UNIVERSITÉ PARIS CITÉ — CALCUL STOCHASTIQUE ET PROCESSUS DE DIFFUSION
M2MO — SIMON COSTE - CYRIL LABBÉ

Examen - Lundi 6 Novembre 2023 - 3h

Les calculatrices, téléphones et documents sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte à la correction.

Exercice 1. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien.

a) Calculer les différentielles stochastiques suivantes :

$$d(\sin(B_t^2)) \ , \quad d(e^{-B_t - t}) \ .$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $T_x := \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$. On fixe $a, b > 0$. Montrer que $T_{a+b} - T_a$ est indépendant de T_a et a même loi que T_b.

c) Soit $p \geq 1$. Montrer que la v.a. $\sup_{t \in [0,1]} |B_t|$ appartient à L^p.

Solution de l'exercice 1.

a) Par la formule d'Itô :

$$dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt \ ,$$

et ainsi

$$d(\sin(B_t^2)) = \cos(B_t^2)(2B_t dB_t + dt) - 2\sin(B_t^2)B_t^2 dt \ .$$

De même

$$d(e^{-B_t - t}) = -\frac{1}{2}e^{-B_t - t}dt - e^{-B_t - t}dB_t \ .$$

b) La variable aléatoire T_x est un temps d'arrêt. Par la Propriété de Markov forte du mouvement Brownien, le processus

$$W_t := B_{t+T_a} - B_{T_a} \ , t \geq 0 \ ,$$

est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$. Si l'on note $T'_x := \inf\{t \geq 0 : W_t = x\}$ alors p.s. $T_{a+b} = T_a + T'_b$ et ainsi : $T_{a+b} - T_a$ a même loi que T_b et est indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$ et donc de T_a.

c) Il suffit de traiter le cas $p > 1$. Par l'inégalité de Doob, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in [0,1]} |B_t|^p] \leq C \sup_{t \in [0,1]} \mathbb{E}[|B_t|^p] = C\mathbb{E}[|B_1|^p] \ .$$

Or B_1 suit une loi gaussienne et admet donc des moments de tous ordres.

Exercice 2. Soit un entier $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $W = (W^1, \ldots, W^n)$ un mouvement Brownien n-dimensionnel adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

a) (Question préliminaire) Soit $\phi = (\phi_t^1, \ldots, \phi_t^n)_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On suppose que ϕ ne touche jamais $0 \in \mathbb{R}^n$ p.s. Montrer que le processus $B = (B_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$B_t := \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\phi_s^i}{\sqrt{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2}} dW_s^i \ ,$$

est un mouvement Brownien uni-dimensionnel dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

On fixe $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et l'on pose

$$X_t := \sum_{i=1}^n (x^i + W_t^i)^2 \ , \quad t \geq 0 \ .$$

b) Identifier un processus ϕ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et un processus ψ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t \phi_s^i dW_s^i + \int_0^t \psi_s ds \ , \quad t \geq 0 \ .$$

c) On admettra que ϕ ne touche jamais 0 p.s. Montrer qu'il existe un mouvement Brownien uni-dimensionnel B, adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tel que X soit solution de

$$dX_t = n dt + 2\sqrt{X_t} dB_t \ , \quad X_0 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 \ .$$

d) Peut-on adapter les deux questions précédentes au cas où $n = 1$?

Solution de l'exercice 2.

a) Pour chaque i on pose $H_s^i := \frac{\phi_s^i}{\sqrt{(\phi_s^1)^2+\ldots+(\phi_s^n)^2}}$. Il s'agit d'un processus continu et adapté donc $\int_0^t \frac{\phi_s^i}{\sqrt{(\phi_s^1)^2+\ldots+(\phi_s^n)^2}} dW_s^i$ est une martingale locale de crochet égal à

$$\int_0^t \frac{(\phi_s^i)^2}{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2} ds \ .$$

Ainsi le processus B_t est une martingale locale, issue de 0, de crochet égal à

$$\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(\phi_s^i)^2}{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2} ds = t \ .$$

Par la caractérisation de Lévy, il s'agit d'un mouvement Brownien.

b) On calcule

$$dX_t = \sum_{i=1}^n 2(x^i + W_t^i) dW_t^i + \sum_{i=1}^n dt \ .$$

Ainsi $\phi_s^i = 2(x^i + W_s^i)$ et $\psi_s = n$.

