

TD0. Prérequis et rappels

Exercice 1 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $x > 0$ un réel strictement positif.

- (i) Montrer que $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$.
- (ii) Montrer que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq e^{-x^2/2}$.

Exercice 2 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (i) Calculer $\mathbb{E}(\xi^4)$ et $\mathbb{E}(|\xi|)$.
- (ii) Calculer $\mathbb{E}(e^{a\xi})$, $\mathbb{E}(\xi e^{a\xi})$ et $\mathbb{E}(e^{a\xi^2})$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel.
- (iii) Soit $b \geq 0$ un réel positif. Soit η une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendante de ξ . Montrer que $\mathbb{E}(e^{b\xi^2}) = \mathbb{E}(e^{\lambda\xi\eta})$, où $\lambda := (2b)^{1/2}$.

Exercice 3 Soient $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n , ξ_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en loi vers ξ . Montrer que ξ suit une loi gaussienne.

Exercice 4 Soient $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n , ξ_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en probabilité vers ξ . Montrer que ξ_n converge dans L^p , pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 5 Soit (ξ, η, θ) un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On suppose $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) = 0$, $\sigma_\xi^2 := \mathbb{E}(\xi^2) > 0$ et $\sigma_\eta^2 := \mathbb{E}(\eta^2) > 0$.

- 1. Montrer que $\mathbb{E}(\theta | \xi) = \mathbb{E}(\theta) + \frac{\mathbb{E}(\theta\xi)}{\mathbb{E}(\xi^2)} \xi$.
- 2. Montrer que $\mathbb{E}(\theta | \xi, \eta) = \mathbb{E}(\theta | \xi) + \mathbb{E}(\theta | \eta) - \mathbb{E}(\theta)$.
- 3. Montrer que $\mathbb{E}(\xi | \xi\eta) = 0$.
- 4. Montrer que $\mathbb{E}(\theta | \xi\eta) = \mathbb{E}(\theta)$.

Exercice 6 Soient ξ et η deux variables aléatoires intégrables, et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

-
- 1. Plus tard, on verra que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\eta | \mathcal{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\eta | \mathcal{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

Exercice 7 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble non vide A quelconque. On rappelle la définition suivante : $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha| \mathbf{1}_{(|X_\alpha| > K)}) = 0.$$

Montrer que $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_t| \mathbf{1}_B) < \varepsilon$.

Exercice 8 Soit ξ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Montrer que la famille $(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{G}), \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ sous-tribu})$ est uniformément intégrable.

Exercice 9 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|^p) < \infty$. Montrer que $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Exercice 10 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle intégrable Y telle que p.s. $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha| \leq Y$. Montrer que $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.²

Exercice 11 Soit $(X_\alpha, \alpha \in A)$ une famille de variables aléatoires réelles intégrables. Montrer qu'elle est uniformément intégrable s'il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \infty$ telle que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}[h(|X_\alpha|)] < \infty$.

Exercice 12 Soit $(X_t, t \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{R}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. On suppose que $X_t \rightarrow X_\infty$ en probabilité (quand $t \rightarrow \infty$), et que $(X_t, t \geq 0)$ est uniformément intégrable. Montrer que $X_t \rightarrow X_\infty$ dans L^1 .

Exercice 13 Soit $(X_n, n \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{Z}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \rightarrow X_\infty$ dans L^1 (quand $n \rightarrow \infty$) si et seulement si $X_n \rightarrow X_\infty$ en probabilité et $(X_n, n \geq 0)$ est uniformément intégrable.

2. En particulier, si $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha|$ est mesurable et intégrable, alors $(X_\alpha, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Chapitre I. Construction du mouvement brownien

Exercice 1 Soit $(B_t^m, t \in [0, 1])$, pour $m \geq 0$, une suite de mouvements browniens indépendants définis sur $[0, 1]$. On pose

$$B_t := B_{t-\lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor} + \sum_{0 \leq m < \lfloor t \rfloor} B_1^m, \quad t \geq 0.$$

Montrer que $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Dans les exercices suivants, $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 2 Soit $T := \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}$ (avec la convention $\inf \emptyset := \infty$). Montrer que¹ $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{1}{2}$. (On pourra comparer $\mathbb{P}(B_t \geq 1)$ et $\mathbb{P}(T \leq t)$.)

Exercice 3 Soit $\xi := \int_0^1 B_t dt$. Quelle est la loi de ξ ?

Exercice 4 Soit $\eta := \int_0^2 B_t dt$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(B_1 | \eta)$.

Exercice 5 Montrer que $B_7 - B_2$ est indépendante de $\sigma(B_s, s \in [0, 1])$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{F}_1 := \sigma(B_s, s \in [0, 1])$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(B_5 | \mathcal{F}_1)$ et $\mathbb{E}(B_5^2 | \mathcal{F}_1)$.

