, \mathbf{1}_{[0,\tau_m]} \cdot M^{\tau_m} \big)_t^2 \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (K^n - H)^2 \, \mathbf{1}_{[0,\tau_m]} \, \mathrm{d}\langle M^{\tau_m} \rangle_s \right].$$

Lorsque $n \to \infty$, le terme de droite converge vers 0 (convergence dominée), ce qui entraîne que

$$(K^n \mathbf{1}_{[0,\tau_m]} \cdot M^{\tau_m})_t \to (H \mathbf{1}_{[0,\tau_m]} \cdot M^{\tau_m})_t, \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{P}),$$

c'est-à-dire $(K^n \cdot M)_{t\wedge\tau_m} \to (H \cdot M)_{t\wedge\tau_m}$ dans $L^2(\mathbb{P})$ et a fortiori en probabilité : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 < \infty$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \mathbb{P}[\,|(K^n \cdot M)_{t\wedge\tau_m} - (H \cdot M)_{t\wedge\tau_m}| > \varepsilon] < \varepsilon$. D'autre part, il existe $m_0 = m_0(\varepsilon, t) < \infty$ tel que $\mathbb{P}(\tau_m < t) \leq \varepsilon$ pour tout $m \geq m_0$. Donc si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\,[\,|(K^n \cdot M)_t - (H \cdot M)_t| > \varepsilon\,] \\
&\quad \leq \mathbb{P}\left[\,|(K^n \cdot M)_{t\wedge\tau_{m_0}} - (H \cdot M)_{t\wedge\tau_{m_0}}| > \varepsilon\,\right] + \mathbb{P}(\tau_{m_0} < t) \\
&\quad \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Autrement dit, $(K^n \cdot M)_t \to (H \cdot M)_t$ en probabilité. □

Remarque 5.4.8. Contrairement à l'intégrale de Stieltjes (Lemme 4.1.12), dans la proposition précédente, le choix de $H_{t_i^n}$ dans la somme partielle $\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n}\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})$ est très important : on ne peut pas remplacer $H_{t_i^n}$ par exemple par $H_{t_{i+1}^n}$: en effet, si H est une semimartingale continue, alors $\sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_{i+1}^n}\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) - \sum_{i=0}^{p_n-1} H_{t_i^n}\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \sum_{i=0}^{p_n-1}(H_{t_{i+1}^n} - H_{t_i^n})\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})$, qui converge en probabilité vers $\langle H, X\rangle_t$ et cette limite n'est en général pas nulle. □

La proposition précédente permet d'établir la formule d'intégration par parties pour l'intégrale stochastique. Il s'agit d'un cas spécial de la formule d'Itô, que l'on étudiera dans le chapitre suivant.

Proposition 5.4.9 (intégration par parties). *Soient X et Y deux semimartingales continues. On a pour tout $t \geq 0$*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

En particulier,

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X\rangle_t.$$

Preuve. Fixons $t > 0$. Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^{p_n} = t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0. Par la proposition précédente, quand $n \to \infty$, on a, en probabilité,

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} X_{t_i^n}\,(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) \quad\to\quad \int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s\ ,$$
$$\sum_{i=0}^{p_n-1} Y_{t_i^n}\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \quad\to\quad \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s\ ,$$

tandis que la Proposition 4.4.4 nous confirme que

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\,(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) \to \langle X, Y\rangle_t.$$

On somme les trois formules. Comme

$$\begin{aligned}
& X_{t_i^n}(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) + Y_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\,(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) \\
= \;& X_{t_i^n}(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) + Y_{t_{i+1}^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \\
= \;& X_{t_{i+1}^n} Y_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} Y_{t_i^n},
\end{aligned}$$

et $\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_{i+1}^n} Y_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n} Y_{t_i^n}) = X_t Y_t - X_0 Y_0$, on obtient

$$\int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \langle X, Y\rangle_t = X_t Y_t - X_0 Y_0.$$

Il suffit d'utiliser la continuité de tous les processus pour voir que l'identité est vraie p.s. pour tout t. □

Remarque 5.4.10.

(i) La formule d'intégration par parties nous dit que si X et Y sont des semimartingales continues, alors XY l'est également. On verra dans le chapitre suivant que l'on peut étendre ce résultat à beaucoup d'autres fonctions de (X, Y).

(ii) Lorsque $X = M$ est une martingale locale (continue), on sait que $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale locale. La formule d'intégration par parties nous dit que cette martingale locale est

$$M_0^2 + 2\int_0^t M_s\,\mathrm{d}M_s.$$

□

Chapitre 6

Formule d'Itô et applications

La formule d'Itô est sans doute l'outil le plus puissant de la théorie du calcul stochastique. On démontre d'abord cette formule, et présente ensuite plusieurs applications profondes, notamment en ce qui concerne : (a) semimartingales exponentielles ; (b) caractérisation de Lévy du mouvement brownien ; (c) Théorème de Dubins–Schwarz pour les martingales locales continues ; (d) inégalités de Burkholder–Davis–Gundy ; (e) représentation des martingales d'un mouvement brownien ; et enfin (f) Théorème de Girsanov pour le changement de probabilité.

6.1. Formule d'Itô

Durant tout le chapitre, on se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ qui vérifie les conditions habituelles. La formule d'Itô nous dit qu'une fonction de classe C^2 de d semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Théorème 6.1.1 (formule d'Itô).

(i) (Cas unidimensionnel). Soit X une semimartingale continue et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s.$$

(ii) (Cas multidimensionnel). Soient $X^1, \cdots, X^d$ des semimartingales continues et soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s)\,\mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(X_s)\,\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_s,$$

où $X_t := (X_t^1, \cdots, X_t^d)$, $\forall\, t \ge 0$.

Preuve. (i) Fixons $t > 0$. Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0. On a $F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n-1}[F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n})]$. D'après la formule de Taylor,

$$F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) = F'(X_{t_i^n})\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \frac{1}{2}\, f_{n,i}(\omega)\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2,$$

où $f_{n,i}$ est tel que

$$\inf_{x\in I_{n,i}} F''(x) \le f_{n,i} \le \sup_{x\in I_{n,i}} F''(x),$$

et $I_{n,i} := [X_{t_i^n},\ X_{t_{i+1}^n}]$ ou $[X_{t_{i+1}^n},\ X_{t_i^n}]$ selon que $X_{t_i^n}$ est inférieur ou supérieur à $X_{t_{i+1}^n}$. (Il est à noter que $f_{n,i}$ est bien mesurable.)

La proposition 5.4.7 nous dit que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} F'(X_{t_i^n})\,(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t F'(X_s)\,\mathrm{d}X_s, \qquad \text{probabilité.}$$

Supposons pour l'instant que l'on sache montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = \int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s, \qquad \text{en probabilité,} \tag{6.21}$$

alors on aura : pour tout t, p.s. $F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s$. La continuité des processus nous confirmera la formule d'Itô dans le cas $d = 1$.

Il reste donc à prouver (6.21). Soient $n > m$. On a

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j} \sum_{i:\ t_j^m < t_i^n \le t_{j+1}^m} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2\Bigg| \\ \le Z_{m,n} \sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2,\end{aligned} \tag{6.22}$$

où

$$Z_{m,n} := \sup_{0\le j\le p_m-1}\ \sup_{i:\ t_j^m < t_i^n \le t_{j+1}^m} |f_{n,i} - f_{m,j}|.$$

(En effet, pour tout i, il existe un unique j tel que $t_j^m < t_i^n \le t_{j+1}^m$.)

Comme F est de classe C^2, presque sûrement F'' est uniformément continue sur l'intervalle (aléatoire) $[\inf_{s\in[0,t]} X_s,\ \sup_{s\in[0,t]} X_s]$. Donc $Z_{m,n} \to 0$ p.s. (et a fortiori en probabilité) quand $m, n \to \infty$. D'autre part, $\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$ converge en probabilité vers $\langle X\rangle_t$ (quand $n \to \infty$) d'après la Proposition 4.4.4. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N_1 < \infty$ tel que $n > m \ge N_1 \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left[Z_{m,n} \sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \ge \varepsilon \right] \le \varepsilon. \tag{6.23}$$

Pour chaque m, considérons la fonction aléatoire h_m définie par

$$h_m(s) := \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}\, \mathbb{1}_{]t_j^m, t_{j+1}^m]}(s).$$

Il est clair que p.s., pour tout $s \in]0,t]$, $h_m(s) \to F''(X_s)$ $(m \to \infty)$. Or, presque sûrement, F'' est bornée sur $[\inf_{s\in[0,t]} X_s,\ \sup_{s\in[0,t]} X_s]$, et par convergence dominée, lorsque $m \to \infty$, $\int_0^t h_m(s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s \to \int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s$ p.s. (et a fortiori, en probabilité). Par conséquent, il existe $N_2 < \infty$ tel que $m \ge N_2 \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left[\left|\int_0^t h_m(s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\right| \ge \varepsilon\right] \le \varepsilon. \tag{6.24}$$

On *fixe* désormais la valeur $m := N_1 + N_2$. D'après la Proposition 4.4.4, on a, lorsque n tend vers l'infini, la convergence en probabilité suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j} \sum_{i:\, t_j^m < t_i^n \le t_{j+1}^m} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \ &\to\ \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}\left(\langle X\rangle_{t_{j+1}^m} - \langle X\rangle_{t_j^m}\right)\\ &=\ \int_0^t h_m(s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s.\end{aligned}$$

Il existe donc $N_3 < \infty$ tel que pour tout $n \ge N_3$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j} \sum_{i:\, t_j^m < t_i^n \le t_{j+1}^m} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - \int_0^t h_m(s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\right| \ge \varepsilon\right] \le \varepsilon. \tag{6.25}$$

En rassemblant (6.22), (6.23), (6.24) et (6.25), on a, pour tout $n \ge N_3$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 - \int_0^t F''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\right| \ge 3\varepsilon\right] \le 3\varepsilon,$$

ce qui entraîne (6.21). La formule d'Itô est donc prouvée quand $d = 1$.

(ii) Dans le cas où d est quelconque, la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned}F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) \ &=\ \sum_{k=1}^d \frac{\partial F}{\partial x^k}(X_{t_i^n})\,(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k)\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^d f_{n,i}^{k,\ell}(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k)(X_{t_{i+1}^n}^\ell - X_{t_i^n}^\ell),\end{aligned}$$

avec

$$\inf_{x\in I_{i,n}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^\ell}(x) \le f_{n,i}^{k,\ell} \le \sup_{x\in I_{i,n}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^\ell}(x),$$

où $I_{i,n} := [X_{t_i^n}^1, X_{t_{i+1}^n}^1] \times \cdots \times [X_{t_i^n}^d, X_{t_{i+1}^n}^d]$ (bien sûr, il faut remplacer $[X_{t_i^n}^k, X_{t_{i+1}^n}^k]$ par $[X_{t_{i+1}^n}^k, X_{t_i^n}^k]$ si $X_{t_i^n}^k > X_{t_{i+1}^n}^k$).

De nouveau, la proposition 5.4.7 nous donne le résultat cherché pour les termes faisant intervenir les dérivées premières. De plus, avec le même argument que dans la preuve de (6.21), on a, pour chaque couple (k,ℓ) avec $1 \leq k,\ell \leq d$,

$$f_{n,i}^{k,\ell}(X^k_{t^n_{i+1}} - X^k_{t^n_i})(X^\ell_{t^n_{i+1}} - X^\ell_{t^n_i}) \to \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^\ell}(X_s)\,\mathrm{d}\langle X^k, X^\ell\rangle_s, \qquad \text{en probabilité,}$$

ce qui complète la preuve du théorème. □

Remarque 6.1.2. (i) En prenant $F(x,y) = xy$ dans la formule d'Itô, on retrouve la formule d'intégration par parties :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \langle X, Y\rangle_t.$$

(ii) Il est clair que dans la preuve du théorème précédent, on n'a pas besoin que F soit C^2 sur tout $\mathbb{R}^d$. En effet, la formule d'Itô reste valable si (X_t) prend p.s. ses valeurs dans un domaine ouvert convexe $D \subset \mathbb{R}^d$ et si $F:\ D \to \mathbb{R}$ est de classe C^2.

(iii) On écrira de temps en temps la formule d'Itô sous sa forme différentielle

$$\mathrm{d}F(X_t) = F'(X_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\,F''(X_t)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t.$$ □

Exemple 6.1.3. Rappelons qu'un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) issu de 0 est un processus adapté tel que tout $s > 0$, $t \mapsto B_{t+s} - B_s$ soit un mouvement brownien (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) indépendant de $\mathscr{F}_s$. Plus généralement, un processus B à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, si B_0 est $\mathscr{F}_0$-mesurable et si $B_t - B_0$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien issu de 0, indépendant de $\mathscr{F}_0$.

Lorsque $d = 1$, la formule d'Itô nous dit que

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t F'(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\,\mathrm{d}s.$$

En prenant $B_t^1 = t$ et $B_t^2 = B_t$, on a aussi pour toute fonction $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2,

$$F(t, B_t) = F(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(s, B_s)\,\mathrm{d}s.$$

En particulier, si $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, alors $F(t, B_t)$ est une martingale locale. Ceci est le cas par exemple pour $F_1(t,x) := x$, $F_2(t,x) := x^2 - t$ ou $F_3(t,x) := x^3 - 3tx$. Plus généralement, si $H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x^2/2})$ et $H_n(x,t) := t^{n/2} H_n(\frac{x}{t^{1/2}})$ (polynômes d'Hermite "modifiés").

Pour d quelconque, comme $\langle B^i, B^j\rangle = 0$ ($i \neq j$; rappelons que deux martingales locales indépendantes sont nécessairement orthogonales), la formule d'Itô confirme que pour toute fonction $F:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2,

$$F(B_t) = F(B_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(B_s)\,\mathrm{d}B_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta F(B_s)\,\mathrm{d}s.$$

On a une formule analogue pour $F(t, B_t)$. $\square$

6.2. Semimartingales exponentielles

Notre première application de la formule d'Itô est l'étude des semimartingales exponentielles.

Théorème 6.2.1. *Soit X une semimartingale continue. Il existe une unique semimartingale Z telle que*

$$Z_t = \mathrm{e}^{X_0} + \int_0^t Z_s\,\mathrm{d}X_s. \tag{6.26}$$

Cette unique solution est $Z = \mathscr{E}(X)$, où

$$\mathscr{E}(X)_t := \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right). \tag{6.27}$$

Preuve. Soit $\mathscr{E}(X)$ le processus défini dans (6.26). Par la formule d'Itô,

$$\mathrm{d}\mathscr{E}(X)_t = \mathscr{E}(X)_t\,\mathrm{d}X_t - \frac{1}{2}\mathscr{E}(X)_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t + \frac{1}{2}\mathscr{E}(X)_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t = \mathscr{E}(X)_t\,\mathrm{d}X_t.$$

Comme $\mathscr{E}(X)_0 = \mathrm{e}^{X_0}$, on voit que $\mathscr{E}(X)$ est une solution de (6.26).

Pour montrer l'unicité, on pose $Y_t := \exp(-X_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$. Par la formule d'Itô, Y est une semimartingale telle que

$$\mathrm{d}Y_t = -Y_t\,\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}Y_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t + \frac{1}{2}Y_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t = -Y_t\,\mathrm{d}X_t + Y_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t.$$

D'autre part, soit Z une semimartingale vérifiant (6.26), alors par la formule d'intégration par parties (qui est en fait un cas spécial de la formule d'Itô),

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(Y_tZ_t) &= Y_t\,\mathrm{d}Z_t + Z_t\,\mathrm{d}Y_t + \mathrm{d}\langle Y, Z\rangle_t \\ &= Y_tZ_t\,\mathrm{d}X_t - Z_tY_t\,\mathrm{d}X_t + Z_tY_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t - Y_tZ_t\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $Y_tZ_t = Y_0Z_0 = 1$; autrement dit, $Z_t = 1/Y_t = \mathscr{E}(X)_t$. $\square$

Remarque 6.2.2. Comme dans la formule d'Itô, on écrit souvent l'équation (6.26) sous sa forme différentielle (avec la condition initiale $Z_0 = \mathrm{e}^{X_0}$)

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t\,\mathrm{d}X_t.$$ $\square$

Remarque 6.2.3. La preuve du Théorème 6.2.1 a été écrite sous forme différentielle. On remarque que ce qui justifie les passages du genre $\mathrm{d}Y_t = -Y_t \,\mathrm{d}X_t + Y_t \,\mathrm{d}\langle X\rangle_t \Rightarrow Z_t \,\mathrm{d}Y_t = -Z_tY_t \,\mathrm{d}X_t + Z_tY_t \,\mathrm{d}\langle X\rangle_t$ est l'associativité de l'intégrale stochastique et de l'intégrale de Stieltjes. $\square$

Le Théorème 6.2.1 a pour corollaire le résultat suivant. On dit qu'un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale (continue) si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des martingales locales.

Corollaire 6.2.4. *Si M est une martingale locale, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors*

$$\mathscr{E}(\lambda M)_t := \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right),$$

est une martingale locale. Les martingales locales $\mathscr{E}(\lambda M)$ sont appelées les martingales locales exponentielles de M.

6.3. Caractérisation de Lévy du mouvement brownien

On sait que si $(X^1, \cdots, X^d)$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors $\langle X^i,\ X^j\rangle_t = \delta_{ij}\, t$, où $\delta_{ij} := \mathbb{1}_{\{i=j\}}$ est le symbole de Kronecker. Le théorème suivant, dû à Paul Lévy, nous dit que la réciproque est également vraie, ce qui fournit une caractérisation importante et simple du mouvement brownien.

Théorème 6.3.1 (Lévy). *Soient $M^1, \cdots, M^d$ des martingales locales issues de 0 telles que*

$$\langle M^i,\ M^j\rangle_t = \delta_{ij}\, t.$$

Alors $(M^1, \cdots, M^d)$ est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

En particulier, si M est une martingale locale telle que $\langle M\rangle_t = t$ pour tout $t \in [0, T]$, alors M est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien.