c) On remarque que

$$\int_0^t \phi_s dW_s = \int_0^t \sum_i \frac{\phi_s^i}{\sqrt{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2}} \sqrt{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2} dW_s^i \ .$$

Par le résultat préliminaire

$$B_t := \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\phi_s^i}{\sqrt{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2}} dW_s^i \ ,$$

est un mouvement Brownien uni-dimensionnel dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Par ailleurs

$$\sqrt{(\phi_s^1)^2 + \ldots + (\phi_s^n)^2} = \sqrt{4\sum_i (x^i + W_s^i)^2} = 2\sqrt{X_s} \ ,$$

et ainsi

$$\int_0^t \phi_s dW_s = \int_0^t 2\sqrt{X_s} dB_s \ ,$$

ce qui permet de conclure.

d) L'essentiel des arguments est identique. La différence porte sur le fait que le mouvement Brownien uni-dimensionnel touche 0 (ou n'importe quel autre point) en temps fini de sorte que ϕ touche 0 en temps fini p.s. Cependant si l'on pose

$$B_t := \int_0^t q_s dW_s \ ,$$

avec

$$q_s := \begin{cases} +1 \text{ si } x + W_s > 0 \\ -1 \text{ si } x + W_s < 0 \end{cases}$$

alors B est un mouvement Brownien et l'on a

$$dX_t = 2(x + W_t)dW_t + dt = 2|x + W_t| q_t dW_t + dt = 2\sqrt{X_t} dB_t + dt \ .$$

Exercice 3. Pour $a, b, t \geq 0$, on cherche à calculer

$$I_t(a, b) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right\}\right].$$

a) Calculer $I_t(a, 0)$ pour tout a. On supposera désormais $b > 0$.

b) Trouver un processus ψ localement intégrable tel que le processus $(Z_s)_{s\geq 0}$ défini ci-dessous soit une martingale locale :

$$Z_s := \exp\left\{-b\int_0^s B_r \, dB_r - \int_0^s \psi(r) \, dr\right\}.$$

c) Exprimer Z_s en fonction de b, s, B_s et $\int_0^s B_r^2 dr$ seulement, et en déduire que

$$I_t(a, b) = \mathbb{E}\left[Z_t \exp\left\{\left(\frac{b}{2} - a\right) B_t^2\right\}\right] \exp\left(-\frac{bt}{2}\right).$$

d) Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ sous laquelle le processus $(W_s)_{s\in[0,t]}$ défini par $W_s := B_s + b\int_0^s B_r dr$ soit un mouvement brownien.

e) Montrer que pour tout $s \in [0,t]$,

$$B_s = \int_0^s e^{b(r-s)} dW_r.$$

f) Montrer que sous la mesure $\mathbb{Q}$, la v.a. B_t suit la loi $\mathcal{N}(0, (1-e^{-2bt})/(2b))$.

g) En déduire la formule suivante :

$$I_t(a,b) = \left\{ \cosh(bt) + \frac{2a}{b}\sinh(bt) \right\}^{-\frac{1}{2}} .$$

Solution de l'exercice 3.

a) En posant $\sigma^2 = 1/(2a + \frac{1}{t})$, on trouve par la formule de transfert

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(2a + \frac{1}{t})\frac{x^2}{2})dx = \frac{\sigma}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2at+1}} .$$

b) On choisit ψ de sorte que Z soit $\mathcal{E}(-b\int_0^t B_s\, dB_s)$. On voit qu'on doit prendre $\psi_s = \frac{b^2 B_s^2}{2}$.

c) On sait que $dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt$ et donc que $\int_0^t B_s dB_s = B_t^2/2 - t/2$. On en déduit que $Z_t = \exp(-\frac{b}{2}B_t^2 + \frac{bt}{2} - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds)$. Le résultat en découle immédiatement.