Exercice 7 (i) Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_0^t B_s^2 ds$ a la même loi que $t^2 \int_0^1 B_s^2 ds$.

(ii) Montrer que les processus $(\int_0^t B_s^2 ds, t \geq 0)$ et $(t^2 \int_0^1 B_s^2 ds, t \geq 0)$ n'ont pas la même loi.

Exercice 8 Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de B . Quelle est la loi de B_T ?

Exercice 9 Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s} ds$ est bien définie p.s.

Exercice 10 Soit $\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds$. Montrer que $(\beta_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

1. Plus tard, on verra que $T < \infty$ p.s.

Exercice 11 Montrer que $\int_0^\infty |B_s| \, ds = \infty$ p.s. (indication : étudier d'abord $X_t := \int_0^t |B_s| \, ds$ et $\mathbb{P}(X_t \geq x)$ en utilisant la propriété de scaling).

Exercice 12 Soit $B := (B_t, t \in [0, 1])$ un mouvement brownien standard indexé par $[0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &:= \sigma(B_s, s \in [0, t]), \\ \mathcal{G}_t &:= \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1) = \sigma(\{C; C \in \mathcal{F}_t \text{ ou } C \in \sigma(B_1)\}).\end{aligned}$$

(i) Soient $0 \leq s < t \leq 1$. Montrer que la v.a.

$$\frac{1-t}{1-s}(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_t)$$

est indépendante de $\mathcal{G}_s$. En déduire que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s) | \mathcal{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s).$$

(ii) Considérons le processus $\beta := (\beta_t, t \in [0, 1])$ défini par

$$\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s} \, ds, \quad t \in [0, 1].$$

Montrer que pour $0 \leq s < t \leq 1$, $\mathbb{E}(\beta_t | \mathcal{G}_s) = \beta_s$ p.s.

(iii) Montrer que

$$\beta_t = B_t - tB_1 + \int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s} \, ds, \quad t \in [0, 1].$$

(iv) Montrer que $(B_t - tB_1)_{t \in [0,1]}$ et $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$ sont indépendants de B_1 .

(v) Montrer que $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$ est un mouvement brownien. En déduire que le pont brownien défini par $b_t := B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$, satisfait

$$b_t = - \int_0^t \frac{b_s}{1-s} \, ds + \beta_t, \quad t \in [0, 1].$$

Chapitre II. Mouvement brownien et propriété de Markov

Dans tous les exercices, $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 1 Soient (X, Y) un couple aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu telle que X soit $\mathcal{A}$ -mesurable et Y soit indépendant de $\mathcal{A}$. Prouver que si $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable bornée, alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y) | \mathcal{A}] = \Phi(X),$$

où $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $\Phi(x) := \mathbb{E}[\varphi(x, Y)]$, $x \in E$.

Exercice 2 On définit $d_1 := \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$ et $g_1 := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$.

- (i) Les variables aléatoires d_1 et g_1 sont-elles des temps d'arrêt ?
- (ii) Calculer la loi de d_1 et celle de g_1 (indication : utiliser la propriété de Markov au temps 1 et une formule obtenue dans le cours pour la loi de τ_x , $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 3 On pose $\tau_1 := \inf\{t > 0 : B_t = 1\}$ et $\tau := \inf\{t \geq \tau_1 : B_t = 0\}$. Calculer la loi de τ à l'aide de la propriété de Markov forte.

Exercice 4 (i) Étudier la convergence en loi et probabilité de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ (quand $t \rightarrow \infty$).

- (ii) Étudier la convergence p.s. de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$.

Exercice 5 (i) Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$. Montrer que presque sûrement, $\sup_{t \in [a, b]} B_s \neq \sup_{t \in [c, d]} B_s$.

- (ii) En déduire que p.s., chaque maximum local de B est un maximum local au sens strict.

Exercice 6 En utilisant la propriété de scaling, montrer que $(\int_0^t e^{B_s} ds)^{1/t^{1/2}} \rightarrow e^{|N|}$ en loi lorsque $t \rightarrow \infty$, où N suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 7 (i) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Nous avons vu dans le chapitre 2 du poly la densité explicite de τ_a , qui permet de montrer que $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$, $\forall \lambda \geq 0$ (on donnera une preuve alternative dans le chapitre 3). En déduire que $\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp(-\frac{a^2}{2t})$, pour tout $t > 0$.

- (ii) Montrer que si ξ est une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$, $\forall x > 0$ (à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n. 0).

