Examen durée 3h
Calcul stochastique et modèles de diffusion
HAF-Amphi 8C

Pas de documents autres que les notes manuscrites du cours; pas de téléphone.
Pensez à bien justifier vos réponses.

10 Novembre 2022- 15h45– 18h45

Exercice 1 On considère un $\mathcal{F}$ mouvement brownien réel W sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on pose

$$\tau := \ inf\{t > 0 : W(t) \in (-A, B)^c\}$$

avec A et $B > 0$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ le processus $X_\theta = e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \cos(\theta(W(t) - (B-A)/2))$est une martingale.
2. Rappeler pourquoi τ est un temps d'arrêt. Rappeler aussi pourquoi il est fini p.s.
3. Montrer que $X_\theta(\tau) = \exp(\theta^2\tau/2)\cos((A+B)\theta/2)$.
4. Montrer que si $\theta \in [0, \pi/(A+B))$ (on fera cette hypothèse pour la suite de l'exercice) alors $X_\theta(t \wedge \tau)$ est une martingale positive.
5. Déduire de (3) que
$$\mathbb{E}\exp(\theta^2\tau/2) \leqslant \frac{\cos(A-B)\theta/2}{\cos(A+B)\theta/2}.$$
6. Montrer alors que $\mathbb{E}\sup_t |X_\theta(t \wedge \tau)| < \infty$ et conclure que
$$\mathbb{E}e^{\theta^2\tau/2} = \frac{\cos(A-B)\theta/2}{\cos(A+B)\theta/2}.$$

Exercice 2 Soit $W(t)$ un mouvement Brownien. Calculer les différentielles des processus d'Ito suivants :

1. $A(t) = (c + \frac{1}{3}W(t))^3 - 3\int_0^t (c + \frac{1}{3}W(s))ds$ où c est un réel.
2. $B(t) = (W(t) + t)sh(W(t)$.
3. $C(t) = e^{2t}\cos^2 W(t)$.
4. $D(t) = e^t W(t)^3 + \int_0^t W(s)^2 dW(s)$.

Exercice 3 Soit $W(t)$ un $\mathcal{F}_t, t \geqslant 0$ mouvement Brownien. Soit $X(t)$ solution de l'EDS

$$dX(t) = \sigma(X(t))dW_t + \mu(X(t))dt;\ X(0) = x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que les fonctions μ et σ satisfont $\exists K > 0$,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| + |\mu(x) - \mu(y)| \leqslant K|x - y|.$$

On suppose aussi $\sigma(x) > 0, \forall x > 0$. Soit a, b tels que $a < x < b$ et $T_{ab} = \inf\{t \geqslant 0, X(t) \notin (a, b)\}$.

1. Rappeler pourquuoi T_{ab} est un temps d'arrêt.
2. Soit ϕ et f deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ avec $f \geqslant 0$.On definit $u(t, x)$, $t \geqslant 0$ et $x \in [a, b]$ comme une solution du problème de Cauchy
$$\frac{d}{dt}u(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) - f(x)u(t,x),$$
avec les conditions $u(0, x) = \phi(x)$, $u(t, a) = \phi(a), u(t, b) = \phi(b)$. On admet que l'on peut étendre la fonction u en une fonction C^1 en x sur $\mathbb{R}$ et C^2 en dehors des points $a - k(b-a)$ et $b + k(b-a)$, $k \in \mathbb{N}$ mais qu'elle y admet des limites à gauche et à droite.

(a) Soit $G(s) := u(t-s, X(s)) \exp - \int_0^s f(X(v))dv, s \in [0,t]$. Appliquer la formule d'Ito à G entre 0 et u.

(b) Qu'obtient-on si on remplace s par $t \wedge T_{ab}$?

(c) En utilisant que u est solution du problème de Cauchy, montrer que $G(t \wedge T_{ab}) - G(0)$ est une vraie martingale.

(d) Justifier que $\mathbb{E}_x G(t \wedge T_{ab}) = \mathbb{E}_x G(0)$.

(e) Que vaut $\mathbb{E}_x G(0)$?

(f) En déduire une expression pour $u(t,x)$.

(g) Determiner $u(t,x)$ si $\sigma^2 = 1, \mu(x) = 0$ et $f(x) = \gamma x$ pour une constante γ.

Exercice 4 Soit $W(t)$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle associée. Soit $b(t)$ une matrice $n \times m$ dont les coefficients sont des fonctions déterministes continues. On considère le processus

$$dX(t) = b(t)dW_t, X(0) = x.$$

1. Montrer que X est une vraie martingale.
2. Montrer que le processus $M(t) = |X(t)|^2 - \int_0^t |b(s)|^2 ds$ est une martingale locale. Ici $|b|^2 = \mathrm{Tr}(b^* b)$.
3. Calculer $d < M >_t$.
4. Trouver une majoration pour $\mathbb{E} < M >_t$.
5. En déduire que M est une vraie martingale.

Exercice 5 Soit $b(t) = (B_1, B_2, B_3)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$ issu de $x_0 \neq 0$. On pose $R_t := |B(t)|$ et $x = |x_0|$.

1. Montrer que R_t satisfait l'EDS
$$dR_t = dW_t + \frac{dt}{R_t}; R_0 = x.$$
2. Montrer que le génerateur de R_t est $L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$.
3. Soit $p(t,y;x)$ la probabilité de transition de R_t du point x au temps 0 au point y au temps t. Montrer que $(\star)$ $\frac{\partial}{\partial t} p(t,y;x) = L_x p(t,y;x)$ avec la condition initiale $p(0,y;x) = \delta_{x=y}$.
4. Soit $q(t,y;x)$ la probabilité de transition d'un mouvement Brownien unidimensionnel issu de x. Montrer que $p(t,y;x) = \frac{y}{x}(q(t,y;x) - q(t,y;-x))$ est solution de $(\star)$.
5. Soit $\tau = \inf\{t > 0, W_t = 0\}$. Interpréter $(q(t,y;x) - q(t,y;-x))$ comme la proabilité de transition d'un mouvement Brownien issu de x et qui ne touche pas 0. On pourra utiliser un principe de reflexion.
6. Montrer que $\mathbb{P}_x(\tau > T) = \int_{\mathbb{R}_+} (q(T,y;x) - q(T,y;-x))dy$.
7. On considère le mouvement Brownien issu de x et absorbé en 0 (de probabilité de transition $(q(t,y;x) - q(t,y;-x))$). Donner la probabilité de ce mouvement Brownien conditionnellement au fait qu'il survit jusqu'au temps T.
8. En admettant que $\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}_x(\tau > T) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x T^{-1/2}$ donner une interprétation de $p(t,y;x)$.