d) On cherche L tel que $< B, L >= -b\int B ds$, clairement on peut prendre $L = -b\int B_s dB_s$ c'est à dire $L_t = -\frac{b}{2}B_t^2 + \frac{tb}{2}$. On veut poser $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(L)_t$ et pour que cela définisse bien une probabilité il faut vérifier que l'exponentielle stochastique est une vraie martingale sur $[0,t]$. Or

$$\mathcal{E}(L)_s = \exp(-b\int_0^s B_r dB_r - \frac{b^2}{2}\int_0^s B_r^2 dr) \le \exp(-\frac{b}{2}(B_s^2 - s)) \le \exp(\frac{bt}{2}) ,$$

et ainsi $(\mathcal{E}(L)_s, s \in [0,t])$ est bornée donc il s'agit d'une vraie martingale. Par le théorème de Girsanov on en déduit que W est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.

e) On a $d(e^{bt}B_t) = e^{bt}dB_t + be^{bt}B_t dt = e^{bt}dW_t$. Par ailleurs ces deux processus partent de 0 donc on a bien l'égalité demandée.

f) On peut donner plusieurs arguments. Il s'agit d'une intégrale de Wiener donc la variance de la gaussienne est le carré de la norme L^2 de l'intégrand. Il s'agit aussi de la limite en proba d'une suite d'approximation constantes par morceaux : on peut calculer explicitement la loi de l'approximation et passer à la limite.

g) On pose $\sigma^2 := (1-e^{-2bt})/(2b)$. On calcule

$$\begin{aligned} I_t(a,b) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\exp\left\{ \left(\frac{b}{2} - a\right) B_t^2 \right\}] \exp\left(-\frac{bt}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} \exp(u^2(\frac{b}{2} - a - \frac{1}{2\sigma^2}))du\; e^{-bt/2} . \end{aligned}$$

En posant $(\sigma')^2 = \frac{1}{-b+2a+\sigma^{-2}}$ on trouve

$$I_t(a,b) = e^{-bt/2}\sigma'/\sigma \ .$$

Un calcul donne alors

$$I_t(a,b)^2 = \frac{e^{-bt}}{(\frac{a}{b}-\frac{1}{2})(1-e^{-2bt})+1} = \frac{1}{\frac{2a}{b}\sinh(bt)+\cosh(bt)} \ .$$

Exercice 4. Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale à trajectoires continues, issue de 0 et uniformément intégrable. On note $Y_\infty := \lim_{t\to\infty} Y_t$ p.s. Soit $p \geq 1$ un réel fixé.
On dit que la martingale Y satisfait la propriété (P) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout temps d'arrêt T on ait

$$\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C \ .$$

a) (Question préliminaire) Montrer que si Y_∞ est bornée alors la martingale Y satisfait la propriété (P).

Partie A. (On ne suppose pas que Y_∞ est bornée). On souhaite prouver que Y satisfait la propriété (P) avec la constante C si et seulement si pour tout temps d'arrêt T

$$\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p] \leq C\mathbb{P}(T<\infty) \ .$$

b) Etablir le sens direct de l'équivalence : si Y satisfait la propriété (P) avec la constante C alors pour tout temps d'arrêt T

$$\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p] \leq C\mathbb{P}(T<\infty) \ .$$

c) Soit T un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$. On pose

$$T^A(\omega) := \begin{cases} T(\omega) \text{ si } \omega \in A \\ +\infty \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

Montrer que T^A est un temps d'arrêt.

d) Vérifier que $\mathbf{1}_A|Y_\infty - Y_T| = |Y_\infty - Y_{T^A}|$ p.s. puis établir le sens réciproque de l'équivalence.

Partie B.

e) Soient S et T deux temps d'arrêt. On rappelle une propriété des martingales uniformément intégrables : la martingale arrêtée Y^T est encore une martingale uniformément intégrable dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Justifier alors que

$$Y_{S\wedge T} = \mathbb{E}[Y_T \mid \mathcal{F}_S] \ .$$

f) En utilisant le résultat de la partie A, montrer que si Y satisfait la propriété (P) avec la constante C alors pour tout temps d'arrêt S, la martingale arrêtée Y^S satisfait la propriété (P) avec la même constante C.