Exercice 8 Soit $S_t := \sup_{s \in [0, t]} B_s$, $t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|N| - |\tilde{N}|, 0\}$, où N et $\tilde{N}$ désignent deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 9 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t) dt = \infty$ en utilisant une suite $(\tau_i)_{i \geq 0}$ de temps aléatoires définis par récurrence : $\tau_0 := 0$, $\tau_{2i+1} := \inf\{t > \tau_{2i} : |B_t| = 1\}$ et $\tau_{2i+2} := \inf\{t > \tau_{2i+1} : B_t = 0\}$ pour $i \geq 0$.

Exercice 10 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s \in [0, t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t \log \log t}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \geq (1 + \varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1 + \varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{h(t)} \leq 1$, p.s.

(ii) Montrer que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{s \in [0, t]} |B_s|}{h(t)} \leq 1, \quad \text{p.s.}$$

(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1 - \theta^{-1}}[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha h(s_n)\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

(iv) Montrer que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \quad \text{p.s.}$$

(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s \in [0, t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1, 2$, ou 3 ?

(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}}$?

Exercice 1 (i) Soit (M_t) une martingale continue et positive, telle que $M_t \rightarrow 0$, p.s. ($t \rightarrow \infty$). Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x \mid \mathcal{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$, p.s.

(ii) Soit B un mouvement brownien. Calculer la loi de $\sup_{t \geq 0} (B_t - t)$.

(ii) Soit B un mouvement brownien issu de $x > 0$. Calculer la loi de $\sup_{t \leq \tau_0} B_t$, où $\tau_0 := \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$.

Dans les exercices suivants, B est un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien.

Exercice 2 Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d’arrêt bornés. Montrer que $\mathbb{E}[(B_\tau - B_\sigma)^2] = \mathbb{E}(B_\tau^2) - \mathbb{E}(B_\sigma^2) = \mathbb{E}(\tau - \sigma)$.

Exercice 3 Soient $a > 0$ et $b > 0$.

(i) Soit $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ ou } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$. En étudiant $M_t := \text{sh}(\theta(B_t + a)) \exp(-\frac{\theta^2}{2}t)$, montrer que

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_{a,b}}] = \frac{\text{ch}(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda})}{\text{ch}(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0.$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$.

(iii) Quelle est la loi de $\sup_{0 \leq t \leq \tau_{-1}} B_t$?

Exercice 4 Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 : B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou b . Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b)$.

Indication : on pourra considérer la martingale $\exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$.

Exercice 5 Dans cet exercice $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration et τ, σ sont des $(\mathcal{F}_t)$ -temps d’arrêt. On rappelle les définitions

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$$\mathcal{F}_{\tau+} := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

(i) Si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(ii) $\sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont des temps d’arrêt, et on a $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. En plus, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ et $\{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ (et donc $\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$).

(iii) Si σ et τ sont des temps d’arrêt, alors $\sigma + \tau$ est un temps d’arrêt.

(iv) Si (τ_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \uparrow \tau_n$ est aussi un temps d'arrêt, et

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n-}.$$

(iv) Si (τ_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \downarrow \tau_n$ est un $(\mathcal{F}_{t+})$ -temps d'arrêt, et

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n+}.$$

(v) Si $(\tau_n)_{n \geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\sup_{n \geq 1} \tau_n$ est un temps d'arrêt.

(vi) Si $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+}$ alors $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{F}_{\tau+}$.

Exercice 6 Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une sous-martingale. Soit $(\mathcal{G}_t)$ une sous-filtration¹ de $(\mathcal{F}_t)$. Montrer que² $N_t := \mathbb{E}(M_t | \mathcal{G}_t), t \geq 0$, est une $(\mathcal{G}_t)$ -sous-martingale.

Exercice 7 Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale telle que $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

(i) Soit $t \geq 0$ fixé et $\xi_n := \mathbb{E}(M_n^+ | \mathcal{F}_t), n \geq t \geq 0$. Montrer que si $n \geq m \geq t$ alors p.s. $\xi_n \geq \xi_m$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n^+ | \mathcal{F}_t)$ converge (lorsque $n \rightarrow \infty$) p.s. vers une variable aléatoire réelle, notée X_t .

(ii) Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale.

(iii) Montrer que M s'écrit comme différence de deux martingales positives.

Exercice 8 Soit $M := (M_t, t \in [0, 1])$ une sous-martingale telle que $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_1)$. Montrer que M est une martingale.

Exercice 9 Soit M une martingale continue. Soit $t \geq 0$. Montrer que $M_{t+\varepsilon} \rightarrow M_t$ (lorsque $\varepsilon \downarrow 0$) dans L^1 .

Exercice 10 Soit ξ une variable aléatoire réelle. Soit $M_t := \mathbb{P}(\xi \leq t | \mathcal{F}_t)$. Montrer que $(M_t, t \geq 0)$ est une sous-martingale.