Preuve. Fixons $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, et soit $N_t := \xi \cdot M_t = \sum_{j=1}^d \xi_j M_t^j$. Il s'agit d'une martingale locale telle que

$$\langle N\rangle_t = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \xi_j\xi_k \langle M^j,\ M^k\rangle_t = \sum_{j=1}^d \xi_j^2\, t = \|\xi\|^2\, t.$$

D'après le Corollaire 6.2.4, $\mathscr{E}(iN)_t = \exp[i(\xi\cdot M_t) + \frac{\|\xi\|^2}{2} t]$ est une martingale locale (à valeurs dans $\mathbb{C}$). Pour tout $t > 0$, $\sup_{s\in[0,t]} |\mathscr{E}(iN)_s| \le \exp[\frac{\|\xi\|^2}{2} t]$ qui est intégrable. Par la Proposition 4.2.5, $\mathscr{E}(iN)$ est une (vraie) martingale. En particulier, pour $s < t$, $\mathbb{E}[N_t \,|\, \mathscr{F}_s] = N_s$, et donc

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i(\xi\cdot(M_t - M_s))} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}(t-s)\right).$$

Soit $A \in \mathscr{F}_s$. Alors

$$\mathbb{E}\left[\,\mathbb{1}_A\, \mathrm{e}^{i(\xi\cdot(M_t-M_s))}\right] = \mathbb{P}(A)\, \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}(t-s)\right).$$

En prenant $A = \Omega$, on voit que $M_t - M_s$ est un vecteur gaussien centré de covariance $(t-s)\mathrm{Id}$. De plus, fixons $A \in \mathscr{F}_s$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, et notons $\mathbb{P}_A(\cdot) := \mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ la probabilité conditionnelle sachant A. Soit $\mathbb{E}_A$ l'espérance associée à $\mathbb{P}_A$. On voit que

$$\mathbb{E}_A\left[\mathrm{e}^{i(\xi\cdot(M_t-M_s))}\right] = \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2}(t-s)\right),$$

ce qui signifie que la loi conditionnelle de $M_t - M_s$ sachant A est aussi celle du vecteur gaussien centré de covariance $(t-s)\mathrm{Id}$. Cela suffit pour prouver que $(M_{t+s} - M_s)_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\mathscr{F}_s$ et donc que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathscr{F}_t)$-MB selon la définition 3.5.1. □

Exemple 6.3.2. Soit (X, Y) un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de $(0, 0)$, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$X_t^\theta := X_t \cos\theta - Y_t \sin\theta, \qquad Y_t^\theta := X_t \sin\theta + Y_t \cos\theta, \qquad t \geq 0.$$

Alors (X^θ, Y^θ) est de nouveau un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. En effet, X^θ et Y^θ sont des martingales telles que $\langle X^\theta\rangle_t = t = \langle Y^\theta\rangle_t$ et $\langle X^\theta,\ Y^\theta\rangle_t = 0$. Le résultat découle alors du théorème de Lévy.

On peut reformuler ce résultat en interprétant $\mathbb{R}^2$ comme le plan complexe $\mathbb{C}$: on introduit $Z_t := X_t + iY_t$, $t \geq 0$, qui est appelé le mouvement brownien complexe. Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta} Z_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien complexe, voir l'exemple 6.4.10 ci-dessous. □

Exemple 6.3.3. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit $\beta_t := \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}B_s$, où $\mathrm{sgn}(x) := \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}}$ (donc $\mathrm{sgn}(0) = -1$).

Comme $\mathrm{sgn}(B_s)$ est un processus localement borné (il est clair que ce processus est progressif, car composé du processus progressif $(s, \omega) \mapsto B_s(\omega)$ et de l'application borélienne $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$), β_t est bien défini, et est une martingale locale continue. De plus, $\langle\beta\rangle_t = \int_0^t (\mathrm{sgn}(B_s))^2\,\mathrm{d}s = t$. D'après le Théorème 6.3.1 de Lévy, β est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien. Cet exemple sera repris dans les Exemples 7.1.3 et 7.1.8. □

6.4. Théorème de Dubins–Schwarz

Le Théorème de Dubins–Schwarz nous dit que toute martingale locale continue peut s'écrire comme un mouvement brownien "changé de temps". On prouve seulement un cas spécial.

THÉORÈME 6.4.1 (Dubins–Schwarz). *Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ et $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s. Il existe alors un mouvement brownien B tel que*

$$M_t = B_{\langle M\rangle_t}\,.$$

La preuve de ce théorème s'appuie sur le résultat préliminaire suivant.

LEMME 6.4.2. *Soit M une martingale locale telle que $M_0 = 0$. Alors p.s. $t \mapsto M_t$ et $t \mapsto \langle M\rangle_t$ ont les mêmes intervalles de constance.*

Preuve. Soient

$$T_r := \inf\{t > r :\ M_t \neq M_r\}, \qquad S_r := \inf\{t > r :\ \langle M\rangle_t \neq \langle M\rangle_r\}.$$

Il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $T_r = S_r$ p.s.

A cet effet, on remarque que $\mathbb{1}_{]r,T_r]} \cdot M$ est une martingale locale continue issue de 0, dont la variation quadratique vaut $\mathbb{1}_{]r,T_r]} \cdot \langle M\rangle$. Or,

$$(\mathbb{1}_{]r,T_r]} \cdot M)_t = (\mathbb{1}_{[0,T_r]} \cdot M)_t - (\mathbb{1}_{[0,r]} \cdot M)_t = M_{T_r\wedge t} - M_{r\wedge t} = 0,$$

ce qui implique que $\mathbb{1}_{]r,T_r]} \cdot \langle M\rangle = 0$, et donc $T_r \leq S_r$ p.s.

Inversement, considérons la martingale $\mathbb{1}_{]r,S_r]} \cdot M = M^{S_r} - M^r$ qui a pour variation quadratique $\mathbb{1}_{]r,S_r]} \cdot \langle M\rangle$. Cette dernière est identiquement nulle. Donc $M^{S_r} - M^r$ est identiquement nulle. Autrement dit, $S_r \leq T_r$ p.s. $\square$

Preuve du Théorème 6.4.1. Pour tout $r \geq 0$, on définit le temps d'arrêt

$$\tau_r := \inf\left\{t \geq 0 :\ \langle M\rangle_t > r\right\}.$$

L'hypothèse que $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s. assure que p.s., $\tau_r < \infty$ pour tout r. De plus, on voit facilement que la fonction $r \mapsto \tau_r$ est croissante et càdlàg, avec

$$\tau_{r-} := \lim_{s\uparrow\uparrow r} \tau_s = \inf\left\{t \geq 0 :\ \langle M\rangle_t \geq r\right\},$$

si $r > 0$ (il convient de faire un dessin ici). On pose

$$B_r := M_{\tau_r}, \qquad r \geq 0.$$

Le processus B ainsi défini est adapté par rapport à la filtration $\mathscr{G}_r := \mathscr{F}_{\tau_r}$ (rappelons que $H_T\,\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathscr{F}_T$-mesurable si H est progressif et T est un temps d'arrêt, voir le Théorème 3.2.2). On remarque aussi que la nouvelle filtration $(\mathscr{G}_r)$ satisfait les conditions habituelles, car si (τ_n) est une suite de temps d'arrêt qui décroît vers τ, alors $\mathscr{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}$ (voir l'exercice 1-(iv) de la feuille de TD n. 3 ; rappelons que la filtration $(\mathscr{F}_t)$ est continue à droite).

On montre maintenant que B est un processus continu. Il est clair qu'il est càdlàg, car M est continue et $r \mapsto \tau_r$ est càdlàg. Si l'on note $B_{r-} := \lim_{s \uparrow\uparrow r} B_s$, alors $B_{r-} = M_{\tau_{r-}}$. Donc dire que $B_r \neq B_{r-}$ équivaut à dire que $\tau_{r-} < \tau_r$ et $M_{\tau_{r-}} \neq M_{\tau_r}$. Or, si $\tau_{r-} < \tau_r$, comme $\langle M \rangle_{\tau_{r-}} = r = \langle M \rangle_{\tau_r}$, le Lemme 6.4.2 nous confirme que $M_{\tau_{r-}} = M_{\tau_r}$. Par conséquent, les trajectoires de B sont p.s. continues.

On vérifie ensuite que B_t et $B_t^2 - t$ sont des martingales par rapport à la filtration $(\mathscr{G}_r)$. Soient $t > s$. Prenons n tel que $n \geq t > s$. Comme $\langle M^{\tau_n} \rangle_\infty = \langle M \rangle_{\tau_n} = n$, par le Théorème 4.3.5 M^{τ_n} et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle$ sont des (vraies) martingales continues. Or M^{τ_n} est uniformément intégrable puisque bornée dans L^2 ; de plus nous avons comme dans (4.9)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0,t]} (M_s^{\tau_n})^2\right] \leq 4n, \qquad \left|(M_u^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle_u\right| \leq \sup_{s \in [0,t]} (M_s^{\tau_n})^2 + n, \quad u \in [0,t],$$

et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle$ est donc uniformément intégrable. Par le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}\,[\,B_t \,|\, \mathscr{G}_s] = \mathbb{E}\left[\,M_{\tau_t}^{\tau_n} \,|\, \mathscr{F}_{\tau_s}\right] = M_{\tau_s}^{\tau_n} = B_s,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\,B_t^2 - t \,|\, \mathscr{G}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\,(M_{\tau_t}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle_{\tau_t} \,|\, \mathscr{F}_{\tau_s}\right] \\ &= (M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle_{\tau_s} = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

En particulier, B est une $(\mathscr{G}_r)$-martingale continue telle que $\langle B \rangle_t = t$. D'après le Théorème 6.3.1 de Lévy, B est un $(\mathscr{G}_r)$-mouvement brownien.

Par définition de B, on a p.s. pour tout t, $B_{\langle M \rangle_t} = M_{\tau_{\langle M \rangle_t}}$. Comme $\langle M \rangle$ est constant sur l'intervalle $[t,\ \tau_{\langle M \rangle_t}]$ (et vaut $\langle M \rangle_t$ sur cet intervalle), le Lemme 6.4.2 dit que $M_t = M_{\tau_{\langle M \rangle_t}}$, et donc $B_{\langle M \rangle_t} = M_t$. $\square$

Remarque 6.4.3. Dans le Théorème 6.4.1, le mouvement brownien B n'est pas adapté par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$, mais par rapport à la filtration “changée de temps" $(\mathscr{F}_{\tau_t})$. $\square$

Il existe une version multidimensionnelle du Théorème 6.4.1. D'autre part, on peut s'affranchir de la condition $\langle M \rangle_\infty = \infty$ dans le Théorème de Dubins–Schwarz.

Théorème 6.4.4 (Knight). *Soient $M^1, \cdots, M^n$ des martingales locales continues issues de 0 telles que $\langle M^i \rangle_\infty = \infty$ $(\forall\, i)$. Si $\langle M^i,\ M^j \rangle = 0$ $(\forall\, i \neq j)$, alors il existe un mouvement brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout i,*

$$M_t^i = B_{\langle M^i \rangle_t}^i\,.$$

THÉORÈME 6.4.5 (Dubins–Schwarz). *Soit M une martingale locale continue issue de 0. Alors éventuellement sur un espace de probabilité "élargi" (vérifiant les conditions habituelles), on peut definir un mouvement brownien B tel que*

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t} .$$

REMARQUE 6.4.6. Dans le Théorème de Knight, on sait a priori par Dubins–Schwarz que pour chaque i, il existe un mouvement brownien unidimensionnel B^i tel que $M^i_t = B^i_{\langle M^i \rangle_t}$. Le Théorème de Knight consiste donc à dire que ces mouvements browniens $B^1, \cdots, B^d$ sont indépendants. Pour une preuve de ce théorème on peut consulter le Chapitre V du livre de Revuz et Yor (1999). (ii) Pour la signification exacte d'un "élargissement" d'espace de probabilité, et pour la preuve de ces deux théorèmes, on peut consulter le Chapitre V du livre de Revuz et Yor (1999).

(iii) Comme dans le cas unidimensionnel, pour le Théorème de Knight, la condition $\langle M^i \rangle_\infty = \infty$ n'est pas nécessaire. □

EXEMPLE 6.4.7 (points polaires du mouvement brownien plan). Le mouvement brownien B dans $\mathbb{R}$ visite p.s. tous les points de $\mathbb{R}$ infiniment souvent, car p.s. $\limsup_{t \to +\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t \to +\infty} B_t = -\infty$. En dimension supérieure la situation est différente. Remarquons d'abord que si $A \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble mesurable avec mesure de Lebesgue positive, alors $\mathbb{P}(B^{(d)}_t \in A) > 0$ pour tout $t > 0$ car $B^{(d)}_t$ a une densité continue et strictement positive. Si A a mesure de Lebesgue nulle alors $\mathbb{P}(B^{(d)}_t \in A) = 0$ pour tout $t > 0$ mais avec probabilité positive on peut avoir des temps aléatoires où $B^{(d)}_t \in A$; si ce n'est pas le cas, on dit que A est *polaire*. Nous considérons dans cet exemple le cas particulier $A = \{x\}$.

Soit (X, Y) un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de $(0, 0)$. On considère

$$M_t := \mathrm{e}^{X_t} \cos(Y_t), \qquad N_t := \mathrm{e}^{X_t} \sin(Y_t).$$

Par la formule d'Itô (remarquons que $\langle X, Y \rangle = 0$),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_t &= \mathrm{e}^{X_t} \cos(Y_t)\,\mathrm{d}X_t - \mathrm{e}^{X_t} \sin(Y_t)\,\mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_t} \cos(Y_t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{X_t} \cos(Y_t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{X_t} \cos(Y_t)\,\mathrm{d}X_t - \mathrm{e}^{X_t} \sin(Y_t)\,\mathrm{d}Y_t. \end{aligned}$$

Donc M est une martingale dans L^2 continue. De même, N en est une, car

$$\mathrm{d}N_t = \mathrm{e}^{X_t} \sin(Y_t)\,\mathrm{d}X_t + \mathrm{e}^{X_t} \cos(Y_t)\,\mathrm{d}Y_t.$$

Remarquons que $\mathrm{d}\langle M \rangle_t = \mathrm{e}^{2X_t} \cos^2(Y_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{2X_t} \sin^2(Y_t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2X_t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\langle N \rangle_t$. D'où

$$\langle M \rangle_t = \langle N \rangle_t = \int_0^t \mathrm{e}^{2X_s}\,\mathrm{d}s.$$

On montre maintenant que $\langle M\rangle_\infty = \langle N\rangle_\infty = \infty$ p.s. Ceci suit de la propriété de Markov forte de X, en introduisant les temps d'arrêt $\tau_0 := 0$ et $\tau_{k+1} := \inf\{t > \tau_k + 1 : X_t = 0\}$, et en remarquant que les variables aléatoires $J_k := \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \mathrm{e}^{2X_s}\,\mathrm{d}s$ sont i.i.d. ; par la loi des grands nombres l'on obtient alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2X_s}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \mathrm{e}^{2X_s}\,\mathrm{d}s = +\infty \qquad \text{p.s.}$$

On s'intéresse ensuite à $\langle M,\ N\rangle$. Comme

$$\mathrm{d}\langle M,\ N\rangle_t = (\mathrm{e}^{X_t}\cos(Y_t))(\mathrm{e}^{X_t}\sin(Y_t))\,\mathrm{d}t - (\mathrm{e}^{X_t}\sin(Y_t))(\mathrm{e}^{X_t}\cos(Y_t))\,\mathrm{d}t = 0,$$

et donc $\langle M,\ N\rangle = 0$, le Théorème 6.4.4 nous dit qu'il existe un mouvement brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, tel que (remarquons que $M_0 = 1$ et $N_0 = 0$)

$$(M_t - 1,\ N_t) = B_{\langle M\rangle_t},$$

ou alors $(M_t,\ N_t) = B_{\langle M\rangle_t} + (1,0)$. Comme le module euclidien $\|(M_t,\ N_t)\| = \mathrm{e}^{X_t}$ ne s'annule jamais, on conclut que p.s. $B_{\langle M\rangle_t}$ ne visite jamais le point $(-1,0)$. Vu que $t \mapsto \langle M\rangle_t$ est continue, et $\langle M\rangle_\infty = \infty$, on a démontré que p.s. le mouvement brownien B ne visite jamais le point $(-1,0)$.

Par rotation et scaling, pour tout $a \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ fixé, avec probabilité 1, B ne visite jamais le point a. Pour le cas $a = 0$, on a, par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}\left[\exists\, t > 0,\ B_t = 0\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\exists\, t \geq n^{-1},\ B_t = 0\right] = 0.$$

En conclusion, pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(\exists\, t > 0,\ B_t = a) = 0$. On dit que les points sont polaires pour le mouvement brownien planaire B.

A fortiori, si B est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), alors pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}(\exists\, t > 0,\ B_t = a) = 0$.

On aurait pu simplifer la preuve de cet exemple en adoptant l'écriture complexe $M+iN = \mathrm{e}^Z$, avec $Z = X + iY$, voir l'exemple 6.4.10 ci-dessous. □

Exemple 6.4.8 (mouvement brownien dans l'espace). Soit B un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 3$. On a $\lim_{t\to\infty} \|B_t\| = \infty$ p.s., et on dit que B est transient.