On suppose à présent que Y satisfait la propriété (P) avec la constante $C=1$.

g) Soit $a > 0$ et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de temps d'arrêt définis par récurrence par

$$R_0 = 0\ , \quad R_{n+1} = \inf\{t \geq R_n : |Y_t - Y_{R_n}| \geq a\} \quad (\inf\emptyset = \infty)\ .$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$

$$a^p \mathbb{P}(R_{n+1} < \infty) \leq \mathbb{P}(R_n < \infty)\ .$$

h) En déduire que pour tout $x > 0$

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} Y_t > x) \leq 2^p 2^{-px/2}\ .$$

Solution de l'exercice 4.

a) Il existe $K > 0$ tel que $|Y_\infty| \leq K$ p.s. Ainsi pour tout tout temps d'arrêt T, p.s.

$$|Y_T| = |\mathbb{E}[Y_\infty \mid \mathcal{F}_T]| \leq \mathbb{E}[|Y_\infty| \mid \mathcal{F}_T] \leq K\ .$$

On en déduit que $|Y_\infty - Y_T| \leq 2K$ p.s. et ainsi la propriété (P) est vérifiée.

b) On suppose que Y satisfait la propriété (P) avec la constante C. Soit T un temps d'arrêt. On a

$$|Y_\infty - Y_T|^p = |Y_\infty - Y_T|^p \mathbf{1}_{T<\infty}\ .$$

La propriété (P) assure que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{T<\infty}\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T]] \leq C\mathbb{P}(T < \infty)\ .$$

c) Soit $t \geq 0$. On a

$$\{T^A \leq t\} = \{T \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t\ ,$$

et ainsi T^A est un temps d'arrêt.

d) On commence par vérifier que $\mathbf{1}_A|Y_\infty - Y_T| = |Y_\infty - Y_{T^A}|$ p.s. Sur l'événement A on a

$$\mathbf{1}_A|Y_\infty - Y_T| = |Y_\infty - Y_T| = |Y_\infty - Y_{T^A}|\ ,$$

tandis que sur l'événement $A^\complement$

$$\mathbf{1}_A|Y_\infty - Y_T| = 0\ , \quad |Y_\infty - Y_{T^A}| = |Y_\infty - Y_\infty| = 0\ .$$

On a donc bien l'identité voulue.
Soit T un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{1}_A\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_{T^A}|^p \mid \mathcal{F}_T]] \\
&= \mathbb{E}[|Y_\infty - Y_{T^A}|^p] \\
&\leq C\mathbb{P}(T^A < \infty) = C\mathbb{E}[\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{T<\infty}]\ .
\end{aligned}$$

On a donc montré que p.s.

$$\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C\mathbf{1}_{T<\infty} \leq C\ .$$

e) La martingale arrêtée Y^T est fermée par Y_T

$$Y_{t\wedge T} = \mathbb{E}[Y_T \mid \mathcal{F}_t] \ .$$

On applique le théorème d'arrêt au temps S et l'on obtient

$$Y_{S\wedge T} = \mathbb{E}[Y_T \mid \mathcal{F}_S] \ .$$

f) Soit T un temps d'arrêt. On a

$$Y^S_\infty - Y^S_T = \mathbb{E}[Y_\infty - Y_T \mid \mathcal{F}_S] \ ,$$

et ainsi

$$\mathbb{E}[|Y^S_\infty - Y^S_T|^p] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_S]] = \mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p] \leq C\mathbb{P}(T < \infty) \ .$$

g) On applique ce que l'on vient d'établir à la martingale arrêtée $Y^{R_{n+1}}$:

$$\mathbb{E}[|Y^{R_{n+1}}_{R_n} - Y^{R_{n+1}}_\infty|^p] \leq \mathbb{P}(R_n < \infty) \ .$$

Or $|Y^{R_{n+1}}_{R_n} - Y^{R_{n+1}}_\infty|^p = a^p \mathbf{1}_{R_{n+1}<\infty}$ et l'on en déduit que

$$a^p\mathbb{P}(R_{n+1} < \infty) \leq \mathbb{P}(R_n < \infty) \ .$$

h) Le cas $x < 2$ est trivialement vrai. On suppose $x \geq 2$ et l'on prend $a = 2$ avec les temps d'arrêt R_n. On voit que

$$\mathbb{P}(R_k < \infty) \leq 2^{-pk} \ , \quad \forall k \geq 1 \ .$$

On note n la partie entière de $x/2$. On observe que

$$\{\sup_{t\geq 0} Y_t > x\} \subset \{R_n < \infty\} \ .$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} Y_t > x) \leq \mathbb{P}(R_n < \infty) \leq 2^{-pn} = 2^p 2^{-p(n+1)} \leq 2^p 2^{-px/2} \ .$$