Exercice 11 Soit τ un temps d'arrêt et $(M_t, t \geq 0)$ une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Montrer que $(M_{\tau \wedge t}, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

1. C'est-à-dire, une filtration telle que $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

2. En particulier, toute (sous-)martingale est une (sous-)martingale par rapport à sa filtration canonique.

Chapitre IV. Semimartingales continues

Exercice 1. (i) Soient M et N deux martingales locales continues. Montrer que si M et N sont indépendantes, alors elles sont orthogonales (c’est-à-dire, $\langle M, N \rangle = 0$). On pourra considérer d’abord le cas de M et N martingales dans L^2 .

(ii) Montrer que la réciproque est fausse. (On pourra, par exemple, considérer M^τ et $M - M^\tau$.)

Exercice 2. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Montrer que pour tout temps d’arrêt p.s. fini τ , on a $\mathbb{E}(M_\tau^2) \leq \mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau)$.

(ii) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq a\}$. Montrer que $\mathbb{E}(\langle M \rangle_{\tau_a \wedge t}) \geq a^2 \mathbb{P}(\tau_a \leq t)$, $\forall t > 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{s \in [0, t]} |M_s| \geq a) \leq a^{-2} \mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.

Exercice 3. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Soit $a > 0$ et soit $\sigma_a := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t \geq a^2\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, \sigma_a]} |M_s| > a\right) \leq \frac{1}{a^2} \mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M \rangle_\infty).$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |M_t| > a) \leq \mathbb{P}(\langle M \rangle_\infty \geq a^2) + a^{-2} \mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M \rangle_\infty)$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{t \geq 0} |M_t|) \leq 3 \mathbb{E}(\sqrt{\langle M \rangle_\infty})$.

(iv) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M \rangle_\infty}) < \infty$, alors M est une (vraie) martingale uniformément intégrable.

(v) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M \rangle_t}) < \infty$ pour tout t , alors M est une (vraie) martingale.

Exercice 4. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu’il existe une suite de temps d’arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n , $M^{\tau_n} - M_0$ soit une martingale continue bornée.

Exercice 5. Soit M un processus continu et adapté. On suppose qu’il existe une suite de temps d’arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n , M^{τ_n} est une martingale locale. Montrer que M est une martingale locale.

Exercice 6. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu’il existe $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$ et tous $s < t$,

$$\langle M \rangle_s(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega) \Leftrightarrow M_u(\omega) = M_s(\omega), \forall u \in [s, t].$$

Exercice 7. Soit M une martingale locale continue. Montrer que M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $(M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}, \tau \text{ temps d'arrêt})$ est uniformément intégrable.

Exercice 8. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s. Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt finis qui réduit M .

- (i) Soit τ un temps d'arrêt fini. Montrer que pour tout n , $\mathbb{E}(|X_{\tau \wedge \tau_n}|) \leq \mathbb{E}(|X_{\tau_n}|)$.
- (ii) Montrer que $\sup_n \mathbb{E}(|X_{\tau_n}|) = \sup\{\mathbb{E}(|X_\tau|), \tau \text{ temps d'arrêt fini}\}$.

Exercice 9. Donner un exemple de martingale locale M continue et bornée telle que $\langle M \rangle$ ne soit pas borné.

Exercice 10. Soit M une martingale locale continue, et soit A un processus à variation finie tel que $M^2 - A$ est une martingale locale. Montrer que A est indistinguable de $\langle M \rangle$.

Exercice 11. Soit M, N des martingales locales continues, et soit τ un temps d'arrêt. Montrer que $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$, $\langle N, M^\tau \rangle = \langle N^\tau, M^\tau \rangle = \langle N, M \rangle^\tau$ et $\langle M - M^\tau \rangle = \langle M \rangle - \langle M \rangle^\tau$.

Exercice 12. Soient M et N des martingales locales et continues, et soit H un processus mesurable tel que pour tout t , $\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty$ et $\int_0^t H_s^2 d\langle N \rangle_s < \infty$ p.s. Montrer que pour tout t , $\int_0^t H_s^2 d\langle M + N \rangle_s < \infty$ p.s.

Exercice 13. Soit M une martingale locale continue, et soit T un temps d'arrêt fini. Soit $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+T}$, $t \geq 0$.

- (i) Montrer que si τ est un temps d'arrêt, alors $(\tau - T)^+$ est un $(\mathcal{G}_t)$ -temps d'arrêt.
- (ii) Montrer que $(M_{t+T}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale, et calculer sa variation quadratique.