Il suffit de démontrer la transience pour $d = 3$, et on suppose sans perte de généralité que $B_0 = a \neq 0$. Considérons la semimartingale continue $X_t := \|B_t\|^2$. Par la formule d'Itô,

$$X_t = X_0 + 2\sum_{i=1}^{3} \int_0^t B_s^i\,\mathrm{d}B_s^i + 3t, \qquad \langle X\rangle_t = 4\int_0^t \sum_{i=1}^{3} (B_s^i)^2\,\mathrm{d}s = 4\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s.$$

Comme X est p.s. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer la formule d'Itô à la fonction $F:\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := x^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{X_t}} &= \frac{1}{\sqrt{X_0}} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^{3/2}}\,\mathrm{d}X_s + \frac{3}{8}\int_0^t \frac{1}{X_s^{5/2}}\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s \\ &= \text{ martingale locale } -\frac{3}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^{3/2}}\,\mathrm{d}s + \frac{3}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^{3/2}}\,\mathrm{d}s \\ &= \text{ martingale locale.}\end{aligned}$$

Autrement dit, $\frac{1}{\|B\|}$ est une martingale locale, positive, issue de $\frac{1}{\|a\|}$. Par la Proposition 4.2.5 toute martingale locale non-négative telle que $M_0 \in L^1$ est une surmartingale. Puisque toute surmartingale positive continue admet une limite finie p.s. (voir Le Gall, Théorème 3.5 page 47), $\frac{1}{\|B_t\|} \to \xi$ quand $t \to +\infty$, qui d'après Fatou donne $\mathbb{E}(\xi) \le \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}(\frac{1}{\|B_t\|})$.

Or, si $N := (N^1, N^2, N^3)$ désigne la loi gaussienne standard à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, alors $\mathbb{E}(\frac{1}{\|B_t\|}) = \mathbb{E}(\frac{1}{\|a+\sqrt{t}\,N\|})$. Par rotation, on peut supposer que $a = (\|a\|, 0, 0)$, alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|a+\sqrt{t}\,N\|}\right) \le \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{(N^2)^2+(N^3)^2}}\right) \to 0, \qquad t\to\infty.$$

(En général, $\mathbb{E}(\frac{1}{\|N\|^q}) < \infty \Leftrightarrow q < d$.) Donc $\xi = 0$ p.s., c'est-à-dire $\|B_t\| \to \infty$ p.s.

On remarquera que $\frac{1}{\|B\|}$ est une martingale locale uniformément intégrable [1], qui n'est pas une martingale. □

Exemple 6.4.9. Soit $B = (B^1, \cdots, B^d)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \ge 2$), issu de $x \neq 0$. Par la formule d'Itô, $\mathrm{d}(\|B_t\|^2) = 2\sum_{i=1}^d B_t^i\,\mathrm{d}B_t^i + d\,\mathrm{d}t$. Soit $F:\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Comme p.s. $\|B_t\|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout t, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(\|B_t\|^2) &= F'(\|B_t\|^2)\,\mathrm{d}(\|B_t\|^2) + \frac{1}{2}F''(\|B_t\|^2)\,\mathrm{d}\langle\|B_t\|^2\rangle_t \\ &= F'(\|B_t\|^2)2\sum_{i=1}^d B_t^i\,\mathrm{d}B_t^i + \big(dF'(\|B_t\|^2) + 2F''(\|B_t\|^2)\|B_t\|^2\big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le terme à variation finie s'annule dans le points y tels que $F'(y) + \frac{2}{d}\,yF''(y) = 0$; remarquons que cette équation est satisfaite par $F(y) := \log(y)$ ($d = 2$) et par $F(y) := y^{1-(d/2)}$.

Soient $0 < r < \|x\| < R$. Pour $a = r$ ou R, on pose

$$T_a := \inf\{t \ge 0 :\ \|B_t\| = a\}.$$

On étudie d'abord la dimension $d = 2$. Soit $F:\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $F(y) = \log y$ pour tout $y > 0$. Alors $t \mapsto F(\|B_{t\wedge T_r\wedge T_R}\|) = \log\|B_{t\wedge T_r\wedge T_R}\|$ est une martingale locale continue bornée.

1. Car $\sup_t \mathbb{E}(\frac{1}{\|B_t\|^{1+\varepsilon}}) < \infty$ pour $\varepsilon \in]0, 1[$.

Par le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}[\log\|B_{T_r\wedge T_R}\|] = \log\|x\|$. (Remarquons que $T_R < \infty$ p.s., car $\limsup_{t\to\infty}\|B_t\| \geq \limsup_{t\to\infty}|B_t^1| = \infty$ p.s.) Donc

$$\begin{aligned}\log\|x\| &= (\log r)\,\mathbb{P}[T_r < T_R] + (\log R)\,\mathbb{P}[T_r > T_R]\\ &= (\log r - \log R)\,\mathbb{P}[T_r < T_R] + \log R,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\mathbb{P}[T_r < T_R] = \frac{\log R - \log\|x\|}{\log R - \log r}, \qquad \mathbb{P}[T_R < T_r] = \frac{\log\|x\| - \log r}{\log R - \log r}.$$

En faisant $R \to \infty$, et comme $T_R \to \infty$, on obtient $\mathbb{P}[T_r < \infty] = 1$ pour tout $r > 0$. Donc pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ et tout voisinage V_a, le mouvement brownien plan visite p.s. V_a infiniment souvent.

Si $d \geq 3$, soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $F(y) = y^{2-d}$ pour tout $y \geq 0$. Alors $F(\|B_{t\wedge T_r\wedge T_R}\|) = \|B_{t\wedge T_r\wedge T_R}\|^{2-d}$ est une martingale continue bornée. Par le théorème d'arrêt

$$\|x\|^{2-d} = \mathbb{E}[\,\|B_{T_r\wedge T_R}\|^{2-d}\,].$$

Donc

$$\mathbb{P}[T_r < T_R] = \frac{\|x\|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}, \qquad \mathbb{P}[T_R < T_r] = \frac{r^{2-d} - \|x\|^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}.$$

En particulier, en faisant $R \to \infty$, on obtient

$$\mathbb{P}[T_r < \infty] = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{d-2},$$

ce qui est en accordance avec la transience de B. □

Exemple 6.4.10 (le mouvement brownien complexe). Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (c'est-à-dire dérivable au sens complexe en tout point de $\mathbb{C}$). Rappelons que $h = f + ig$ holomorphe revient à dire que (équations de Cauchy–Riemann)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x},$$

et on a $\Delta f = \Delta g = 0$. De plus, $h'(z) = \frac{1}{2}(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}) = \frac{\partial h}{\partial x}$.

Soit $Z = X + iY$ un mouvement brownien complexe (on identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$) issu de $Z_0 \in \mathbb{C}$. Alors par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(Z_t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(Z_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{\partial f}{\partial y}(Z_t)\,\mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}(\Delta f)(Z_t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(Z_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{\partial f}{\partial y}(Z_t)\,\mathrm{d}Y_t,\end{aligned}$$

et de même $\mathrm{d}g(Z_t) = \frac{\partial g}{\partial x}(Z_t)\,\mathrm{d}X_t + \frac{\partial g}{\partial y}(Z_t)\,\mathrm{d}Y_t$. (On écrit formellement $\mathrm{d}h(Z_t) = h'(Z_t)\,\mathrm{d}Z_t$.) Donc $h(Z_t)$ est une martingale continue. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\langle f(Z)\rangle_t &= \mathrm{d}\langle g(Z)\rangle_t = \left[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 \right] (Z_t)\,\mathrm{d}t = |h'(Z_t)|^2\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}\langle f(Z), g(Z)\rangle_t &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} \right] (Z_t)\,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

Par le Théorème 6.4.4 il existe un mouvement brownien planaire $B = (B^1, B^2)$ tel que $h(Z) = B_{\langle f(Z)\rangle}$. Cette propriété s'appelle *invariance conforme* du brownien complexe.

Exemple 6.4.11 (représentation skew-product du mouvement brownien plan). Dans les notations de l'Exemple 6.4.10, on prend maintenant $h(z) := \mathrm{e}^z$. Alors $\langle f(Z)\rangle_t = \int_0^t \mathrm{e}^{2X_s}\,\mathrm{d}s =: A_t$, et on sait que $\langle f(Z)\rangle_\infty = \infty$ p.s. par un argument qui se trouve dans l'Exemple 6.4.7. D'après le Théorème 6.4.4, il existe un mouvement brownien complexe $B = B^1 + iB^2$ issu de 1, tel que $\mathrm{e}^{Z_t} = B_{A_t}$. Soit $C_t = A_t^{-1}$. Alors

$$B_t^1 + iB_t^2 = \exp(Z_{C_t}) = \exp(X_{C_t} + iY_{C_t}) = R_t \exp(i\theta_t),$$

où nous obtenons ainsi respectivement la *partie radiale* et le *nombre de tours* de (B^1, B^2) :

$$R_t := |B_t^1 + iB_t^2| = \mathrm{e}^{X_{C_t}}, \qquad \theta_t := Y_{C_t}.$$

On écrit maintenant C_t en termes de B^1 et de B^2. Comme $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une bijection de classe C^1 avec dérivée $\dot{A}_t = \mathrm{e}^{2X_t} > 0$, son inverse C est dérivable avec dérivée

$$\dot{C}_t = \frac{1}{\dot{A}_{C_t}} = \mathrm{e}^{-2X_{C_t}} = \frac{1}{R_t^2},$$

c'est-à-dire

$$C_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{R_s^2}, \qquad t \geq 0.$$

Nous obtenons donc la **représentation skew-product** du mouvement brownien plan : soit $B = (B^1, B^2)$ un mouvement brownien plan issu de $(1, 0)$, et soient R et θ sa partie radiale et son nombre de tours, respectivement. Alors il existe un mouvement brownien plan (X, Y) issu de $(0, 0)$, tel que

$$R_t = \exp(X_{C_t}), \qquad \theta_t = Y_{C_t},$$

où

$$C_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{R_s^2} = \inf\left\{ s \geq 0 : \int_0^s \mathrm{e}^{2X_u}\,\mathrm{d}u > t \right\}.$$

On remarque que le processus $(C_t)_{t\geq 0}$ est indépendant du mouvement brownien Y. □

6.5. Théorème de Girsanov

On considère comme précédemment dans ce chapitre, un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. Notre objectif est d'étudier comment les notions de martingales/semimartingales se transforment lorsque l'on remplace la probabilité $\mathbb{P}$ par une probabilité $\mathbb{Q}$ qui est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$.

LEMME 6.5.1. *Supposons que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_\infty$. Pour tout $0 \le t \le \infty$, soit*

$$D_t := \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}_{|\mathscr{F}_t},$$

la dérivée Radon–Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathscr{F}_t$. Le processus D est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale uniformément intégrable.

Preuve. Soit $A \in \mathscr{F}_t$. On a

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A\, \mathbb{E}(D_\infty \,|\, \mathscr{F}_t)].$$

Par unicité de la dérivée de Radon–Nikodym sur $\mathscr{F}_t$, on obtient :

$$D_t = \mathbb{E}(D_\infty \,|\, \mathscr{F}_t).$$

Donc D est une martingale uniformément intégrable, fermée par D_∞. $\square$

LEMME 6.5.2. *Soit D la martingale du Lemme précédent ; nous supposons que D est p.s. continue.*

(i) Si T est un temps d'arrêt, alors

$$D_T = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}_{|\mathscr{F}_T}.$$

(ii) Si en plus $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_\infty$, alors p.s. pour tout $t \ge 0$, $D_t > 0$.

Preuve. (i) Pour tout $A \in \mathscr{F}_T$, on a,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A\, \mathbb{E}(D_\infty \,|\, \mathscr{F}_T)].$$

qui vaut $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A\, D_T]$ par le théorème d'arrêt. Puisque D_T est $\mathscr{F}_T$-mesurable, on obtient :

$$D_T = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}_{|\mathscr{F}_T}.$$

(ii) Considérons le temps d'arrêt $S := \inf\{t \ge 0 : \ D_t = 0\}$. Par continuité à droite, $D_S = 0$ p.s. sur $\{S < \infty\}$. Soit $A := \{S < \infty\} \in \mathscr{F}_S$. Alors $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A\, D_S] = 0$, et donc $\mathbb{P}(A) = 0$. $\square$

LEMME 6.5.3. *Soit D une martingale locale continue, strictement positive. Il existe alors une unique martingale locale continue L, telle que*

$$D_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right) = \mathscr{E}(L)_t.$$

De plus, L est donnée par la formule

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{\mathrm{d}D_s}{D_s}.$$

Preuve. (Unicité) Soit $\widetilde{L}$ une martingale locale continue telle que $\mathscr{E}(\widetilde{L}) = \mathscr{E}(L)$. Alors $L - \widetilde{L} = \frac{\langle L\rangle - \langle\widetilde{L}\rangle}{2}$. Il découle que $L - \widetilde{L}$ est une martingale locale continue issue de 0 (car $L_0 = \widetilde{L}_0 = \log D_0$), qui est à variation finie. Par le Théorème 4.2.7, $L = \widetilde{L}$.

(Existence) Soit $L_t := \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1}\,\mathrm{d}D_s$, qui est une martingale locale continue. Comme D est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer la formule d'Itô à $F(D_t)$, où $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \log x$. Il en découle que

$$\log D_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{\mathrm{d}D_s}{D_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\langle D\rangle_s}{D_s^2} = L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t.$$

Autrement dit, $D = \mathscr{E}(L)$. □

THÉORÈME 6.5.4 (Girsanov). *Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_\infty$. Soit D la martingale associée à $\mathbb{Q}$ définie dans le Lemme 6.5.1. On suppose que D est continue. Soit L la martingale locale continue telle que $D = \mathscr{E}(L)$. Alors pour toute $\mathbb{P}$-martingale locale continue M, le processus*

$$\widetilde{M} := M - \langle M,\ L\rangle$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale locale continue.

Preuve. Soit T un temps d'arrêt, et soit X un processus continu adapté avec $X_0 = 0$. On montre d'abord que si $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale, alors X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale.

En effet, d'après le Lemme 6.5.2, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,|X_{T\wedge t}|\,] = \mathbb{E}[\,|X_{T\wedge t}D_{T\wedge t}|\,] < \infty$, donc $X_t^T \in L^1(\mathbb{Q})$ pour tout t. Soient $s < t$ et $A \in \mathscr{F}_s$. Puisque $(XD)^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale et $A \cap \{T > s\} \in \mathscr{F}_s$,

$$\mathbb{E}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}\,] = \mathbb{E}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge s} D_{T\wedge s}\,].$$

D'après le Lemme 6.5.2, $D_{T\wedge t} = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}_{|\mathscr{F}_{T\wedge t}}$ et $D_{T\wedge s} = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}_{|\mathscr{F}_{T\wedge s}}$. D'autre part, $A \cap \{T > s\} \in \mathscr{F}_{T\wedge s} \subset \mathscr{F}_{T\wedge t}$. Donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge t}\,] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T>s\}} X_{T\wedge s}\,].$$

Or, on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}} X_{T\wedge t}\,] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}} X_T\,] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_{A\cap\{T\le s\}} X_{T\wedge s}\,]$, ce qui implique que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_A X_{T\wedge t}\,] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathbf{1}_A X_{T\wedge s}\,]$. Par conséquent, X^T est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Comme conséquence immédiate de ce que l'on a démontré, on voit que

$$XD \text{ une } \mathbb{P}\text{-martingale locale } \Rightarrow X \text{ une } \mathbb{Q}\text{-martingale locale.} \tag{6.28}$$

Soit maintenant M une $\mathbb{P}$-martingale locale continue, et soit $\widetilde{M} := M - \langle M,\ L\rangle$. Par la formule d'Itô (ou plus précisément, par la formule d'intégration par parties)

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_t D_t &= \int_0^t \widetilde{M}_s \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}\widetilde{M}_s + \langle \widetilde{M}, D\rangle_t \\
&= \int_0^t \widetilde{M}_s \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s - \int_0^t D_s \,\mathrm{d}\langle M, L\rangle_s + \langle M, D\rangle_t \\
&= \int_0^t \widetilde{M}_s \,\mathrm{d}D_s + \int_0^t D_s \,\mathrm{d}M_s,
\end{aligned}$$

car $\mathrm{d}\langle M, L\rangle_s = D_s^{-1}\,\mathrm{d}\langle M, D\rangle_s$ par le Lemme 6.5.3. Donc $(\widetilde{M}_t D_t)$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. Par (6.28), $(\widetilde{M}_t)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. □

Remarque 6.5.5. (i) Un résultat établi p.s. ou en probabilité sous $\mathbb{P}$ reste vraie sous $\mathbb{Q}$. Par exemple, la variation quadratique de $\widetilde{M}$ sous $\mathbb{Q}$ est égale à $\langle M\rangle$. Dans la remarque (iii) suivante, on montre que les intégrales stochastiques sont aussi les mêmes sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$.

(ii) Le Théorème de Girsanov nous confirme qu'une $\mathbb{P}$-semimartingale reste une $\mathbb{Q}$-semimartingale (et réciproquement, car $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ sont supposées équivalentes), et on a la décomposition canonique : si $X = X_0 + M + V$ est une $\mathbb{P}$-semimartingale, alors $X = X_0 + \widetilde{M} + \widetilde{V}$, avec $\widetilde{V} := V + \langle M, L\rangle$, est la décomposition canonique de X en tant que $\mathbb{Q}$-semimartingale.

Réciproquement, la décomposition canonique d'une $\mathbb{Q}$-semimartingale en tant que $\mathbb{P}$-semimartingale est aussi explicite. En effet, comme L est une $\mathbb{P}$-martingale locale, le Théorème de Girsanov dit que $\widetilde{L} := L - \langle L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale, telle que $\langle \widetilde{L}\rangle = \langle L\rangle$. Donc on peut considérer la $\mathbb{Q}$-martingale locale exponentielle $\mathscr{E}(-\widetilde{L})_t = \exp(-\widetilde{L}_t - \frac{1}{2}\langle \widetilde{L}\rangle_t) = \exp(-L_t + \frac{1}{2}\langle L\rangle_t) = \frac{1}{\mathscr{E}(L)_t}$. Par conséquent, $\mathbb{P} = \mathscr{E}(-\widetilde{L})_\infty \bullet \mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_\infty$. En particulier, en appliquant le Théorème de Girsanov (en échangeant les rôles de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$), si $\widetilde{N}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale continue, alors $N := \widetilde{N} - \langle \widetilde{N},\ -\widetilde{L}\rangle$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. Comme $\langle \widetilde{N},\ -\widetilde{L}\rangle = -\langle \widetilde{N},\ L\rangle$, on a $N := \widetilde{N} + \langle \widetilde{N},\ L\rangle$.

