Examen 15h45-18h45
Calcul stochastique et modèles de diffusion
Amphi ?? Halle aux Farines

Pas de documents autres que les notes manuscrites du cours; pas de téléphone.

12 Novembre 2021

Exercice 1 Soit $W_t, t \geqslant 0$ un mouvement Brownien issu de x. On considère le processus $\int_0^t W^2(s)ds$.

1. Montrer que ce processus est Gaussien.
2. Soit $X_t, t \geqslant 0$ un processus Gaussien. Montrer que
$$X_s - \frac{\mathrm{Cov}(X_s, X_t)}{\mathrm{Cov}(X_t, X_t)}(X_t - z)$$
est le pont de X, i.e. un processus qui a même loi que X sachant $X_t = z$.
3. En déduire $\mathbb{E}(\int_0^t W^2(s)ds | W_t = z)$.
4. Donner aussi la loi conditionnelle de $\int_0^t s^2 W_s ds$ sachant $W_t = z$.

Exercice 2 Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 bornée et de dérivée bornée telle que $\int_{x_0}^x \frac{1}{\sigma(y)} dy$ est finie pour tout x. Soit X la solution de l'EDS
$$dX_t = \frac{1}{2}\sigma(X(t))\sigma'(X(t))dt + \sigma(X(t))dB_t, X(0) = x_0.$$

1. Montrer que l'équation admet bien une solution unique.
2. Donner l'équation satisfaite par $S(X(t))$.
3. On suppose $\sigma > 0$. En déduire une représentation de X_t.

Exercice 3 : Girsanov et densités Soit $W_t, t \geqslant 0$ un mouvement Brownien.

1. Soit Y la solution de l'EDS $dY_t = -\theta Y(t)dt + dW_t, Y(0) = x$. Ici θ est un réel quelconque. Enoncer le théorème de Girsanov.
2. En déduire la densité $\frac{d\mathbb{P}_Y}{d\mathbb{P}_W}$.
3. Montrer aussi que pour tout K, t, x on a $\mathbb{P}(Y(t) > K) > 0$.
4. Etendre le résultat de la dernière question au cas où l'on remplace $\theta Y(t)$ par $a(Y(t))$ (où a est une fonction Lipschitz) dans l'EDS.

Exercice 4 Soit $W_t, t \geqslant 0$ un mouvement Brownien issu de x. Soit g une fonction continue positive (et non identiquement nulle). On suppose que $\int_0^\infty g(W_s)ds = \infty$. On considère le problème de calculer des distributions de fonctionnelles du Mouvement Brownien à certains temps aléatoires. On pose
$$\nu(t) := \inf\{s : \int_0^s g(W(v))dv = t\}.$$

1. Montrer que ν est un temps d'arrêt p.s. fini pour la filtration naturelle du Mouvement Brownien.
2. Soit f une fonction continue bornée et ϕ une fonction de classe C^2 à dérivées bornées. Soit aussi $\rho > 0$. On pose $h(s) = \phi(W_s)e^{-\int_0^s(\rho + f(W_u))du}$. Donner une expression de $h(s) - h(0)$ en utilisant la formule d'Itò.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{[0,\nu(t))}(s) = \mathbf{1}_{[0,t)}\left(\int_0^s g(W(u))du\right)$.
4. En déduire que
$$h(\nu(t)) - \phi(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t)}\left(\int_0^s g(W(u))du\right) e^{-\int_0^s(\rho + f(W_u))du}\left(\phi'(W_s)dW_s + \frac{\phi''(W_s)}{2}ds - (\rho + f(W_s))\phi(W_s))ds\right).$$

5. Calculer $\mathbb{E}h(\nu(t))$.
6. Calculer aussi $\int_0^\infty \lambda \mathbb{E}h(\nu(t))e^{-\lambda t}$. On utilisera (en le justifiant) que $\int \lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,t)}\left(\int_0^s g(W(u))du\right)dt = e^{-\lambda \int_0^s g(W(u))du}$.
7. Soit maintenant T_1, T deux variables aléatoires exponentielles independantes de paramètre , λ et ρ, indépendantes de $W_t, t \geqslant 0$. Montrer que $\tilde{U}(x) = \mathbb{E}_x h(\nu(T_1)) - \phi(x) = \frac{1}{\rho}\mathbb{E}_x[\frac{1}{2}\phi''(W(T)) - (\rho + f(W(T))\phi(W_t)]e^{-\int_0^T(\lambda g(W(u)) + f(W(u)))du}$.
8. On admet que $\tilde{U}$ satisfait l'équation

$$1/2\tilde{U}''(x) - (\lambda g(x) + f(x) + \rho)\tilde{U} = -1/2\phi''(x) + (\rho + f(x))\phi(x).$$

9. Montrer que $U(x) = \mathbb{E}_x\phi(W(\nu(T_1)))e^{-\int_0^{\nu(T_1)} f(W_s)ds} = \lim_{\rho\to 0}\tilde{U}(x) + \phi(x)$.
10. En déduire l'équation satisfaite par $U(x)$.
11. On suppose $\phi = 1, f = \gamma$ pour une constante $\gamma > 0$ et $g = \mathbf{1}_{[r,\infty)}$. Donner l'expression de $\nu(t)$.
12. Montrer que

$$U(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda+\gamma}(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\lambda+\gamma})}e^{-(r-x)\sqrt{2\gamma}}$$

si $x \leqslant r$.

Exercice 5. Soit $(B_t), t \geqslant 0$ un mouvement Brownien réel issu de 0. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on pose $T_x = \inf\{t \geqslant 0, B_t = x\}$. Soit $a < 0 < b$ donnés et $T = T_a \wedge T_b$.

1. Montrer que pour tout λ et α, $M_t^\lambda = e^{\lambda(B_t-\alpha)-\frac{\lambda^2}{2}t}, t \geqslant 0$ est une martingale.
2. On pose $\alpha = (a+b)/2$. En utilisant $M_t^\mu + M_t^{-\mu}$ pour un μ bien choisi, calculer, pour $\lambda > 0$, $\mathbb{E}(e^{-\lambda T})$.
3. En choisissant bien α, montrer avec $M_t^\mu - M_t^{-\mu}$ que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda T}1_{T=T_a}) = \frac{\sinh(b\sqrt{2\lambda})}{\sinh((b-a)\sqrt{2\lambda})}.$$

4. Déduire de la question précédente la valeur de $\mathbb{P}(T_a < T_b)$.