Chapitre V. Intégrale stochastique

Exercice 1 (Intégrale de Wiener) Soit H un espace d’Hilbert séparable, $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H et $(\xi_k)_k$ une suite iid définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On définit pour tout $h \in H$

$$W^n(h) = \sum_{k=1}^n \xi_k \langle e_k, h \rangle_H, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que $W^n(h)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a. $W(h)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
2. Montrer que $W(h) \sim \mathcal{N}(0, \|h\|_H^2)$ et $\mathbb{E}(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2 \rangle_H$. L’application $H \ni h \mapsto W(h)$ est une immersion isométrique de H dans un sous-espace de variables gaussiennes dans $L^2(\Omega)$.
3. Soit $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On rappelle que dans le Théorème 1.2.7 du polycopié nous avons construit $W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ et nous l’avons appelé B_t . Par analogie avec cette notation nous notons

$$\int_{\mathbb{R}_+} h_u dB_u := W(h), \quad h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt),$$

et nous appelons cette variable l’intégrale de Wiener de h .

Soit $E_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E := \cup_n E_n$. Si $|E| < +\infty$, $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E , montrer que $W(\mathbb{1}_E) = \sum_n W(\mathbb{1}_{E_n})$, où la série converge dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 2 (Le processus d’Ornstein-Uhlenbeck) Soit $\lambda > 0$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut construire un processus $(X_t, t \geq 0)$ p.s. continu et solution de

$$X_t = x - \lambda \int_0^t X_s ds + B_t, \quad t \geq 0. \quad (0.1)$$

1. Appliquer la formule d’intégration par parties à $(e^{\lambda t} X_t)_{t \geq 0}$ pour obtenir une expression explicite pour $(X_t)_{t \geq 0}$. En déduire existence et unicité de solutions de (??).
2. Montrer que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien et que la loi de X_t est gaussienne de moyenne $e^{-\lambda t} x$ et variance $\frac{(1-e^{-2\lambda t})}{2\lambda}$ pour tout $t \geq 0$.

3. Pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R})$ soit

$$P_t f(x) := \int f(y) \mathcal{N} \left(e^{-\lambda t} x, \frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{2\lambda} \right), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $P_t P_s = P_{t+s}$. En prenant la limite $s \rightarrow +\infty$, montrer que, si $\mu := \mathcal{N}(0, (2\lambda)^{-1})$, alors

$$\int P_t f d\mu = \int f d\mu.$$

4. Soit $B_t := W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ un mouvement brownien construit comme dans l'exercice 1. Soit $t \geq 0$ et $f^t(s) := \exp(-\lambda(t-s))\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$. Montrer que p.s. $X_t = e^{-\lambda t}x + W(f^t)$.

Exercice 3 (Le pont brownien) Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un MB standard et $(X_t, t \in [0, 1])$ un processus continu adapté solution de

$$X_t = - \int_0^t \frac{X_s}{1-s} ds + B_t, \quad t \in [0, 1]. \quad (0.2)$$

1. Appliquer la formule d'intégration par partie à $(\frac{X_t}{1-t})_{t \in [0,1]}$ et obtenir une expression explicite pour $(X_t, t \in [0, 1])$.
2. Montrer que $(X_t, t \in [0, 1])$ a même loi que le pont brownien $(b_t, t \in [0, 1])$ où $b_t := B_t - tB_1$ et en déduire que p.s. $X_t \rightarrow X_1 := 0$ si $t \rightarrow 1$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Avec les mêmes arguments, montrer que la seule solution de l'équation

$$X_t^y = - \int_0^t \frac{X_s^y - y}{1-s} ds + B_t, \quad t \in [0, 1], \quad (0.3)$$

a même loi que $(b_t^y, t \in [0, 1])$, où $b_t^y := B_t - tB_1 + ty$, $t \in [0, 1]$.

4. Montrer que $(b_t^y, t \in [0, 1])$ est indépendant de B_1 . En déduire que pour tous $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$ la loi de $(b_{t_1}^y, \dots, b_{t_n}^y)$ est

$$\frac{p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) p_{1-t_n}(y - x_n)}{p_1(y)} dx_1 \dots dx_n,$$

où $p_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}((B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \in A, B_1 \in E) = \int_E p_1(y) \mathbb{P}((b_{t_1}^y, \dots, b_{t_n}^y) \in A) dy.$$

Donc la loi de $(b_t^y, t \in [0, 1])$ donne une version de la loi conditionnelle de $(B_t, t \in [0, 1])$ sachant $\{B_1 = y\}$ (où l'on remarque que $\mathbb{P}(B_1 = y) = 0$).

Chapitre VI. Formule d’Itô et applications

Exercice 1. Soient X et Y deux $(\mathcal{F}_t)$ -mouvements browniens réels indépendants, et soit H un processus progressif. On pose

$$\begin{aligned}\beta_t &= \int_0^t \cos(H_s) dX_s - \int_0^t \sin(H_s) dY_s, \\ \gamma_t &= \int_0^t \sin(H_s) dX_s + \int_0^t \cos(H_s) dY_s.\end{aligned}$$

Montrer que β et γ sont des $(\mathcal{F}_t)$ -mouvements browniens indépendants.