En conclusion, M est une $\mathbb{P}$-martingale locale si et seulement si $M - \langle M,\ L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.

(iii) Montrons maintenant que les intégrales stochastiques sont les mêmes sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$. Soit H un processus (progressif) localement borné, et soit M une $\mathbb{P}$-martingale locale issue de 0. On écrit $(H\cdot M)^{\mathbb{P}}$ et $(H\cdot M)^{\mathbb{Q}}$ pour les intégrales sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$, respectivement. Soit $\widetilde{M} := M - \langle M, L\rangle$, qui est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. On écrit $(H\cdot M)^{\mathbb{Q}} = (H\cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}} + H\cdot \langle M, L\rangle$, et $(H \cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. D'après (ii), $(H \cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}} + \langle (H \cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}},\ L\rangle$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. Par définition, $(H \cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale telle que pour toute semimartingale N, $\langle (H \cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}},\ N\rangle = H \cdot \langle \widetilde{M},\ N\rangle = H \cdot \langle M,\ N\rangle$. Donc $\langle (H \cdot \widetilde{M})^{\mathbb{Q}},\ L\rangle = H \cdot \langle M,\ L\rangle$, ce qui implique que $(H \cdot M)^{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. On a vu que pour toute $\mathbb{P}$-martingale locale N, $\langle (H \cdot M)^{\mathbb{Q}},\ N\rangle = H \cdot \langle M,\ N\rangle$. D'où : $(H \cdot M)^{\mathbb{Q}} = (H \cdot M)^{\mathbb{P}}$.

(iv) On utilise très souvent la version de Girsanov "à horizon fini", c'est-à-dire sur l'intervalle de temps $[0, t]$ fixé. En effet, la filtration sera $(\mathscr{F}_s,\ s \in [0, t])$ au lieu de $(\mathscr{F}_s,\ s \in \mathbb{R}_+)$, qui vérifie les conditions habituelles (attention, l'hypothèse de complétion signifie que chaque tribu $\mathscr{F}_s$ contient les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}_t$). Si $\mathbb{Q}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_t$, on définit la martingale $(D_s,\ s \in [0, t])$ (donc $D_t := \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ jouera le rôle de D_∞), et si D a une modification continue, alors on peut définir la martingale locale $(L_s,\ s \in [0, t])$ telle que $D_s = \exp(L_s - \frac{1}{2}\langle L\rangle_s)$, $s \in [0, t]$. L'analogue du théorème reste alors vraie.

(v) Si $M = B$ est un $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$-mouvement brownien, alors $\widetilde{B} := B - \langle B, L\rangle$ est une $(\mathscr{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale continue, telle que $\langle \widetilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t = t$. Le Théorème 6.3.1 de Lévy nous dit alors que $\widetilde{B}$ est un $(\mathscr{F}_t, \mathbb{Q})$-mouvement brownien.

(vi) En pratique, on se sert du Théorème de Girsanov pour éliminer le drift qui nous ennuie. Voir les Exemples 6.5.13 et 6.5.15. □

Si l'on regarde la preuve du Théorème de Girsanov de plus près, on se rend compte que la condition $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sert seulement à assurer à ce que D soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc on peut énoncer la version suivante du Théorème de Girsanov sans que la probabilité $\mathbb{Q}$ soit nécessairement équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_\infty$ (c'est le cas sur chacune des tribus $\mathscr{F}_t$, en revanche).

Théorème 6.5.6 (Girsanov). *Soit $(D_t,\ t \geq 0)$ une martingale continue uniformément intégrable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\mathbb{E}(D_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. Soit L la martingale locale continue telle que $D = \mathscr{E}(L)$. Posons $\mathbb{Q} := D_\infty \bullet \mathbb{P}$. Alors pour toute $\mathbb{P}$-martingale locale continue M, le processus*

$$\widetilde{M} := M - \langle M,\ L\rangle$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale locale continue.

Remarque 6.5.7. On insiste sur le fait que dans le Théorème 6.5.6, $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_\infty$, et est équivalente à $\mathbb{P}$ sur toute $\mathscr{F}_t$, $t \geq 0$.

Remarque 6.5.8. Dans la plupart des applications du Théorème 6.5.6, on part d'une martingale locale continue L issue de 0, alors la probabilité $\mathbb{Q} := \mathscr{E}(L)_\infty \bullet \mathbb{P}$ est bien définie si $\mathscr{E}(L)$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable. Or, $\mathscr{E}(L)$ étant une martingale locale continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et issue de 1, elle est une surmartingale par la Proposition

4.2.5. Par le Théorème 3.5 à page 47 du livre de Le Gall, toute surmartingale positive et continue à droite admet p.s. une limite (finie). Notons $\mathscr{E}(L)_\infty := \lim_{t\to\infty} \mathscr{E}(L)_t$. Par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] \le 1$. *Supposons* que l'on a

$$\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] = 1, \tag{6.29}$$

alors d'après le Lemme 6.5.10 suivant, $\mathscr{E}(L)$ est une (vraie) martingale continue uniformément intégrable. On sera alors parfaitement dans le cadre du Théorème 6.5.6.

La condition (6.29) a donc une importance capitale. Le théorème suivant donne deux conditions suffisantes pour assurer (6.29). □

THÉORÈME 6.5.9. *Soit L une martingale locale continue, issue de 0. Considérons les propriétés suivantes :*

(i) $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}] < \infty$;

(ii) L est une martingale uniformément intégrable, et $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty}] < \infty$;

(iii) $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] = 1$ (donc $\mathscr{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable).

Alors (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

La preuve du Théorème 6.5.9 se trouve à la fin de la section. On montre d'abord que sous (6.29), $\mathscr{E}(L)$ est une (vraie) martingale continue uniformément intégrable.

LEMME 6.5.10. *Soit D une surmartingale positive continue, issue de 1. Si $\mathbb{E}[D_\infty] = 1$, alors D est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Soit $t \ge 0$. Comme $D_0 = 1$, on a $\mathbb{E}[D_t] \le \mathbb{E}[D_0] = 1$. D'autre part, d'après le lemme 4.2.4 de Fatou (version conditionnelle), $\mathbb{E}[D_\infty \,|\, \mathscr{F}_t] \le D_t$ p.s. En prenant l'espérance dans les deux côtés de cette inégalité, on obtient $1 = \mathbb{E}[D_\infty] \le \mathbb{E}[D_t] \le 1$. Par conséquent, $\mathbb{E}[D_t] = 1$ et $\mathbb{E}[D_\infty \,|\, \mathscr{F}_t] = D_t$ p.s. □

EXEMPLE 6.5.11. Soit M une $\mathbb{P}$-martingale locale continue, et soit $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$. On pose

$$L_t := \int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s, \qquad t \ge 0,$$

Donc $\mathscr{E}(L)_t = \exp(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s)$. Si $\mathbb{E}\,[\mathscr{E}(L)_\infty] = 1$, alors en posant $\mathbb{Q} := \mathscr{E}(L)_\infty \bullet \mathbb{P}$, le Théorème de Girsanov dit que

$$X_t := M_t - \int_0^t H_s \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s, \qquad t \ge 0,$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. □

Exemple 6.5.12. *[formule de Cameron–Martin]* On se met dans l'espace canonique $\Omega := C([0,T],\mathbb{R})$, muni de la mesure de Wiener $\mathbb{W}$. Soit $(X_t,\ t\in[0,T])$ le processus canonique. (Donc sous $\mathbb{W}$, X est un mouvement brownien standard défini sur $[0,T]$.) Soit $h\in L^2([0,T])$ (donc $h\in L^2_T(X)$). On pose $L_t := \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}X_s$, $t\in[0,T]$.

Puisque $\langle L\rangle_T = \int_0^T h^2(s)\,\mathrm{d}s$ qui est une constante finie, le Théorème 6.5.9 nous guarantit que $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_T]=1$. Comme $\mathscr{E}(L)_T>0$, en posant

$$\mathbb{Q} := \exp\left(\int_0^T h(s)\,\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)\,\mathrm{d}s\right)\bullet\mathbb{W}, \qquad \text{sur } \mathscr{F}_T,$$

le Théorème de Girsanov nous dit que

$$X_t - \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t\in[0,T],$$

est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Puisque $(X_t, t\in[0,T])$ sous $\mathbb{W}$ est aussi un MB, nous obtenons que pour toute fonction mesurable bornée $\Phi : C([0,T])\to\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(\Phi\left(X_t+\int_0^t h_s\,\mathrm{d}s,\ t\in[0,T]\right)\right) = \mathbb{E}\left(\Phi\left(X_t,\ t\in[0,T]\right)\mathscr{E}(L)_T\right)$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance par rapport à $\mathbb{W}$. Autrement dit, la loi de $\left(X_t+\int_0^t h_s\,\mathrm{d}s,\ t\in[0,T]\right)$ sous $\mathbb{W}$ est $\mathbb{Q}$.

En particulier, si $h(x)=\gamma\in\mathbb{R}$, $\forall\, x\in[0,T]$, alors $\mathbb{Q}=\mathrm{e}^{\gamma X_T-\frac{\gamma^2}{2}T}\bullet\mathbb{W}$, et $(X_t-\gamma t,\ t\in[0,T])$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. □

Exemple 6.5.13. La formule de Cameron–Martin évoquée dans l'exemple précédent permet souvent de traiter le processus $X_t+\gamma t$ (mouvement brownien avec drift). Dans cet exemple, on s'intéresse à la loi de $\sup_{t\in[0,1]}(X_t+\gamma t)$, où $\gamma\in\mathbb{R}_*$ est un réel non-nul.

On se met dans l'espace canonique avec $T=1$, et soit $\mathbb{Q}=\mathrm{e}^{\gamma X_1-\frac{\gamma^2}{2}}\bullet\mathbb{W}$ (sur $\mathscr{F}_1$) comme dans l'exemple précédent. Sous $\mathbb{Q}$, X est un mouvement brownien avec drift γ. Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left(\sup_{t\in[0,1]} X_t<x\right) &= \mathbb{W}\left[\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,1]}X_t<x\}}\mathrm{e}^{\gamma X_1-\frac{\gamma^2}{2}}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,1]}B_t<x\}}\mathrm{e}^{\gamma B_1-\frac{\gamma^2}{2}}\right]\end{aligned} \tag{6.30}$$

où B est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$. (Par abus de notation, on écrit $\mathbb{W}$ à la place de l'espérance associée à $\mathbb{W}$.) On note $S_1 := \sup_{t\in[0,1]}X_t$, et on rappelle la densité conjointe de (S_1,X_1) que l'on a déterminée dans le Corollaire 2.4.9 :

$$f_{S_1,X_1}(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2}\right)\mathbf{1}_{\{a>0,\ b<a\}}.$$

Donc la probabilité dans (6.30) vaut

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\mathrm{e}^{-\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{d}a \int_{-\infty}^a \mathrm{d}b\,(2a-b)\exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2}+\gamma b\right) \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \mathrm{d}b \int_{b^+}^x \mathrm{d}a\,(2a-b)\exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2}+\gamma b\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \mathrm{d}b \int_{2b^+-b}^{2x-b} \mathrm{d}y\, y\exp\left(-\frac{y^2}{2}+\gamma b\right),
\end{aligned}$$

avec un changement de variables $y := 2a - b$. En remarquant que $2b^+ - b = |b|$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}(X_t+\gamma t) < x\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \mathrm{d}b\, \mathrm{e}^{\gamma b}\left[\mathrm{e}^{-b^2/2} - \mathrm{e}^{-(2x-b)^2/2}\right]. \qquad \square$$

Remarque 6.5.14. Il est possible d'obtenir (6.30) sous une autre écriture. En effet, soit $\mathbb{Q} = \mathrm{e}^{-\gamma X_1 - \frac{\gamma^2}{2}} \bullet \mathbb{W}$ sur $\mathscr{F}_1$, alors $X_t + \gamma t$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}\left(\sup_{t\in[0,1]}(X_t+\gamma t) < x\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,1]}(X_t+\gamma t)<x\}}\mathrm{e}^{\gamma X_1+\frac{\gamma^2}{2}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,1]} B_t<x\}}\mathrm{e}^{\gamma B_1-\frac{\gamma^2}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Ceci équivaut à (6.30). $\square$

Exemple 6.5.15 (formule de Cameron–Martin, suite). On travaille dans l'espace canonique $\Omega := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de la mesure de Wiener $\mathbb{W}$.

Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\forall\, t$, $\int_0^t h^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$. On pose $L_t := \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}X_s$. D'après le Théorème 6.5.9, $\mathscr{E}(L)$ est une (vraie) martingale continue.

Soit $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilités sur $\mathscr{F}_\infty$ définies comme la loi de $(X_t + \int_0^t h_s\,\mathrm{d}s)_{t\ge 0}$ sous $\mathbb{W}$. Par l'Exemple 6.5.12, pour tout $T \ge 0$ nous avons que $\mathbb{Q}_{|\mathscr{F}_T} = \mathscr{E}(L)_T \bullet \mathbb{W}_{|\mathscr{F}_T}$. Attention, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{W}$ ne sont pas nécessairement équivalentes sur $\mathscr{F}_\infty$. Le Théorème de Girsanov nous dit que $(X_t - \int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u, t \ge 0)$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

En particulier, si $h(t) = \gamma \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{Q}_{|\mathscr{F}_T} = \mathrm{e}^{\gamma X_T - \frac{\gamma^2}{2}T} \bullet \mathbb{W}_{|\mathscr{F}_T}$. Le processus $(X_t - \gamma t)_{t\ge 0}$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien, et X sous $\mathbb{Q}$ est un mouvement brownien avec drift γ.

On s'intéresse à $\tau_a := \inf\{t \ge 0 : X_t = a\}$ quand $h(t) = \gamma$. Pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{Q}[\tau_a \le t] = \mathbb{W}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_a\le t\}}\mathrm{e}^{\gamma X_t - \frac{\gamma^2}{2}t}\right] = \mathbb{W}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_a\le t\}}\mathbb{W}\left(\mathrm{e}^{\gamma X_t-\frac{\gamma^2}{2}t}\,\middle|\,\mathscr{F}_{\tau_a\wedge t}\right)\right].$$

Comme $(\mathrm{e}^{\gamma X_s - \frac{\gamma^2}{2}s},\ s \geq 0)$ est une (vraie) $\mathbb{W}$-martingale, le théorème d'arrêt (pour les temps d'arrêt bornés) nous dit alors que

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[\tau_a \leq t] &= \mathbb{W}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathrm{e}^{\gamma X_{\tau_a \wedge t} - \frac{\gamma^2}{2}(\tau_a \wedge t)}\right] \\ &= \mathbb{W}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathrm{e}^{\gamma a - \frac{\gamma^2}{2}\tau_a}\right] \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{\gamma a - \frac{\gamma^2}{2}s}\, \mathbb{W}[\tau_a \in \mathrm{d}s]. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Or, on a vu dans l'Exemple 2.4.10 que sous $\mathbb{W}$, τ_a a la même loi que $\frac{a^2}{X_1^2}$, et que la densité vaut $f_{\tau_a}(s) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{a^2}{2s})\, \mathbf{1}_{\{s>0\}}$. Donc

$$\mathbb{Q}[\tau_a \leq t] = \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(\gamma a - \frac{\gamma^2 s}{2} - \frac{a^2}{2s}\right) \mathrm{d}s.$$

On écrit maintenant tout pour le mouvement brownien avec drift $X_t + \gamma t$: la variable aléatoire $\tau_a^{(\gamma)} := \inf\{t \geq 0 :\ X_t + \gamma t = a\}$ a pour densité

$$\mathbb{P}\left(\tau_a^{(\gamma)} \in \mathrm{d}t\right) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a-\gamma t)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t>0\}}\, \mathrm{d}t. \tag{6.32}$$

En faisant $t \to \infty$ dans (6.31), on obtient

$$\mathbb{P}\left(\tau_a^{(\gamma)} < \infty\right) = \mathbb{W}\left[\mathrm{e}^{\gamma a - \frac{\gamma^2}{2}\tau_a}\right] = \mathrm{e}^{\gamma a - |\gamma a|},$$

où la dernière identité provient de l'Exemple 3.5.4. Par conséquent, le mouvement brownien avec drift $X_t + \gamma t$ $(\gamma \neq 0)$ atteint le niveau a $(a \neq 0)$ avec probabilité 1 si et seulement si a et γ sont de même signe. Dans le cas contraire, la probabilité en question vaut $\mathrm{e}^{2\gamma a}$, ce que l'on a vu dans un TD il y a quelque temps.

Si $\gamma a > 0$, la loi de probabilité dans (6.32) porte dans la littérature le nom de la loi gaussienne inverse. □

On termine la section avec la preuve du Théorème 6.5.9.

Preuve du Théorème 6.5.9.

(i) $\Rightarrow$ (ii) [théorème de Novikov, modifié] Supposons $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}] < \infty$. A fortiori, $\langle L\rangle_\infty$ est intégrable. Ceci implique que L est une (vraie) martingale continue bornée dans L^2, donc uniformément intégrable. On écrit $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty} = \sqrt{\mathscr{E}(L)_\infty}\, \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}}$, et on obtient, à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que

$$\mathbb{E}[\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty}\,] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right]}\, \sqrt{\mathbb{E}[\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}\,]}.$$

Par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_\infty\right] \leq 1$. D'autre part, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}] < \infty$. D'où $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty}] < \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) [Théorème de Kazamaki, modifié] On suppose maintenant que L est une martingale uniformément intégrable telle que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty}] < \infty$. Dans ce cas, pour tout temps d'arrêt T, $L_T = \mathbb{E}[L_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]$, et par l'inégalité de Jensen (version conditionnelle),

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_T} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathbb{E}[L_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]} \le \mathbb{E}[\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty} \,|\, \mathscr{F}_T\,].$$

Donc la famille de variables $\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_T},\ T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable.

Soit maintenant $a \in \,]0,1[\,$, et soit $Z_t := \mathrm{e}^{\frac{a}{1+a}L_t}$. Alors

$$\mathscr{E}(aL)_t = \mathrm{e}^{aL_t - \frac{a^2}{2}\langle L\rangle_t} = \mathrm{e}^{a^2L_t - \frac{a^2}{2}\langle L\rangle_t}\mathrm{e}^{a(1-a)L_t} = \left[\mathscr{E}(L)_t\right]^{a^2}\left[Z_t\right]^{1-a^2}.$$

Soit T un temps d'arrêt, et soit $A \in \mathscr{F}_\infty$. Par l'inégalité de Hölder, ceci implique que

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A\,\mathscr{E}(aL)_T\right] \le \left\{\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_T\right]\right\}^{a^2}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A Z_T\right]\right\}^{1-a^2}.$$

L'inégalité de Jensen nous donne $\left\{\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A Z_T\right]\right\}^{1-a^2} \le \{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z_T^{(1+a)/(2a)}]\}^{2a(1-a)}$ (car $\frac{1+a}{2a} > 1$), et cette dernière vaut $\{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_T}]\}^{2a(1-a)}$. On arrive donc à

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A\,\mathscr{E}(aL)_T\right] \le \left\{\mathbb{E}\left[\mathscr{E}(L)_T\right]\right\}^{a^2}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_T}\right]\right\}^{2a(1-a)}. \tag{6.33}$$

Puisque $\mathscr{E}(L)^T$ est une surmartingale positive, $\mathscr{E}(L)_T = \lim_{t\to\infty}\mathscr{E}(L)_{t\wedge T}$ existe, et par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_T] \le 1$. Par conséquent, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A\,\mathscr{E}(aL)_T] \le \{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_T}]\}^{2a(1-a)}$. Comme $\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_T},\ T \text{ temps d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable, c'est également le cas pour $\{\mathscr{E}(aL)_T,\ T \text{ temps d'arrêt}\}$ (rappel : $(B_i, i \in I)$ est uniformément intégrable si et seulement si $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\,|B_i|\,] < \infty$ et $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$, $\mathbb{P}(A) \le \delta \Rightarrow \sup_{i\in I}\mathbb{E}[\,|B_i|\,\mathbf{1}_A] \le \varepsilon$).

Rappelons[2] que si M est une martingale locale continue, alors M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $(M_T\,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}},\ T$ temps d'arrêt) est uniformément intégrable. En particulier, $\mathscr{E}(aL)$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable. En particulier, $\mathbb{E}[\mathscr{E}(aL)_\infty] = 1$. Par (6.33) (avec $T = \infty$ et $A = \Omega$), $1 = \mathbb{E}[\mathscr{E}(aL)_\infty] \le \{\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty]\}^{a^2}\{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty}]\}^{2a(1-a)}$. Par hypothèse, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L_\infty}]$ est finie. En faisant $a \to 1$, on obtient alors $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] \ge 1$. Donc nécessairement $\mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] = 1$ (lemme de Fatou). $\square$

6.6. Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Les inégalités suivantes relient une martingale locale avec sa variation quadratique. Pour toute martingale continue M, on note $M_t^* := \sup_{s\in[0,t]}|M_s|$.

LEMME 6.6.1. *Soit $p \ge 2$ et $(M_t)_{t\ge 0}$ une martingale locale telle que $M_0 = 0$. Alors*

$$\mathbb{E}\left[(\langle M\rangle_\infty)^p\right] \le p^p\,\mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^{2p}\right].$$

2. Voir TD n.4.

Preuve. Quitte à remplacer M par M^{τ_n}, où $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| + \langle M\rangle_t \geq n\}$, on peut supposer que M et $\langle M\rangle$ sont bornés ; une fois montré le résultat pour M^{τ_n}, on peut faire tendre $n \to +\infty$ et appliquer la convergence monotone aux deux côtés de l'inégalité cherchée.

On sait que pour tout temps d'arrêt τ l'on a $\mathbb{E}[M_\tau^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_\tau]$ et donc

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_\tau] = \mathbb{E}[M_\infty^2 - M_\tau^2] = \mathbb{E}[(M_\infty^2 - M_\tau^2)\mathbb{1}_{(\tau<\infty)}] \leq \mathbb{E}[M_\infty^2 \mathbb{1}_{(\tau<\infty)}].$$

Notons par simplicité $A_t := \langle M\rangle_t$ et $Z := M_\infty^2$. Soit $\lambda > 0$ et $\tau := \inf\{t \geq 0 : A_t > \lambda\}$, avec $\inf\emptyset := \infty$. Alors $\{A_\infty > \lambda\} = \{\tau < \infty\} \subseteq \{A_\tau = \lambda\}$ et $\{A_\infty \leq \lambda\} = \{\tau = \infty\} \subseteq \{A_\infty = A_\tau\}$ et donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(A_\infty>\lambda)}(A_\infty - \lambda)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(A_\infty>\lambda)}(A_\infty - A_\tau)] = \mathbb{E}[A_\infty - A_\tau] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(A_\infty>\lambda)}Z].$$

Pour tout $x \geq 0$, par différentiation on voit que

$$x^p = \int_0^x (x-\lambda)p(p-1)\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda = p(p-1)\int_0^\infty \mathbb{1}_{(x>\lambda)}(x-\lambda)\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

En considérant $x = A_\infty$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[A_\infty^p\right] &= p(p-1)\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(A_\infty>\lambda)}(A_\infty-\lambda)\right]\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda \leq p(p-1)\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{(A_\infty>\lambda)}Z\right]\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= p\,\mathbb{E}[A_\infty^{p-1}Z] \leq p\left(\mathbb{E}[A_\infty^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\mathbb{E}[Z^p]\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}[A_\infty^p] < +\infty$, nous obtenons l'inégalité souhaitée en divisant par $(\mathbb{E}[A_\infty^p])^{\frac{p-1}{p}}$. □

LEMME 6.6.2. *Pour $p \geq 2$ il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour toute M martingale locale issue de* 0

$$\mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

Preuve. Par localisation on peut supposer que M est bornée. Si $p \geq 2$ alors la fonction $x \mapsto |x|^p$ est de classe C^2 et par la formule d'Itô

$$|M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1}\mathrm{sgn}(M_s)\,\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)|M_s|^{p-2}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

En prenant l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right] &= \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[(M_t^*)^{p-2}\langle M\rangle_t\right] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right]^{(p-2)/p}\,\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{p/2}\right]^{2/p},\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. Par Doob

$$\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right]$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right]^{(p-2)/p} \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{p/2}\right]^{2/p}.$$

En divisant les deux côtés par $\mathbb{E}\left[(M_t^*)^p\right]^{(p-2)/p}$ et en faisant tendre $t \to +\infty$ par convergence monotone nous obtenons le résultat souhaité. □

Corollaire 6.6.3 (Théorème de Burkholder-Davis-Gundy). *Pour tout $p > 0$, il existe des constantes $c_p, C_p > 0$ telles que, pour toute martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$ issue de 0,*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

Preuve. La première inégalité a été prouvée dans le lemme 6.6.1 pour $p \geq 4$, la deuxième dans le lemme précédent pour $p \geq 2$. Pour le cas général, on peut consulter l'ouvrage de Revuz-Yor (chapitre 5). □

Si τ est un temps d'arrêt, en remplaçant M par la martingale locale arrêtée M^τ, nous obtenons

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\tau^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\tau^*)^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\tau^{p/2}\right].$$

Chapitre 7

Équations différentielles stochastiques

Ce dernier chapitre consiste en une introduction à la théorie des équations différentielles stochastiques. On y étudie seulement les ingrédients essentiels de la théorie, à savoir les notions de solutions fortes et faibles, l'existence et unicité de solution d'une équation différentielle à coefficients lipschitziens, ainsi que la propriété de Markov forte de cette solution.

7.1. Solutions faibles et fortes

Les équations différentielles stochastiques (EDS) peuvent être vues comme des équations différentielles, ou comme des équations intégrales dans lesquelles interviennent des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien. Elles ont été d'abord étudiées par Itô, dans le but de construire les diffusions (c'est-à-dire, processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). C'est d'ailleurs dans ce but qu'il a introduit le calcul stochastique.

Un point de vue plus moderne consiste à voir les EDS comme des équations différentielles ordinaires, perturbées par un bruit aléatoire. Typiquement, on considère une équation différentielle de la forme $y'(t) = b(t, y(t))$, que l'on écrit sous forme différentielle $\mathrm{d}y_t = b(t, y_t)\,\mathrm{d}t$. On la perturbe en ajoutant un bruit de la forme σB, où B est un mouvement brownien, et $\sigma > 0$ est une constante (qui représente l'intensité du bruit). On obtient l'EDS $\mathrm{d}y_t = b(t, y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$, c'est-à-dire sous forme intégrale

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(s, y_s)\,\mathrm{d}s + \sigma B_t.$$

Plus généralement, on peut autoriser σ à dépendre du temps t et de l'état au temps t, c'est-à-dire $\sigma = \sigma(t, y_t)$, et on peut considérer un instant initial $s \geq 0$ de sorte que l'EDS devient

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(s, y_s)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(s, y_s)\,\mathrm{d}B_s$$

où l'intégrale stochastique est dans le sens d'Itô.

On se donne une définition formelle (et multi-dimensionnelle).

DÉFINITION 7.1.1. *Soient $d \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ et $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mesurables et localement bornées. On écrit $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i\leq d,\, 1\leq j\leq m}$ et $b = (b_i)_{1\leq i\leq d}$. On considère l'EDS suivante que l'on appelle $E_x(\sigma, b, s)$:*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}t, \qquad t \geq 0 \\ \\ X_0 = x \end{cases}$$

On dit que $E(\sigma, b)$ admet une **solution** *s'il existe :*

- *un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles ;*
- *sur cet espace, un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien $B = (B^1, \cdots, B^m)$;*
- *un processus $X = (X^1, \cdots, X^d)$ qui est $(\mathscr{F}_t)$-adapté et continu, tel que*
$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s\ ;$$
c'est-à-dire pour tout $1 \leq i \leq d$,
$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)\,\mathrm{d}s.$$

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P}, B, X)$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$.

DÉFINITION 7.1.2. *(i) On dit qu'il y a* **existence faible** *pour $E(\sigma, b)$, si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.*

(ii) On dit qu'il y a **unicité faible** *pour $E(\sigma, b)$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont la même loi.*

L'unicité faible est aussi appelée **unicité en loi** car elle concerne la loi de X.

EXEMPLE 7.1.3. Soit β un mouvement brownien réel issu de x. On pose

$$B_t := \int_0^t \mathrm{sgn}(\beta_s)\,\mathrm{d}\beta_s,$$

avec la convention $\mathrm{sgn}(u) = 1$ si $u > 0$ et $\mathrm{sgn}(u) = -1$ si $u \leq 0$. Le Théorème 6.3.1 de Lévy nous dit que B est un mouvement brownien issu de 0. Comme $\beta_t = x + \int_0^t \mathrm{sgn}(\beta_s)\,\mathrm{d}B_s$, on voit qu'il y a existence faible pour l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}B_t,$$

car, d'après le théorème 6.3.1 de Lévy, toute solution issue de x est un mouvement brownien. □

EXEMPLE 7.1.4 (résolution par le Théorème de Girsanov). On s'intéresse à l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}t, \qquad X_0 = x,$$

où $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée et $B = B^{(d)}$ est un mouvement brownien de dimension d.

On se donne l'espace canonique $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{W})$ du mouvement brownien (X_t). On introduit

$$\mathbb{Q}_{|\mathscr{F}_t} := \exp\left(\int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathbb{W}_{|\mathscr{F}_t}.$$

Par le Théorème de Novikov, la probabilité $\mathbb{Q}$ est bien définie. On pose $B_t := X_t - x - \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s$. D'après le Théorème de Girsanov, (B_t) est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien. Donc $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{Q}, B, X)$ est une solution. □

Exemple 7.1.5 (norme carrée du mouvement brownien de dimension d). On revient à l'exemple 6.4.9 : soit $B = (B^1, \cdots, B^d)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), issu de $x \in \mathbb{R}^d$ avec $\|x\|^2 = a$. Par la formule d'Itô,

$$\mathrm{d}(\|B_t\|^2) = 2\sum_{i=1}^d B_t^i\,\mathrm{d}B_t^i + d\,\mathrm{d}t.$$

Nous définissons

$$\beta_t := \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{B_u^i}{\|B_u\|}\,\mathrm{d}B_u^i$$

et nous voyons facilement que β est une martingale dans L^2 continue avec $\langle\beta\rangle_t = t$, i.e. β est un mouvement brownien réel. Puisque

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t B_u^i\,\mathrm{d}B_u^i = \int_0^t \|B_u\|\,\mathrm{d}\beta_u$$

nous obtenons que $\|B_t\|^2$ et β donnent une solution faible de l'EDS

$$X_t = a + dt + 2\int_0^t \sqrt{X_u}\,\mathrm{d}\beta_u, \qquad t \geq 0.$$

□

Exemple 7.1.6 (résolution par changement de temps). On s'intéresse à l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t,$$

où $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue.

On se donne un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ (vérifiant les conditions habituelles) et un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien (β_t), issu de x. On pose $M_t := \int_0^t \frac{1}{\sigma(\beta_s)}\,\mathrm{d}\beta_s$. Ainsi, $\langle M\rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(\beta_s)}\,\mathrm{d}s$, qui est continu et strictement croissant. Comme β est récurrent, on voit que $\langle M\rangle_\infty = \infty$ p.s.

Soit $\tau(t) := \inf\{s : \langle M\rangle_s > t\}$. Donc $\langle M\rangle_{\tau(t)} = \tau_{\langle M\rangle_t} = t$. D'après le théorème de Dubins–Schwarz, $B_t := M_{\tau(t)}$ est un $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-mouvement brownien.

Admettons pour l'instant la formule de changement de variables

$$\int_0^{\tau(t)} H_s \,\mathrm{d}M_s = \int_0^t H_{\tau(s)} \,\mathrm{d}M_{\tau(s)}, \tag{7.34}$$

pour tout H processus (progressif) localement borné. (En général, ce genre de changement de temps reste valable si M reste constante sur $]\tau_{s-}, \tau_s[$.) On pose

$$X_t := \beta_{\tau(t)} = x + \int_0^{\tau(t)} \mathrm{d}\beta_s = x + \int_0^{\tau(t)} \sigma(\beta_s)\,\mathrm{d}M_s = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Donc $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_{\tau(t)}), \mathbb{P}, B, X)$ est une solution.

Il reste à vérifier (7.34). On montre d'abord que si N est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale locale continue issue de 0, alors $\widetilde{N}_t := N_{\tau(t)}$ est une $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-martingale locale continue. Soit (T_n) une suite de $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt telle que N^{T_n} soit une $(\mathscr{F}_t)$-martingale uniformément intégrable. Posons $S_n := \langle M\rangle_{T_n}$. On a $\{S_n > t\} = \{T_n > \tau_t\} \in \mathscr{F}_{\tau(t)}$; donc chaque S_n est un $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-temps d'arrêt. Comme $\widetilde{N}_{t\wedge S_n} = N_{\tau(t)\wedge\tau(S_n)} = N_{\tau(t)\wedge T_n}$, et N^{T_n} est une martingale continue uniformément intégrable, le théorème d'arrêt implique que pour $s \le t$, $\mathbb{E}[\widetilde{N}_{t\wedge S_n} \,|\, \mathscr{F}_{\tau(s)}] = \widetilde{N}_{s\wedge S_n}$, c'est-à-dire que $\widetilde{N}^{S_n}$ est une $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-martingale. Donc $N_{\tau(t)}$ est une $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-martingale locale.

En remplaçant N par $N^2 - \langle N\rangle$, on voit que $N^2_{\tau(t)} - \langle N\rangle_{\tau(t)}$ est une $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-martingale locale. Donc la variation quadratique de $N_{\tau(t)}$ (en tant que $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-martingale locale), que l'on notera par $\langle\!\langle N\rangle\!\rangle_t$, est égale à $\langle N\rangle_{\tau(t)}$. Par polarisation et avec notation similaire, $\langle\!\langle \widetilde{N}, \widetilde{L}\rangle\!\rangle_t = \langle N, L\rangle_{\tau(t)}$ si N et $\widetilde{N}$ sont deux martingales locales.