Exercice 2. (intégrale de Stratonovich). Soient X et Y deux semimartingales continues. L’intégrale de Stratonovich $\int_0^\bullet Y \circ dX$ est définie par

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s := \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t.$$

(i) Montrer que pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{Y_{t_{i+1}^n} + Y_{t_i^n}}{2} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t Y_s \circ dX_s \quad \text{en probabilité.}$$

(ii) Montrer que si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3 , alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ dX_s.$$

Exercice 3. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien. Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s=0\}} dB_s = 0$.

Exercice 4. On note $\mathbb{P}^x$ la loi du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ issu de $x > 0$, et on pose $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact. Calculer $\mathbb{E}^x(\int_0^\tau f(B_s) ds)$.

Exercice 5. Soit $Z = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. On pose $\tau := \inf\{t : |Y_t| \geq \frac{\pi}{2}\}$. À l’aide de la martingale e^Z , déterminer la loi de X_τ .

Exercice 6. (i) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, \infty[$ une fonction de classe C^2 telle que $f'' = 2gf$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(0) = 1, f'(1) = 0$. On pose

$$u(t) := \frac{f'(t)}{2f(t)}, \quad t \geq 0.$$

Montrer que $u' + 2u^2 = g$ sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit β un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien réel standard. Soient $x_0 \geq 0$ et $a \geq 0$ des réels positifs. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, tel que

$$X_t = x_0 + 2 \int_0^t \sqrt{X_s} d\beta_s + at.$$

Montrer que $u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s ds = u(0)x_0 + \int_0^t u(s) dX_s - 2 \int_0^t u(s)^2 X_s ds, t \geq 0$.

(iii) Posons $M_t := u(0)x_0 + 2 \int_0^t u(s)\sqrt{X_s} d\beta_s, t \geq 0$. Montrer que

$$f(t)^{-a/2} \exp \left(u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s ds \right) = \mathcal{E}(M)_t.$$

(iv) Montrer que f est décroissante sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^1 g(s)X_s ds \right) \right] = f(1)^{a/2} e^{x_0 f'(0)/2}.$$

(v) Montrer que

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \frac{\theta^2}{2} \int_0^1 X_s ds \right) \right] = \frac{1}{(\text{ch}\theta)^{a/2}} \exp \left(- \frac{x_0}{2} \theta \text{th}\theta \right), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vi) Soit B un mouvement brownien réel standard. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \frac{\theta^2}{2} \int_0^1 (B_s + x)^2 ds \right) \right] = \frac{1}{(\text{ch}\theta)^{1/2}} \exp \left(- \frac{x^2}{2} \theta \text{th}\theta \right), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vii) Soient B et $\tilde{B}$ des mouvements browniens réels standard indépendants. Montrer que pour tout $t > 0$ fixé, $\inf\{s \geq 0 : |B_s| = t\}$ et $\int_0^t B_s^2 ds + \int_0^t \tilde{B}_s^2 ds$ ont la même loi.

Exercice 7. Soit $(B_t, t \in [0, 1])$ un mouvement brownien issu de 0, et soit $(\mathcal{F}_t, t \in [0, 1])$ (l'augmentation habituelle de) la tribu canonique de B . On se donne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, et on pose $M_t := \mathbb{E}[f(B_1) | \mathcal{F}_t], t \in [0, 1]$. Écrire explicitement une constante c et un processus progressif H tels que $M_t = c + \int_0^t H_s dB_s$.

Exercice 8. (troisième identité de Wald). Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien standard, et soit τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(e^{\tau/2}) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\exp(B_\tau - \frac{\tau}{2})] = 1$.

Exercice 9. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien, et soit $S_t := \sup_{s \in [0, t]} B_s$. On pose $X_t := S_t - B_t$.

(i) Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_u \neq 0\}} dS_u = 0$.

(ii) Montrer que $Y_t := X_t^2 - t$ est une (vraie) martingale.

(iii) Soit $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t = 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(\tau)$.

Exercice 10. Soit B un mouvement brownien issu de 0.

(i) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$ telle que pour tout t , $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} = e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} \bullet \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$. Soit τ un temps d'arrêt fini $\mathbb{P}$ -p.s. Montrer que $\mathbb{E}[e^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}] = 1$ si et seulement si $\tau < \infty$ $\mathbb{Q}$ -p.s.

(ii) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ des réels tels que $\gamma a \geq 0$. Si $\tau_a^{(\gamma)} := \inf\{t \geq 0 : B_t + \gamma t = a\}$, alors pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_a^{(\gamma)}}] = e^{\gamma a - \sqrt{(\gamma^2 + 2\lambda)}a^2}$.