En résumé, $M_{\tau(t)}$ (donc $\int_0^t H_{\tau(s)}\,\mathrm{d}M_{\tau(s)}$) et $\int_0^{\tau(t)} H_s\,\mathrm{d}M_s$ sont des $(\mathscr{F}_{\tau(t)})$-martingales locales. Pour montrer (7.34), il suffit de montrer que $\langle\!\langle \int_0^{\tau(t)} H_s\,\mathrm{d}M_s - \int_0^t H_{\tau(s)}\,\mathrm{d}M_{\tau(s)}\rangle\!\rangle = 0$. Or, cette variation quadratique à l'instant t est, d'après l'identité $\langle\!\langle \widetilde{N}, \widetilde{L}\rangle\!\rangle_t = \langle N, L\rangle_{\tau(t)}$,

$$\begin{aligned}
&= \langle\!\langle \widetilde{H\cdot M} - H_{\tau(\cdot)} \cdot \widetilde{M}\rangle\!\rangle_t \\
&= \langle\!\langle \widetilde{H\cdot M}\rangle\!\rangle_t + \langle\!\langle H_{\tau(\cdot)} \cdot \widetilde{M}\rangle\!\rangle_t - 2\langle\!\langle \widetilde{H\cdot M},\ H_{\tau(\cdot)} \cdot \widetilde{M}\rangle\!\rangle_t \\
&= \langle H \cdot M\rangle_{\tau(t)} + (H^2_{\tau(\cdot)} \cdot \langle\!\langle \widetilde{M}\rangle\!\rangle)_t - 2(H_{\tau(\cdot)} \cdot \langle\!\langle \widetilde{H\cdot M},\ \widetilde{M}\rangle\!\rangle)_t \\
&= (H^2 \cdot \langle M\rangle)_{\tau(t)} + (H^2_{\tau(\cdot)} \cdot \langle M\rangle_{\tau(\cdot)})_t - 2(H_{\tau(\cdot)} \cdot \langle H\cdot M,\ M\rangle_{\tau(\cdot)})_t \\
&= (H^2 \cdot \langle M\rangle)_{\tau(t)} + (H^2_{\tau(\cdot)} \cdot \langle M\rangle_{\tau(\cdot)})_t - 2(H_{\tau(\cdot)} \cdot (H \cdot \langle M\rangle)_{\tau(\cdot)})_t \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la dernière identité provenant de la formule suivante de changement de variables pour l'intégrale de Stieltjes. Soient $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues et croissantes telles que $A(0) = \alpha(0) = 0$. Alors pour toute fonction $f:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_0^t f(\alpha(s))\,\mathrm{d}A(\alpha(s)) = \int_0^{\alpha(t)} f(u)\,\mathrm{d}A(u). \tag{7.35}$$

Il suffit de remarquer que la mesure $\mathrm{d}A$ est la mesure image de $\mathrm{d}A(\alpha(s))$ par l'application $\alpha:\ [0,t] \to [0,\alpha(t)]$. (Rappel : si ν est la mesure image de μ par l'application $\varphi:\ E \to F$, alors $\int_E f(\varphi)\,\mathrm{d}\mu = \int_F f\,\mathrm{d}\nu$.) Or, ceci est tout à fait évident. En effet, soit ν la mesure image de $\mu := \mathrm{d}A(\alpha(s))$ par l'application α, alors par définition, pour tout $[a,b] \subset [0,\alpha(t)]$,

$$\begin{aligned}
\nu(\,]a,b]) &= \mu(\{s \in [0,t]:\ a < \alpha(s) \le b\}) \\
&= \mu(\,]\beta(a),\beta(b)]) \qquad \beta(r) := \inf\{s:\ \alpha(s) > r\}; \quad \{s > \beta(r)\} \Leftrightarrow \{\alpha(s) > r\} \\
&= A(\alpha(\beta(b))) - A(\alpha(\beta(a))) \qquad \text{définition de } \mu \\
&= A(b) - A(a), \qquad \alpha(\beta(r)) = r,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\nu = \mathrm{d}A$.

Définition 7.1.7. *(i) On dit que l'EDS $E(\sigma,b)$ a la propriété d'***unicité trajectorielle** *si, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, deux solutions X et $\widetilde{X}$ associées au même espace $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$ et au même mouvement brownien B telles que $X_0 = \widetilde{X}_0$ p.s., sont indistinguables.*

(ii) Fixons un espace filtré $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$ (satisfaisant les conditions habituelles) et un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien B.

On dit que qu'un solution $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P},B,X)$ de $E_x(\sigma,b)$ est **forte** *si X est adapté à la filtration canonique de B.*

Exemple 7.1.8. Considérons l'EDS suivante :

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\,\mathrm{d}B_t.$$

On a vu l'existence et unicité faible pour cette EDS dans l'Exemple 7.1.3. Il n'y a en revanche pas d'unicité trajectorielle de cette EDS. En effet, si X est une solution de l'EDS avec $X_0 = 0$, alors $-X$ est aussi une solution : remarquons que X est un mouvement brownien et la martingale $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=0\}}\,\mathrm{d}B_s = 0$ car sa variation quadratique $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=0\}}\,\mathrm{d}s$ est p.s. nulle.

Cette EDS n'a pas de solution forte. Si X est une solution issue d'une valeur déterministe, on peut montrer que la filtration canonique de X coïncide avec celle de $|B|$, qui est strictement plus petite que celle de B. □

Exemple 7.1.9. Considérons l'EDS suivante :

$$\mathrm{d}X_t = \lambda X_t\,\mathrm{d}B_t,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après le Théorème 7.2.2 ci-dessous il y a unicité trajectorielle et d'après le Théorème 6.2.1, pour tout x, l'unique solution forte de $E_x(\sigma, b)$ est $X_t = x\mathrm{e}^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$. □

Le théorème suivant, que l'on admettra sans preuve, relie les différentes notions d'existence et d'unicité.

THÉORÈME 7.1.10 (Yamada–Watanabe). *S'il y a existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a aussi unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace filtré* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ *et tout* $(\mathscr{F}_t)$*-mouvement brownien* B*, il existe pour chaque* $x \in \mathbb{R}^d$ *une (unique) solution forte de* $E_x(\sigma, b)$*.*

7.2. Coefficients lipschitziens

On établit dans cette section l'existence forte et l'unicité trajectorielle pour une famille importante de coefficients. Durant toute la section, on a l'hypothèse suivante sur les coefficients.

HYPOTHÈSE 7.2.1. *Les fonctions* σ *et* b *sont continues sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$*, et il existe une constante finie* L *telle que*

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x-y|, \qquad \forall\, t \geq 0, \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d$$

et $|b(t,0)| + |\sigma(t,0)| \leq L$*, for all* $t \geq 0$*.*

THÉORÈME 7.2.2. *Sous l'Hypothèse 7.2.1, il y a unicité faible et unicité trajectorielle pour* $E(\sigma, b)$*. De plus, pour tout espace filtré* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ *et tout* $(\mathscr{F}_t)$*-mouvement brownien* B*, il existe pour chaque* $x \in \mathbb{R}^d$ *une (unique) solution forte de* $E_x(\sigma, b)$*.*

Pour simplifier l'écriture, on ne traite que le cas où $d = m = 1$. La preuve du cas général est la même, avec une attention dans les notations au fait que σ est une matrice plutôt qu'un scalaire.

REMARQUE 7.2.3. (i) Le théorème entraîne en particulier qu'il y a existence faible pour $E(\sigma, b)$. L'unicité faible découlera de l'unicité trajectorielle et du Théorème 7.1.10 de Yamada–Watanabe.

(ii) Il est possible d'affaiblir l'Hypothèse 7.2.1. Par exemple, l'hypothèse de continuité en la variable t n'intervient que pour majorer $\sup_{t\in[0,T]} |\sigma(t,x)|$ et $\sup_{t\in[0,T]} |b(t,x)|$ pour x fixé. On peut aussi “localiser" l'hypothèse sur le caractère lipschitzien de σ et b (la constante K dépendra du compact sur lequel on considère t et x, y), à condition de conserver une condition de croissance linéaire

$$|\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|), \qquad |b(t,x)| \leq K(1+|x|).$$

Ce type de condition, qui sert à éviter l'explosion de la solution, intervient déjà dans les équations différentielles ordinaires. □

Soit $K \geq 0$, $T \geq s \geq 0$ et pour tout processus $(X_t)_{t\in[s,T]}$ continu et adapté on définit $X_t^* := \sup_{u\in[s,t]} |X_u|$ et $\|X\|_K := \sup_{t\in[s,T]} e^{-Kt} \|X_t^*\|_{L^2}$. On note par $E_{s,T}$ l'espace des processus $(X_t)_{t\in[s,T]}$ continus et adaptés tels que $\|X_T^*\|_{L^2} < +\infty$; on voit facilement que pour tout $K \geq 0$ cet espace, muni de $\|\cdot\|_K$, est de Banach et que toutes les normes $(\|\cdot\|_K)_{K\geq 0}$ sont équivalentes sur $E_{s,T}$.

Si η est une v.a. $\mathscr{F}_s$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable, et $X \in E_{s,T}$, soit $\Gamma_\eta(X) := Y$ défini par

$$Y_t := \eta + \int_s^t b(u, X_u)\,\mathrm{d}u + \int_s^t \sigma(u, X_u)\,\mathrm{d}B_u, \qquad t \in [s,T].$$

Lemme 7.2.4.

(1) Pour tout $X \in E_{s,T}$, $\Gamma_\eta(X) \in E_{s,T}$.

(2) Pour $\eta^i \in \mathbb{R}^d$, $X^i \in E_{s,T}$, $i = 1, 2$, et $Y^i := \Gamma_{\eta^i}(X^i)$, en définissant $U_t := |Y_t^1 - Y_t^2|$, $V_t := |X_t^1 - X_t^2|$, si $K > 0$ alors

$$\|U\|_K \leq \|\eta^1 - \eta^2\|_{L^2} + L\,C(K)\,\|V\|_K, \qquad \lim_{K\to+\infty} C(K) = 0. \tag{7.36}$$

Preuve. Remarquons d'abord que par l'Hypothèse 7.2.1 il existe $C > 0$ tel que

$$|b(\cdot, x)| + |\sigma(\cdot, x)| \leq C(1 + |x|), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors si $Y := \Gamma_\eta(X)$ et $X \in E_{s,T}$:

$$|Y_t| \leq |\eta| + C \int_s^t (1 + |X_u|)\,\mathrm{d}u + \left| \int_s^t \sigma(u, X_u)\,\mathrm{d}B_u \right|.$$

Par l'inégalité de Doob pour les martingales dans L^2

$$\mathbb{E}\left[\sup_{r\in[s,t]} \left| \int_s^r \sigma(u, X_u)\,\mathrm{d}B_u \right|^2 \right] \leq 4\,\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma^2(u, X_u)\,\mathrm{d}u \right]$$

$$\leq 8C^2\,\mathbb{E}\left[\int_s^t (1 + |X_u|^2)\,\mathrm{d}u \right] = 8C^2 \int_s^t (1 + \|X_u\|_{L^2}^2)\,\mathrm{d}u.$$

Donc si $C_0 := 4C$

$$\|Y_t^*\|_{L^2} \leq \|\eta\|_{L^2} + C \int_s^t (1 + \|X_u\|_{L^2})\,\mathrm{d}u + C_0 \left[\int_s^t (1 + \|X_u\|_{L^2}^2)\,\mathrm{d}u \right]^{\frac{1}{2}}$$

et nous obtenons que $\Gamma_\eta : E_{s,T} \mapsto E_{s,T}$.

Nous prouvons maintenant le deuxième résultat. Nous avons

$$U_t \leq |\eta^1 - \eta^2| + L \int_s^t V_u\,\mathrm{d}u + \left| \int_s^t \left(\sigma(u, X_u^1) - \sigma(u, X_u^2) \right)\,\mathrm{d}B_u \right|.$$

Par l'inégalité de Doob pour les martingales dans L^2

$$\mathbb{E}\left[\sup_{r\in[s,t]}\left|\int_s^r \left(\sigma(u,X_u^1)-\sigma(u,X_u^2)\right)\,\mathrm{d}B_u\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq 2\left[\mathbb{E}\int_s^t \left(\sigma(u,X_u^1)-\sigma(u,X_u^2)\right)^2\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2L\left[\mathbb{E}\int_s^t V_u^2\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}} = 2L\left[\int_s^t \mathbb{E}\left[V_u^2\right]\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$e^{-Kt}\|U_t^*\|_{L^2} \leq \|\eta^1-\eta^2\|_{L^2} + Le^{-Kt}\left[\int_s^t \|V_u\|_{L^2}\,\mathrm{d}u + 2\left[\int_s^t \|V_u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \|\eta^1-\eta^2\|_{L^2} + L\mathrm{e}^{-Kt}\|V\|_K\left[\int_s^t e^{Ku}\,\mathrm{d}u + 2\left[\int_s^t e^{2Ku}\,\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \|\eta^1-\eta^2\|_{L^2} + L\left(\frac{1}{K}+\left(\frac{2}{K}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\|V\|_K.$$

Donc $C(K) := \frac{1}{K}+\left(\frac{2}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ quand $K\to+\infty$. □

Proposition 7.2.5. *Soit $T \geq s \geq 0$ et η une v.a. $\mathscr{F}_s$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable. Il existe un unique processus $X(s,\cdot,\eta)\in E_{s,T}$ tel que*

$$X(s,t,\eta) = \eta + \int_s^t b(u,X(s,u,\eta))\,\mathrm{d}u + \int_s^t \sigma(u,X(s,u,\eta))\,\mathrm{d}B_u, \qquad t\in[s,T]. \tag{7.37}$$

Si p.s. $\eta\equiv x$ une constante, alors $X(s,t,x)$ est $\sigma(B_r-B_s, r\in[s,t])$-mesurable.

Preuve. Par le lemme 7.2.4, nous savons que $\Gamma_\eta : E_{s,T}\mapsto E_{s,T}$ et que si K est suffisamment grand (ici $\eta^1=\eta^2$)

$$\|\Gamma_\eta(X^1)-\Gamma_\eta(X^2)\|_K \leq \delta\,\|X^1-X^2\|_K, \qquad \delta<1.$$

Donc si K est suffisamment grand, Γ_η est une contraction dans $E_{s,T}$ muni de la norme $\|\cdot\|_K$. En particulier, il existe un seul point fixe X de Γ_η et de plus $\|Z^n-X\|_K\to 0$ quand $n\to+\infty$, où

$$Z_t^0 := \eta,\ t\in[s,T], \qquad Z^{n+1} := \Gamma_\eta(Z^n).$$

Par récurrence nous voyons que Z_t^n est $\sigma(B_r-B_s, r\in[s,t])$-mesurable pour tout n et donc B l'est aussi par passage à la limite en n. □

Preuve du Théorème 7.2.2. L'existence d'une solution forte est donnée par la Proposition 7.2.5. Nous prouvons l'unicité trajectorielle.

Soient X et $\widetilde{X}$ deux solutions (sur le même espace, avec le même mouvement brownien), telles que $X_0 = \widetilde{X}_0$. Fixons $M > 0$. Posons

$$\tau := \inf \left\{ t \geq 0 : \ |X_t| + |\widetilde{X}_t| \geq M \right\}.$$

Pour tout $t \geq 0$,

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(u, X_u)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(u, X_u)\,\mathrm{d}u,$$

et on a une équation similaire pour $\widetilde{X}$ à la place de X. En définissant $U_t := |X_t - \widetilde{X}_t|$

$$U_{t\wedge\tau} \leq L \int_0^{t\wedge\tau} U_u\,\mathrm{d}u + \left| \int_0^{t\wedge\tau} \left(\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \widetilde{X}_u) \right)\,\mathrm{d}B_u \right|.$$

Par l'inégalité de Doob pour les martingales dans L^2

$$\mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,t]} \left| \int_0^{r\wedge\tau} \left(\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \widetilde{X}_u) \right)\,\mathrm{d}B_u \right|^2 \right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} \left(\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \widetilde{X}_u) \right)^2\,\mathrm{d}u \right]$$
$$\leq 4L^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} U_u^2\,\mathrm{d}u \right] \leq 4L^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[U_{u\wedge\tau}^2 \right]\,\mathrm{d}u.$$

Donc pour tout $K \geq 0$ et $T \geq 0$

$$\begin{aligned} e^{-Kt}\|U_{t\wedge\tau}^*\|_{L^2} &\leq Le^{-Kt} \left[\int_0^t \|U_{u\wedge\tau}\|_{L^2}\,\mathrm{d}u + \left[\int_0^t \|U_{u\wedge\tau}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}u \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq L\mathrm{e}^{-Kt}\|U_{\cdot\wedge\tau}\|_K \left[\int_0^t e^{Ku}\,\mathrm{d}u + 2\left[\int_0^t e^{2Ku}\,\mathrm{d}u \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq L\left(\frac{1}{K} + \sqrt{\frac{2}{K}} \right) \|U_{\cdot\wedge\tau}\|_K. \end{aligned}$$

Si K est suffisamment grand, nous obtenons $\|U_{\cdot\wedge\tau}\|_K \leq \delta\|U_{\cdot\wedge\tau}\|_K$ avec $\delta < 1$, et ceci est possible seulement si $\|U_{\cdot\wedge\tau}\|_K = 0$. En faisant tendre $M \to +\infty$, nous trouvons que X et $\widetilde{X}$ sont indistinguables sur $[0, T]$.

Reste à prouver l'unicité faible. Ce résultat suit du Théorème 7.1.10 de Yamada-Watanabe et du Théorème 7.2.2, mais on peut donner aussi une preuve plus directe. Soit (X, B) une solution faible de $E_x(\sigma, b)$ définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. Nous pouvons considérer sur cet espace de probabilité l'équation (7.37) dirigée par le mouvement brownien B. Comme nous l'avons montré dans la preuve de la proposition 7.2.5, en définissant les processus

$$Z_t^0 := x, \ t \in [s, T], \qquad Z^{n+1} := \Gamma_x(Z^n),$$

nous avons que $\|Z^n - \tilde{X}\|_K \to 0$ quand $n \to +\infty$ où $\tilde{X}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$; par construction, la loi de $\tilde{X}$ dépend uniquement de x et des coefficients b et σ. Puisque le

Théorème 7.2.2 donne unicité trajectorielle pour $E_x(\sigma, b)$, alors X et $\tilde{X}$ sont indistinguables et ont donc la même loi. Nous avons ainsi prouvé que toute solution faible de $E_x(\sigma, b)$ a la même loi. □

EXEMPLE 7.2.6. Soit B un mouvement brownien standard, et soit $X_t := \mathrm{sh}(B_t + t)$, où $\mathrm{sh}(x) := (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$. D'après la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \mathrm{ch}(B_t + t)\,\mathrm{d}(B_t + t) + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(B_t + t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{1 + X_t^2}\,\mathrm{d}B_t + \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}\,X_t\right)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à l'EDS $\mathrm{d}X_t = \sqrt{1 + X_t^2}\,\mathrm{d}B_t + (\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}\,X_t)\,\mathrm{d}t$ avec $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $\sigma(t, x) := \sqrt{1 + x^2}$ et $b(t, x) := \sqrt{1 + x^2} + \frac{x}{2}$ satisfont l'Hypothèse 7.2.1. D'après le Théorème 7.2.2, il y a unicité trajectorielle pour cette EDS. Or, $\mathrm{sh}(B_t + t + y)$ (où y est tel que $\mathrm{sh}(y) = x$, c'est-à-dire $y := \ln(x + \sqrt{1 + x^2}\,))$ est une solution, ce qui implique que $X_t = \mathrm{sh}(B_t + t + y)$. □

EXEMPLE 7.2.7. Considérons l'EDS sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}X_t = \alpha X_t\,\mathrm{d}B_t + \beta X_t\,\mathrm{d}t,$$

avec condition initiale $X_0 = x$. Le Théorème 7.2.2 nous garantit l'unicité trajectorielle de l'EDS.

Dans le cas particulier où $\beta = 0$, la solution de $\mathrm{d}X_t = \alpha X_t\,\mathrm{d}B_t$ (avec $X_0 = x$) est la martingale exponentielle $X_t = x\mathrm{e}^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$.

Dans le cas général, on vérifie facilement par la formule d'Itô que la solution est $X_t = x\mathrm{e}^{\alpha B_t + (\beta - \frac{\alpha^2}{2})t}$. Ce processus, qui est souvent utilisé pour modéliser le cours d'une action en mathématiques financières, est appelé le *mouvement brownien géométrique.* □

EXEMPLE 7.2.8. Soit

$$\mathrm{d}X_t = |X_t|\,\mathrm{d}B_t + X_t\,\mathrm{d}t,$$

tel que $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $\sigma(t, x) := |x|$ et $b(t, x) := x$ satisfont l'Hypothèse 7.2.1. D'après le Théorème 7.2.2, il y a unicité trajectorielle pour cette EDS. Si $x = 0$, la constante 0 est évidemment une solution, ce qui implique que $X_t = 0$ dans ce cas. Si $x > 0$, alors l'exemple précédent (avec $\alpha = \beta = 1$) montre que $X_t = x\mathrm{e}^{B_t + \frac{1}{2}t} \geq 0$ est la seule solution. Si $x < 0$, alors l'exemple précédent (avec $-\alpha = \beta = 1$) montre que $X_t = x\mathrm{e}^{-B_t + \frac{1}{2}t} \leq 0$ est la seule solution. □

7.3. Processus de Markov

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathscr{E})$ est markovien si, pour faire une prédiction sur son futur, on a exactement les mêmes informations si on connait toute la trajectoire passée ou seulement l'état présent. Dans cette section nous allons formaliser cette idée.

DÉFINITION 7.3.1. *Une famille* $(p_{s,t}(x,\cdot))_{0\leq s\leq t, x\in E}$ *de mesures de probabilités sur* $(E,\mathscr{E})$ *est dite un* noyau de transition *si*

(1) pour tout $A\in\mathscr{E}$ *l'application* $(s,t,x)\mapsto p_{s,t}(x,A)$ *est mesurable*

(2) pour tout $A\in\mathscr{E}$ *et* $0\leq s\leq r\leq t$ *nous avons la relation de Chapman-Kolmogorov*

$$p_{s,t}(x,A)=\int_E p_{r,t}(y,A)\,p_{s,r}(x,dy), \qquad \forall\, x\in E,$$

et $p_{s,s}(x,\cdot)=\delta_x$.

Si pour tout $t,s\geq 0$ *nous avons* $p_{s,s+t}=p_{0,t}=:p_t$ *alors le noyau est dit* homogène. *Dans ce cas la relation de Chapman-Kolmogorov devient*

$$p_{s+t}(x,A)=\int_E p_t(y,A)\,p_s(x,dy)=\int_E p_s(y,A)\,p_t(x,dy), \qquad \forall\, x\in E,\ t,s\geq 0.$$

DÉFINITION 7.3.2. *Soit* $(p_{s,t}(x,\cdot))_{0\leq s\leq t,x\in E}$ *un noyau de transition sur* $(E,\mathscr{E})$. *Un processus adapté sur un espace filtré* $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$ *à valeurs dan* E *est dit* markovien *avec noyau de transition* $(p_{s,t}(x,\cdot))$ *si pour toute* $f:E\mapsto\mathbb{R}_+$ *mesurable*

$$\mathbb{E}(f(X_t)\,|\,\mathscr{F}_s)=P_{s,t}f(X_s) \qquad \text{p.s.}$$

où $P_{s,t}f(x):=\int f(y)\,p_{s,t}(x,dy)$. *Si le noyau est homogène, le processus est dit homogène aussi et l'on note* $P_tf(x):=\int f(y)\,p_t(x,dy)$.

La relation de Chapman-Kolmogorov implique que

$$P_{s,r}P_{r,t}=P_{s,t}, \qquad 0\leq s\leq r\leq t$$

et dans le cas homogène $P_{t+s}=P_tP_s=P_sP_t$ pour tous $t,s\geq 0$, i.e. $(P_t)_{t\geq 0}$ forme un *semigroupe*.

Nous nous intéressons de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous considérons l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$ et le processus canonique $(X_t,t\geq 0)$, où $X_t:C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$, $X_t(\mathrm{w}):=\mathrm{w}_t$, $t\geq 0$. Nous notons $\mathscr{F}^X_t:=\sigma(X_s,s\in[0,t])$ et $\mathscr{F}^X:=\sigma(X_s,s\geq 0)$.

THÉORÈME 7.3.3. *Soit* $(p_t(x,\cdot))$ *un noyau de transition homogène sur* $\mathbb{R}^d$ *et* ν *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}^d$. *Alors il existe au plus une mesure de probabilité* $\mathbf{P}_\nu$ *sur l'espace* *canonique telle que*

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_\nu(X_{t_i}\in A_i,\, i=0,\dots,n)=\\ &=\int_{A_0}\nu(\mathrm{d}x_0)\int_{A_1}p_{t_1}(x_0,\mathrm{d}x_1)\int_{A_2}p_{t_2-t_1}(x_1,\mathrm{d}x_2)\cdots\int_{A_n}p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\end{aligned} \tag{7.38}$$

pour tout choix de $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$ *et* $A_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. *Si* $\nu=\delta_x$ *avec* $x\in\mathbb{R}^d$ *alors nous notons* $\mathbf{P}_x:=\mathbf{P}_\nu$. *Le processus canonique est markovien sur* $(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d),\mathscr{F}^X,(\mathscr{F}^X_t),\mathbf{P}_\nu)$.

Preuve. Soit $P:=\bigcup_{0=t_0\le t_1<\cdots<t_n,n\in\mathbb{N}}\sigma(X_{t_i},i=0,\dots,n)$. Alors $P\subset\mathscr{F}^X$ est un π-système (i.e. stable par intersection finie) ; en plus, $\mathbf{P}_\nu$ est uniquement déterminée sur P par (7.38). Par le lemme de la classe monotone nous obtenons l'unicité de $\mathbf{P}_\nu$. □

Le *Théorème d'extension de Kolmogorov* permet d'étendre $\mathbf{P}_x:P\mapsto[0,1]$ à une mesure de probabilité sur l'espace $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}$ muni de la plus petite tribu qui rend mesurable le processus canonique ; d'autre part les mesures ainsi définies ne sont pas nécessairement supportés par $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Quand nous étudierons les diffusions, par exemple dans la section 7.4, nous verrons comment construire de telles mesures de probabilités.

Définition 7.3.4. *Soit* $(p_t(x,\cdot))$ *un noyau de transition homogène sur* $\mathbb{R}^d$. *Si* $(\mathbf{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ *est une famille de mesures de probabilités sur* $(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d),\mathscr{F}^X)$ *satisfaisant*

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_x(X_{t_i}\in A_i,\, i=1,\dots,n)=\\ &=\int_{A_1}p_{t_1}(x,\mathrm{d}x_1)\int_{A_2}p_{t_2-t_1}(x_1,\mathrm{d}x_2)\cdots\int_{A_n}p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\end{aligned} \tag{7.39}$$

pour tout choix de $0\le t_1<\cdots<t_n$ *et* $A_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, *alors* $(\mathbf{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ *est dite une famille markovienne associée au noyau* p.

Si $(\mathbf{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ est une famille markovienne, pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}^d$ on définit la mesure de probabilité sur l'espace canonique

$$\mathbf{P}_\nu:=\int_{\mathbb{R}^d}\nu(\mathrm{d}x)\,\mathbf{P}_x.$$

Exemple 7.3.5. Si $\mathbf{W}_x$ est la loi de $(x+B_t)_{t\ge0}$, où B est un MB, alors par la Proposition 2.3.1 $(\mathbf{W}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ forme une famille markovienne avec noyau de transition homogène $p_t(x,\cdot)=\mathscr{N}(x,t)$, car si $0<t_1<\cdots<t_n$ et $A_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}_x\left(X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n\right)\\ =&\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}}\exp\left(-\frac12\sum_{k=1}^n\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,\end{aligned}$$

avec $x_0:=x$.

EXEMPLE 7.3.6. Soit $v \in \mathbb{R}$ fixé et $\mathbf{P}_x$ la loi de $(x + vt + B_t)_{t\geq 0}$. On peut montrer que $(\mathbf{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ forme une famille markovienne avec noyau de transition homogène $p_t(x,\cdot) = \mathscr{N}(x + vt, t)$ (exercice !).

EXEMPLE 7.3.7. Soit $\lambda > 0$ fixé et $p_t(x,\cdot) = \mathscr{N}(e^{-\lambda t}x, (1-e^{-2\lambda t})/(2\lambda))$. On peut montrer que $(p_t(x,\cdot))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ est un noyau de transition homogène sur $\mathbb{R}$ (exercice !).

7.3.1. Propriété de Markov simple. Nous introduisons l'opérateur de décalage sur l'espace canonique (shift en anglais) :

$$\theta_s : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \qquad \theta_s(\mathrm{w}) := \mathrm{w}_{s+\cdot}, \qquad s \geq 0.$$

Alors une famille Markovienne satisfait la propriété de Markov simple :

THÉORÈME 7.3.8. *Pour toute $F : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}_+$ mesurable, $s \geq 0$ et pour toute mesure de probabilité ν sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$:*

$$\mathbf{E}_\nu \left[F \circ \theta_s \,|\, \mathscr{F}_s^X \right] = \mathbf{E}_{X_s}[F], \qquad \mathbf{P}_\nu - \text{p.s.}$$

où $\mathbf{E}_\nu$ est l'espérance sous $\mathbf{P}_\nu$.

Preuve. Par linéarité il suffit de considérer $\nu = \delta_x$, $x \in \mathbb{R}^d$, et de montrer que pour tout $A \in \mathscr{F}_s^X$

$$\mathbf{E}_x \left[\mathbb{1}_A \, F \circ \theta_s \right] = \mathbf{E}_x[\mathbb{1}_A \, \mathbf{E}_{X_s}[F]].$$

Par le lemme de la classe monotone, il suffit de considérer $A = \{(X_{t_i} \in A_i, i = 1, \dots, n)$ avec $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = s$ et $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $F(\mathrm{w}) = f(\mathrm{w}_{u_1}, \dots, \mathrm{w}_{u_m})$ avec $0 < u_1 < \ldots < u_m$. Alors la formule souhaitée est une simple conséquence de (7.38) :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x \left[\mathbb{1}_A \, F \circ \theta_s \right] = \mathbf{E}_x \left[\mathbb{1}_{(X_{t_i} \in A_i, i=1,\dots,n)} \, f(X_{s+u_j}, j = 1, \dots, m) \right] \\
&= \int_{A_1 \times \cdots \times A_n \times (\mathbb{R}^d)^m} p_{t_1}(x, dy_1) \cdots p_{s-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) \, f(y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) \cdot \\
&\qquad \cdot p_{u_1}(y_n, dy_{n+1}) \, p_{u_2-u_1}(y_{n+1}, dy_{n+2}) \cdots p_{u_m-u_{m-1}}(y_{n+m-1}, dy_{n+m}) \\
&= \mathbf{E}_x[\mathbb{1}_A \, \mathbf{E}_{X_s}[F]].
\end{aligned}$$

□

7.4. Propriété de Markov et diffusions

Par le Théorème 7.2.2, sous l'Hypothèse 7.2.1 l'équation $E(\sigma, b)$ satisfait l'unicité faible, l'unicité trajectorielle et l'existence de solutions fortes.

Etant donnés un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ et un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien B, nous avons vu dans la Proposition 7.2.5 comment construire une solution de $E(\sigma, b)$ adapté à la filtration canonique de B. Nous nous intéressons maintenant à la propriété de Markov des solutions.

7.4.1. Le cas général. Nous considérons à nouveau le processus $(X(s,t,x))_{0\le s\le t, x\in\mathbb{R}^d}$ défini par (7.37) et nous supposons que les coefficients satisfont l'Hypothèse 7.2.1. Soit

$$p_{s,t}(A) := \mathbb{P}\left(X(s,t,x)\in A\right), \qquad x\in\mathbb{R}^d,\ t\ge s\ge 0,\ A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d).$$

Proposition 7.4.1. *$(p_{s,t}(x,\cdot))_{x\in\mathbb{R}^d, 0\le s\le t}$ est un noyau de transition (voir la définition 7.3.1 ci-dessus).*

Preuve. Par (7.37) nous avons que pour $r\ge s$

$$X(s,r,x) = x + \int_s^r b(u, X(s,u,x))\,\mathrm{d}u + \int_s^r \sigma(u, X(s,u,x))\,\mathrm{d}B_u.$$

Si $\eta := X(s,r,x)$, alors le processus $t\mapsto X(s,t,x)$ satisfait pour $t\ge r$

$$\begin{aligned} X(s,t,x) &= x + \int_s^t b(u, X(s,u,x))\,\mathrm{d}u + \int_s^t \sigma(u, X(s,u,x))\,\mathrm{d}B_u \\ &= \eta + \int_r^t b(u, X(s,u,x))\,\mathrm{d}u + \int_r^t \sigma(u, X(s,u,x))\,\mathrm{d}B_u \end{aligned}$$

alors que par définition pour $t\ge r$

$$X(r,t,\eta) = \eta + \int_r^t b(u, X(r,u,\eta))\,\mathrm{d}u + \int_r^t \sigma(u, X(r,u,\eta))\,\mathrm{d}B_u.$$

Par le résultat d'unicité de la Proposition 7.2.5, nous obtenons que pour tous $0\le s\le r\le t$ p.s.

$$X(r,t,X(s,r,x)) = X(s,t,x). \tag{7.40}$$

De plus, $X(s,r,x)$ est $\mathscr{F}_r$-mesurable alors que $X(r,t,\cdot)$ est $\sigma(B_u - B_r, u\ge r)$-mesurable et donc indépendant de $\mathscr{F}_r$. Nous obtenons pour toute $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ mesurable et non-négative

$$\begin{aligned} P_{s,t}f(x) :=& \mathbb{E}\left[f(X(s,t,x))\right] = \mathbb{E}\left[f(X(r,t,X(s,r,x)))\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(X(r,t,X(s,r,x)))\mid\mathscr{F}_r\right]\right] \\ =& \mathbb{E}\left[P_{r,t}f(X(s,r,x))\right] = P_{s,r}P_{r,t}f(x). \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. □

La relation de Chapman-Kolmogorov pour le noyau de transition est donc une conséquence de la formule (7.40) et des propriétés d'indépendance du mouvement brownien. La formule (7.40) suit de l'unicité trajectorielle.

7.4.2. Le cas homogène. Dans cette section, on suppose l'Hypothèse 7.2.1 et la propriété suivante

$$\sigma(t,x) = \sigma(x), \qquad b(t,x) = b(x), \tag{7.41}$$

c'est-à-dire que les coefficients ne dépendent pas du temps. Nous nous intéressons donc à l'EDS

$$X(t,x) = x + \int_0^t b(X(u,x))\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(X(u,x))\,\mathrm{d}B_u, \qquad t \geq 0 \tag{7.42}$$

qui satisfait unicité trajectorielle, unicité faible et existence de solutions fortes par le Théorème 7.2.2. En particulier la loi $\mathbf{P}_x$ de $(X(t,x), t \geq 0)$ est uniquement déterminée par (x, σ, b) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Remarquons que nous sommes en train de travailler avec deux (ou plusieurs) espaces de probabilités. D'un côté nous avons un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ sur lequel est défini un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien B ; par la Proposition 7.2.5 nous construisons par une itération de Picard une solution de (7.42) définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. De l'autre côté nous avons l'espace canonique $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathscr{F}^X, (\mathscr{F}^X_t))$ sur lequel nous considérons les lois $\mathbf{P}_x$, pour $x \in \mathbb{R}^d$.

On veut profiter de l'existence de ces deux points de vue, par exemple dans la preuve du caractère markovien de $(X(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$.