Exercice 11. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien standard, et soit H un processus progressif. On suppose qu'il existe des constantes $0 < c \leq C < \infty$ telles que $c \leq H_t(\omega) \leq C$ pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2(t) dt < \infty$, on a

$$\exp\left(\frac{c^2}{2} \int_0^\infty f^2(t) dt\right) \leq \mathbb{E}\left\{\exp\left(\int_0^\infty f(t) H_t dB_t\right)\right\} \leq \exp\left(\frac{C^2}{2} \int_0^\infty f^2(t) dt\right).$$

Exercice 12. Soit B un mouvement brownien issu de 0, et soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On pose $\tau := \inf\{t \geq 0 : |B_t + \gamma t| = 1\}$. Montrer que $B_\tau + \gamma\tau$ et τ sont indépendantes.

Exercice 13. Soit B un mouvement brownien standard, et soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $b := \int_0^1 (f'(t))^2 dt < \infty$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, 1]} |B_t + f(t)| \leq x\right) \leq e^{ax - (b/2)} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, 1]} |B_t| \leq x\right),$$

où $a := |f'(1)| + \int_0^1 f''(t) dt$.

Exercice 14. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien réel standard. Soit U une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}_1$ -mesurable indépendante de B telle que $\mathbb{E}(e^{aU}) < \infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$. On pose $f(t, x) := \mathbb{E}(e^{xU - tU^2/2})$, $g(t, x) := \mathbb{E}(Ue^{xU - tU^2/2})$ et $h(t, x) := \frac{g(t, x)}{f(t, x)}$.

(i) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathcal{F}_1$ définie par $\mathbb{Q} := f(1, B_1) \bullet \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_1}$. Montrer que $B_t - \int_0^t h(s, B_s) ds$, $t \in [0, 1]$, est un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien.

(ii) On pose $\xi_t := B_t + tU$, $t \in [0, 1]$. Montrer que pour toute $F : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}\left\{F(\xi_t, t \in [0, 1])\right\} = \mathbb{E}\left\{f(1, B_1)F(B_t, t \in [0, 1])\right\}.$$

En déduire que $\xi_t - \int_0^t h(s, \xi_s) ds$, $t \in [0, 1]$, est un $\mathbb{P}$ -mouvement brownien.

(iii) Soit $\mathcal{G} := \sigma(\xi_t, t \in [0, 1])$. Calculer $\mathbb{E}(U | \mathcal{G})$.

(iv) Définissons la probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{F}_1$ par $\tilde{\mathbb{Q}} := e^{-UB_1 - U^2/2} \bullet \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_1}$. Montrer que sous $\tilde{\mathbb{Q}}$, $(\xi_t, t \in [0, 1])$ et U sont indépendants, et que la loi de U est la même sous $\mathbb{P}$ et sous $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Chapitre VII. Équations différentielles stochastiques

Exercice 1. Considérons une solution X de l'EDS $E_x(\sigma, b)$ en dimension 1.

- (1) Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\frac{1}{2}s''\sigma^2 + s'b = 0$. Montrer que $(s(X_t), t \geq 0)$ est une martingale locale continue. La fonction s est appelée une **fonction d'échelle** de X .
- (2) On suppose que σ est continue et que s' et σ ne s'annulent pas. Soient $a < x < b$ des réels, et soit $T_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin [a, b]\}$ (avec $\inf \emptyset := \infty$).

Montrer que $\mathbb{P}^x(T_{a,b} < \infty) = 1$ (on pourra utiliser le Théorème de Dubins-Schwarz), et que (en utilisant des formules analogues pour le MB)

$$\mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}} = a\} = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}, \quad \mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}} = b\} = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

Exercice 2. (1) Soit $X := (X_t, t \geq 0)$ solution de $E(\sigma, b)$ à valeurs dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^2 telle que $\mathcal{L}f = \lambda f$, où $(\mathcal{L}f)(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Montrer que $(f(X_t) e^{-\lambda t}, t \geq 0)$ est une martingale locale continue.

- (2) Soit $B := (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $B_0 := a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $X := |B|^2$, où $|B|$ désigne la norme euclidienne de B . Montrer que X est solution d'une EDS $E(\sigma, b)$ dont on précisera les coefficients σ et b .
- (3) On suppose désormais $\lambda \geq 0$. Montrer que $2tg''(t) + 3g'(t) = \lambda g(t)$, $t > 0$, pour $g(t) = \frac{e^{\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ ou $g(t) := \frac{e^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$.
- (4) Soit $f(t) = \frac{\text{sh}(\sqrt{2\lambda t})}{\sqrt{2\lambda t}}$, $t > 0$. Montrer que $M_t := f(X_t) e^{-\lambda t}$ est une martingale locale.
- (5) Soient $x > |a|^2$ et $T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. En utilisant la martingale locale $M_t := f(X_t) e^{-\lambda t}$, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_x}) = \frac{f(|a|^2)}{f(x)}$.
- (6) On suppose maintenant $B_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_x}) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{2\lambda x}}{\text{sh}(\sqrt{2\lambda x})}$, $\lambda \geq 0$ (il faudra utiliser la propriété de Markov forte).

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B)$ un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien (réel issu de 0) et σ et b des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)| \leq M, \quad |b(x)| \leq M, \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|, \quad |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

Soit, x étant fixé, X la solution de l'EDS $X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds$.

On considère le processus X^n défini pour $n \geq 1$ par $X_0^n = x$ et

$$X_t^n = X_{k/n}^n + \sigma(X_{k/n}^n)(B_t - B_{k/n}) + b(X_{k/n}^n) \left(t - \frac{k}{n} \right), \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

On pose $\tau_s^n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}(s)$.

- (1) Montrer que $X_t^n = x + \int_0^t \sigma(X_{\tau_s^n}) dB_s + \int_0^t b(X_{\tau_s^n}) ds$.
- (2) Montrer qu'il existe une constante A telle que $\mathbb{E}\{(X_t^n - X_{\tau_t^n}^n)^2\} \leq \frac{A}{n}, \forall t \in [0, 1], \forall n \geq 1$.
- (3) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} &\leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X_{\tau_s^n}^n)^2\} ds \\ &\leq 8K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X_s^n)^2\} ds + \frac{32K^2 M^2}{n}. \end{aligned}$$

En déduire qu'il existe une constante C_1 telle que $\sup_{t \in [0, 1]} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} \leq \frac{C_2}{n}, \forall n \geq 1$.

- (4) Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que pour toute fonction f à dérivées continues bornées, $|\mathbb{E}\{f(X_1^n) - f(X_1)\}| \leq \|f'\|_\infty \frac{C_2}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$.

Exercice 4. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien standard.

- (1) Montrer qu'il existe un processus X continu adapté tel que

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s ds, \quad t \geq 0.$$

- (2) Montrer que X est adapté par rapport à la filtration canonique de B .
- (3) Soit $X_t^* := \sup_{s \in [0, t]} |X_s|$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_1^*)^2] < \infty$. En considérant $X_t - X_1$, montrer que $\mathbb{E}[(X_2^*)^2] < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_t^*)^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$.
- (4) Soit $Y_t := e^{1/(1+t)}(1 + X_t^2)$, $t \geq 0$. Montrer que Y est une surmartingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$). On en déduit que $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t$ existe p.s. (et la limite est p.s. finie).
- (5) Montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t|$ existe p.s.
- (6) En considérant la partie à variation finie de Y , montrer que $\int_0^\infty X_s^2 ds < \infty$, p.s.
- (7) Montrer que $\liminf_{t \rightarrow \infty} |X_t| = 0$ p.s. En déduire que $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0$ p.s.

Exercice 5. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien standard. Soit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \leq 1$. Soit $X^{x, \varepsilon} := (X_t^{x, \varepsilon}, t \geq 0)$ solution de l'EDS

$$X_t^{x, \varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x, \varepsilon}) ds, \quad t \geq 0.$$

Soit $y^x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Montrer que

- (1) $\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{x, \varepsilon} - y^x(s)| \leq \varepsilon B_t^* e^{Kt}$, $t \in [0, 1]$, ou $K > 0$ est une constante
- (2) pour tout $\delta > 0$, il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, dont les valeurs ne dépendent pas de (x, ε) , telles que $\mathbb{P}\{\sup_{t \in [0, 1]} |X_t^{x, \varepsilon} - y^x(t)| > \delta\} \leq c_1 \exp(-\frac{c_2}{\varepsilon^2})$.

Exercice 6. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $]0, 1]$, tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2) ds.$$

- (1) Soit $\gamma \in]0, 1[$ un réel, et soit $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq \gamma\}$ ($\inf \emptyset := \infty$). On considère le processus $U_t := f(X_{t \wedge \tau})$, $t \geq 0$, où $f(x) := \frac{x^2}{1-x^2}$, $x \in [0, 1[$.

Montrer que $(U_t, t \geq 0)$ est une semimartingale, et écrire sa décomposition canonique.

- (2) Montrer que $\mathbb{E}(U_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.
- (3) Montrer à l'aide du lemme de Fatou que $f(\gamma)\mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq 1$ et en déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.
- (4) Montrer que presque sûrement, $X_t < 1$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, on peut p.s. définir le processus $V_t := \frac{X_t^2}{1-X_t^2}$, $t \geq 0$.
- (5) Montrer que $(V_t, t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on précisera les coefficients.
- (6) Écrire $(X_t, t \geq 0)$ en fonction de $(B_t, t \geq 0)$.