Proposition 7.4.2. *Si σ et b satisfont l'Hypothèse 7.2.1 et* (7.42)*, alors il existe une application mesurable $\Lambda : \mathbb{R}^d \times C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d) \mapsto C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ telle que p.s. $X(\cdot,x) = \Lambda(x,B)$. En particulier, la loi de $\Lambda(x,B)$ est $\mathbf{P}_x$.*

Preuve. Comme nous l'avons montré dans la preuve de la proposition 7.2.5, en définissant les processus

$$Z^0_t := x,\ t \geq 0, \qquad Z^{n+1}_t := x + \int_0^t b(Z^n_u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(Z^n_u)\,\mathrm{d}B_u, \qquad t \geq 0$$

nous avons que $\|Z^n - X(\cdot,x)\|_K \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par récurrence Z^n est une fonctionnelle mesurable de (x, B) pour tout n et la limite $X(\cdot,x)$ l'est aussi. □

Théorème 7.4.3. $(\mathbf{P}_x, x \in \mathbb{R}^d)$ *forme une famille markovienne avec noyau de transition $p_t(x,dy) := \mathbb{P}(X(t,x) \in dy)$ (voir la définition 7.3.4).*

Preuve. Pour tout $s \geq 0$

$$\begin{aligned} X(t+s,x) &= X(s,x) + \int_s^{t+s} b(X(u,x))\,\mathrm{d}u + \int_s^{t+s} \sigma(X(u,x))\,\mathrm{d}B_u \\ &= X(s,x) + \int_0^t b(X(u+s,x))\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(X(u+s,x))\,\mathrm{d}B^{(s)}_u, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

où $B_t^{(s)} := B_{t+s} - B_s$ est un mouvement brownien independant de $\mathscr{F}_s$ et $X(s,x)$ est $\mathscr{F}_s$-mesurable. Par la proposition 7.4.2, nous avons $X(\cdot + s, x) = \Lambda(X(s,x), B^{(s)})$ et donc la loi conditionnelle de $X(\cdot + s, x)$ sachant $\mathscr{F}_s$ est égale à $\mathbf{P}_{X(s,x)}$. □

THÉORÈME 7.4.4 (Propriété de Markov forte). *Sous l'Hypothèse 7.2.1 et (7.41), la famille* $(\mathbf{P}_x,\, x \in \mathbb{R}^d)$ *est fortement markovienne, i.e. si* τ *est un* $(\mathscr{F}_t^X)$*-temps d'arrêt fini* $\mathbf{P}_x$*-p.s., et si* $F:\ C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ *est mesurable, alors*

$$\mathbf{E}_x \left[F \circ \theta_\tau \,|\, \mathscr{F}_\tau^X \right] = \mathbf{E}_{X_\tau} \left[F \right], \qquad \mathbf{P}_x - \text{p.s.}$$

REMARQUE 7.4.5. Dans le cas particulier $\sigma = \mathrm{Id}$, $b = 0$, ce théorème se réduit à la propriété de Markov forte du mouvement brownien prouvée dans le Théorème 2.4.5. □

Preuve du Théorème 7.4.4. Soit $(\mathscr{G}_t)$ la filtration canonique du mouvement brownien B. On note $(X(t,x))_{t\geq 0}$ la seule solution de (7.42). Soit $\rho : \Omega \to [0, +\infty[$ défini par $\rho := \tau \circ X(\cdot, x)$; alors ρ est un $(\mathscr{G}_t)$-temps d'arrêt p.s. fini. Nous allons prouver que pour toute $F:\ C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ mesurable, p.s.

$$\mathbb{E} \left[F(X(t+\rho, x))_{t\geq 0} \,|\, \mathscr{G}_\rho \right] = \mathbf{E}_{X(\rho,x)} \left[F \right].$$

Par définition,

$$X(t+\rho, x) - X(\rho, x) = \int_\rho^{t+\rho} \sigma(X(s,x))\, \mathrm{d}B_s + \int_\rho^{t+\rho} b(X(s,x))\, \mathrm{d}s.$$

Remarquons que $X(\rho + \cdot, x)$ est continu et adapté à la filtration $(\mathscr{G}_{t+\rho})_{t\geq 0}$, donc progressif par rapport à $(\mathscr{G}_{t+\rho})_{t\geq 0}$. Soit $B_t^{(\rho)} := B_{t+\rho} - B_\rho$, $t \geq 0$, qui est un $(\mathscr{G}_{t+\rho})$-mouvement brownien indépendant de $\mathscr{G}_\rho$. Nous obtenons

$$X(t+\rho, x) = X(\rho, x) + \int_0^t \sigma(X(u+\rho, x))\, \mathrm{d}B_s^{(\rho)} + \int_0^t b(X(u+\rho, x))\, \mathrm{d}s.$$

Par la proposition 7.4.2, nous avons $X(\cdot + \rho, x) = \Lambda(X(\rho, x), B^{(\rho)})$ et donc la loi conditionnelle de $X(\cdot + \rho, x)$ sachant $\mathscr{G}_\rho$ est égale à $\mathbf{P}_{X(\rho,x)}$. □

7.5. Le problème de martingale

Dans cette section on suppose que σ et b sont des fonctions boréliennes et localement bornées satisfaisant (7.41).

Il est important de pouvoir attacher des martingales continues aux processus que nous avons construits. On note $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ de classe C^k à support compact.

Théorème 7.5.1. *Supposons que* (7.41) *soit satisfaite. Soit* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$. *Soit*

$$\mathscr{L} f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \tag{7.43}$$

où σ^* *désigne la transposée de la matrice* σ. *Si* X *est une solution de* $E(\sigma, b)$, *alors*

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\,\mathrm{d}s$$

est une martingale.

Preuve. Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\,\mathrm{d}B_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\,\mathrm{d}\langle B^i, B^j \rangle_s \\
&= M_t + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) b_i(X_s)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(X_s)\sigma_{jk}(X_s)\,\mathrm{d}s \\
&= M_t + \int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

avec M une martingale. Cela donne le résultat cherché. □

Remarque 7.5.2. Sous l'Hypothèse 7.2.1 et (7.41), X est un processus de Markov fort continu tel que pour toute $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\,\mathrm{d}s$ soit une martingale, où $\mathscr{L}$ est l'opérateur différentiel du second ordre défini dans (7.43). On dira que X est une **diffusion** (homogène) de covariance $\sigma\sigma^*$ et de drift b. Les EDS apportent une construction explicite de diffusions.

Le processus X permet de donner une approche ou une interprétation probabiliste de nombreux résultats analytiques concernant l'opérateur $\mathscr{L}$. Ces liens entre probabilités et analyse ont été une motivation importante pour l'étude des équations différentielles stochastiques. □

Dans la suite, $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ désigne une application borélienne et localement bornée, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $a(x)$ est une matrice symétrique positive (c'est-à-dire, pour tout $(\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq 0$). On se met dans l'espace canonique $(\Omega := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d))$ avec processus canonique $(X_t)_{t\geq 0}$.

DÉFINITION 7.5.3 (Problème de martingale). *Une probabilité* $\mathbf{P}_x$ *sur* $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ *est une solution du problème de martingale* (a, b)*, issu de* $x \in \mathbb{R}^d$*, si*

(i) $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$ *;*

(ii) pour toute $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$,

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\,\mathrm{d}s$$

est une $\mathbf{P}_x$*-martingale par rapport à la filtration canonique de* X*, où*

$$\mathscr{L} f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Il y a équivalence entre existence faible/unicité faible de $E_x(\sigma, b)$ et existence/unicité pour le problème de martingale $(\sigma\sigma^*, b)$.

THÉORÈME 7.5.4. *Supposons que (7.41) soit satisfaite.*

(i) Soit $x \in \mathbb{R}^d$*. Il y a existence faible pour* $E_x(\sigma, b)$ *si et seulement si le problème de martingale* $(\sigma\sigma^*, b)$ *issu de* x *a une solution.*

(ii) Il y a unicité faible pour $E(\sigma, b)$ *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$*, il y a au plus une solution pour le problème de martingale* $(\sigma\sigma^*, b)$ *issu de* x*.*

Preuve. D'après le Théorème 3.2, si X est une solution de $E_x(\sigma, b)$, alors la loi de X dans $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ est une solution pour le problème de martingale $(\sigma\sigma^*, b)$ issu de x (notons que si $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(X_s)\,\mathrm{d}s$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale, alors elle est aussi une $(\mathscr{F}_t^X)$-martingale). La réciproque est admise, et est une conséquence du Theorem V.20.1 de Rogers et Williams (1987) qui dit que si $\mathbf{P}_x$ est une solution pour le problème de martingale $(\sigma\sigma^*, b)$ issu de x, alors on peut construire dans un certain espace filtré une solution X pour l'EDS $E_x(\sigma, b)$ telle que X a pour loi $\mathbf{P}_x$. □

Dans l'ouvrage de Stroock-Varadhan on trouve une analyse très profonde des problèmes de martingale pour les diffusions dans $\mathbb{R}^d$.

7.6. Liens avec des EDP linéaires

Nous supposons dans cette section que σ et b sont continus et indépendants du temps. Soit $\mathscr{L}$ l'opérateur différentiel défini par (7.43). On note $C_b^k(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ de classe C^k continues et bornées avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. Nous nous intéressons à des équations aux dérivees partielles (EDP) paraboliques de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{L} u, & t > 0 \\[2ex] u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7.44}$$

où $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ est continue bornée, avec

$$u(\cdot, x) \in C^1(]0, +\infty[), \qquad u(t, \cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}^d), \qquad \forall\,(t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^d. \tag{7.45}$$

THÉORÈME 7.6.1. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si u satisfait* (7.44)-(7.45) *et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$, alors*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)], \qquad t \geq 0. \tag{7.46}$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(u(t-s, X_s))_{s \in [0,t]}$:

$$\mathrm{d}u(t-s, X_s) = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{L} u\right)(t-s, X_s)\ \mathrm{d}s + \mathrm{d}M_s$$

où M est une martingale. Donc

$$u(t,x) = u(0, X_t) + M_t = f(X_t) + M_t,$$

et en prénant l'espérance nous avons le résultat souhaité. $\square$

REMARQUE 7.6.2. Le théorème 7.6.1 dit que l'*existence* de $E_x(\sigma, b)$ pour tout x implique l'*unicité* de l'EDP (7.44) dans une classe de fonctions régulières. Une autre conséquence intéressante de la représentation probabiliste (7.46) est le *principe du maximum*

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

où $\|g\|_\infty := \sup |g|$.

Un théorème d'analyse, connu sous le nom de *estimations de Schauder*, donne un résultat d'existence et unicité pour des EDP à coefficients Hölder :

THÉORÈME 7.6.3. *Soit $\theta \in]0,1[$. Si f, b et σ sont bornés et Hölder d'exposant θ, alors il existe une et une seule fonction u satisfaisant* (7.44)-(7.45).

Si σ et b sont bornés et Lipschitziens, alors les Théorèmes 7.6.1-7.6.3, combinés avec le théorème 7.2.2, donnent la représentation probabiliste de la solution de l'EDP (7.44) :

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(X(t,x))], \qquad X(t,x) = x + \int_0^t b(X(u,x))\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(X(u,x))\,\mathrm{d}B_u, \qquad t \geq 0.$$

Remarque 7.6.4. On peut essayer d'utliser une approche probabiliste à l'*existence* de solutions de (7.44). Si f et les coefficients de l'EDS b et σ sont suffisamment régulier, par exemple de classe C^3, il est possible de différencier l'application $(t,x) \mapsto \mathbb{E}_x[f(X(t,x))]$ et montrer que cette fonction satisfait (7.44)-(7.45). D'autre côté les hypothèses du théorème 7.6.3 sont bien plus faibles.

7.6.1. La formule de Feynman-Kac. Soit $V : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement ($\inf V > -\infty$). Nous nous intéressons à l'EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{L}u - Vu, & t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7.47}$$

où $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 7.6.5. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si u satisfait* (7.47)-(7.45) *et $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$, alors*

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[f(X_t)\,\exp\left(-\int_0^t V(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\right], \qquad t \geq 0. \tag{7.48}$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(e^{-\int_0^s V(X_u)\,\mathrm{d}u}u(t-s, X_s))_{s\in[0,t]}$:

$$\mathrm{d}\left(e^{-\int_0^s V(X_u)\,\mathrm{d}u}\,u(t-s,X_s)\right) = e^{-\int_0^s V(X_u)\,\mathrm{d}u}\left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{L}u - Vu\right)(t-s,X_s)\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}M_s$$

où M est une martingale. Donc

$$u(t,x) = e^{-\int_0^t V(X_u)\,\mathrm{d}u}u(0,X_t) + M_t = e^{-\int_0^t V(X_u)\,\mathrm{d}u}f(X_t) + M_t,$$

et en prénant l'espérance nous avons le résultat souhaité. □

Cette formule a été inspirée par la mécanique quantique, où V joue le rôle d'un potentiel.

7.6.2. Equations elliptiques. Nous nous intéressons à l'EDP

$$\lambda u - \mathscr{L}u = f \tag{7.49}$$

où $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$.

Théorème 7.6.6. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si u satisfait* (7.49), *$u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$, alors*

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathbb{E}\left[f(X_t)\right]\,\mathrm{d}t. \tag{7.50}$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(e^{-\lambda s}\, u(X_s))_{s\in[0,t]}$:

$$\mathrm{d}\left(e^{-\lambda s} u(X_s)\right) = e^{-\lambda s}\left(-\lambda u + \mathscr{L}u\right)(X_s)\ \mathrm{d}s + \mathrm{d}M_s$$

où M est une martingale. Donc

$$u(x) - e^{-\lambda t} u(X_t) = \int_0^t e^{-\lambda s} f(X_s)\,\mathrm{d}s - M_t.$$

En prénant l'espérance et en faisant tendre $t \to +\infty$ nous obtenons

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, \mathbb{E}_x[f(X_s)]\,\mathrm{d}s.$$

□

7.6.3. Problème de Dirichlet. Nous considérons un ouvert régulier borné $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ et l'EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{L}u, & t > 0,\ x \in \mathscr{O} \\ u(t,x) = g(x), & t > 0,\ x \in \partial\mathscr{O} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathscr{O} \end{cases} \tag{7.51}$$

où $f \in C_b(\mathscr{O})$, $g \in C_b(\partial\mathscr{O})$ et $u : \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathscr{O}} \mapsto \mathbb{R}$ est continue bornée, avec

$$u(\cdot,x) \in C^1(]0,+\infty[), \qquad u(t,\cdot) \in C_b^2(\mathscr{O}), \qquad \forall\,(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathscr{O}. \tag{7.52}$$

THÉORÈME 7.6.7. *Soit $x \in \mathscr{O}$. Si u satisfait* (7.51)-(7.52) *et $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$, alors pour tout $t \geq 0$*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{(t<\tau)} f(X_t)] + \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{(t\geq\tau)} g(X_\tau)], \qquad \tau := \inf\{u > 0 : X_u \notin \mathscr{O}\}. \tag{7.53}$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(u(t-s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}))_{s\in[0,t]}$:

$$\mathrm{d}u(t-s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}) = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \mathscr{L}u\right)(t-s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau})\ \mathrm{d}s + \mathrm{d}M_s^\tau$$

où M est une martingale bornée. Donc

$$u(t,x) = u(t - t\wedge\tau, X_{t\wedge\tau}) - M_t^\tau = \mathbb{1}_{(t<\tau)} f(X_t) + \mathbb{1}_{(t\geq\tau)} g(X_\tau) - M_t^\tau.$$

Donc, par le théorème d'arrêt, en prénant l'espérance nous avons le résultat souhaité. □

EXEMPLE 7.6.8. Si $g \equiv 0$ alors nous avons un problème de Dirichlet homogène et la solution s'écrit

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{(t<\tau)} f(X_t)].$$

On peut remarquer que cette solution est égale à celle d'une équation de Feynman-Kac avec

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathscr{O} \\ +\infty & x \notin \mathscr{O} \end{cases}$$

car dans ce cas $\exp(-\int_0^t V(X_u)\,\mathrm{d}u) = \mathbb{1}_{(t<\tau)}$. On dit que le processus X est *tué* au bord de $\mathscr{O}$.

Si nous considérons maintenant l'équation

$$\begin{cases} -\mathscr{L}u = f, & x \in \mathscr{O} \\ \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\mathscr{O} \end{cases} \tag{7.54}$$

où $f \in C_b(\mathscr{O})$ et $u : \overline{\mathscr{O}} \mapsto \mathbb{R}$ est continue bornée, avec $u \in C_b^2(\mathscr{O})$.

THÉORÈME 7.6.9. *Soit $x \in \mathscr{O}$. Si u satisfait* (7.54) *et $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$ et, en définissant $\tau := \inf\{u > 0 : X_u \notin \mathscr{O}\}$, $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$, alors*

$$u(x) = \mathbb{E}\left[g(X_\tau)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau f(X_s)\,\mathrm{d}s\right]. \tag{7.55}$$

Preuve. Le résultat suit en appliquant la formule d'Itô au processus $(u(X_{s\wedge\tau}))_{s\in[0,t]}$:

$$\mathrm{d}u(X_{s\wedge\tau}) = \mathbb{1}_{(s<\tau)}\left(-\lambda u + \mathscr{L}u\right)(X_{s\wedge\tau})\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}M_s^\tau$$

où M est une martingale bornée. Donc

$$u(x) = u(X_{t\wedge\tau}) + \int_0^{t\wedge\tau} f(X_s)\,\mathrm{d}s - M_t^\tau.$$

Par le théorème d'arrêt, en prénant l'espérance nous avons

$$u(x) = \mathbb{E}\left[u(X_{t\wedge\tau})\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} f(X_s)\,\mathrm{d}s\right]$$

et en faisant tendre $t \to +\infty$

$$u(x) = \mathbb{E}\left[g(X_\tau)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau f(X_s)\,\mathrm{d}s\right].$$

$\square$

Chapitre 8

Références bibliographiques

M. Briane et G. Pagès : *Théorie de l'intégration*, 5e édition, Vuibert 2012.

Chung, K.L. et Williams, R.J. : *Introduction to Stochastic Integration ; 2e édition.* Birkhäuser, 1990.

Comets, F. et Meyre, T. : *Calcul Stochastique et Modèles de Diffusions, Cours et Exercices.* Dunod, 2006.

Dellacherie, C. et Meyer, P.-A. : *Probabilités et Potentiel, Vol. II, Théorie des Martingales.* Hermann, 1980.

Durrett, R. : *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Wadsworth, 1984.

Ikeda, N. et Watanabe, S. : *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes ; 2e édition.* North Holland, 1988.

Le Gall, J.-F. : *Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique.* Livre à paraître ; téléchargeable sur `http://www.math.u-psud.fr/~jflegall/indexbis.html`

Karatzas, I. et Shreve, S. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus ; 2e édition corrigée.* Springer, 1994.

Mörters, P. et Peres, Y. : *Brownian Motion.* Cambridge University Press, 2010.

Revuz, D. et Yor, M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion, 3e édition.* Springer, 1999.

Rogers, L.C.G. et Williams, D. : *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. II, Itô Calculus.* Wiley, 1987.

D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, *Multidimensional diffusion processes.* Springer Verlag, second ed, 1997.