Examen 9h30-12h
Calcul stochastique et modèles de diffusion

Pas de documents autres que les notes manuscrites du cours; pas de téléphone.

2 Juin 2020

Exercice 1 On considère l'équation stochastique (E)

$$\begin{cases} dX_t = dB_t + \frac{1}{\cos(X_t)}dt \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

où B un mouvement Brownien issu de 0. On pose dans la suite

$$T_{\pi/2} = \inf\{t \geqslant 0, X_t = \pm\pi/2\},\ T_\epsilon = \inf\{t \geqslant 0, |X_t| \geqslant \pi/2 - \epsilon\}, \epsilon > 0.$$

1. Soit ϕ_ϵ une fonction C^∞ telle que

$$\begin{cases} \phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ si } |x| \leqslant \pi/2 - \epsilon, \\ \phi_\epsilon(x) = 0 \text{ si } |x| > \pi/2 - \epsilon/2 \\ ||\phi'_\epsilon(x)||_\infty \leqslant C_\epsilon \text{ pour une constante } C_\epsilon. \end{cases}$$

   La valeur de ϕ_ϵ sur $\pm(\pi/2-\epsilon, \pi/2-\epsilon/2)$ est sans importance. Montrer que l'équation $\begin{cases} d\tilde{X}_t = dB_t + \phi_\epsilon(\tilde{X}_t)dt \\ \tilde{X}_0 = 0, \end{cases}$ admet une unique solution forte.
2. On pose $\tilde{T}_\epsilon = \inf\{t \geqslant 0, |\tilde{X}_t| \geqslant \pi/2 - \epsilon\}$. Montrer que $\tilde{X}$ est solution de (E) pour $t < \tilde{T}_\epsilon$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution forte pour $t < T_\epsilon$.
4. En déduire que la solution est bien définie pour $t < T_{\pi/2}$. On notera $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t), t < T_{\pi/2}$ la filtration naturelle associée à X dans la suite.
5. On considère maintenant des réels $0 < r < x < R < \pi/2$. On suppose maintenant $X_0 = x$. Soit $\tau := \inf\{t \geqslant 0, X_t = r \text{ ou } X_t = R\}$ et

$$\psi(x) = \mathbb{P}_x\left(X_\tau = R\right).$$

   (a) $M(t) = \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{X_\tau = R}|\mathcal{F}_t)$ est-elle une martingale ? Vérifier que

$$M(t) = \psi(X_{t\wedge\tau}).$$

   Indication : séparer les cas $t \geqslant \tau$ et $t < \tau$ et utiliser une propriété des solutions d'EDS.

   (b) On admet que l'on peut appliquer la formule d'Ito à $\psi(X_t)$, $t < \tau$ (ψ est donc de classe C^2). Déduire de la question précédente que ϕ est solution d'une equation différentielle de second ordre. *Indication : on admettra que pour tout intervalle d'intérieur non vide $I \subset [r, R]$, $\mathbb{P}(X_t \in I, t < \tau) > 0$*

Exercice 2. On se donne un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geqslant 0}$ sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$, et on considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} X_0 = 0, \qquad dX_t &= -1/2e^{-X_t^4}\,dt - e^{-X_t^4/2}\,dB_t. \\ Y_0 = 0, \qquad dY_t &= -1/2\frac{1}{(Y_t^2+1)^2}dt + \frac{1}{Y_t^2+1}, dB_t \end{aligned}$$

1. Justifier que ces deux EDS admettent chacune une unique solution forte.
2. Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
   (a) Montrer que $(F(X_t))_{t\geq 0}$ et $(F(Y_t))_{t\geq 0}$ sont des martingales locales dès que F vérifie une equation que l'on déterminera.
   (b) Résoudre l'équation différentielle de la question précedente, et conclure que $(e^{X_t})_{t\geq 0}$ est une martingale et dire si elle est de carré intégrable.
   (c) Même question pour $(e^{Y_t}), t \geqslant 0$.

Exercice 3 On considère un mouvement Brownien $B_t, t \geqslant 0$ issu de 0. Soit $x_0 > 0$ un réel donné.

1. Montrer que l' équation différentielle stochastique suivante admet une unique solution forte :

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t;\ X(0) = x_0\ (E)$$

2. Résoudre l'équation $x'(t) = -x(t), x(0) = x_0$.
3. On cherche une solution de la forme $X_t = C_t e^{-t}$. Déterminer l'equation satisfaite par C_t.
4. Résoudre l'équation (E).

Problème On considère l'équation logistique stochastique qui modélise l'ëvolution d'une population.

$$dX(t) = rX(t)(K - X(t))dt + \sigma X(t)dB(t), X(0) = x_0 \geqslant 0.$$

Les constantes r, K et σ sont positives.

1. Montrer que cette équation admet une solution unique jusqu'à un temps d'explosion.
2. Montrer que si $x_0 \geqslant 0$ alors $X(t) \geqslant 0, \forall t$. On utilisera pour cela l'unicité de la solution.
3. On pose $Z(t) = exp\{\int_0^t rX(s)ds\}, Y(t) = Z'(t) = rX(t)Z(t)$. Donner l'équation satisfaite par Y.
4. Montrer que $Y(t) = rx_0 exp\{\sigma B_t + \gamma t\}$ pour une constante γ à déterminer.
5. En déduire l'expression de $X(t)$.
6. On suppose $\gamma < 0$. En utilisant que $\frac{B_t}{t} \to 0$ quand $t \to \infty$ donner le comportement en temps long de la taille de la population.
7. On suppose maintenant $\gamma > 0$. Donner l'adjoint du générateur de la diffusion.
8. On cherche une probabilité invariante : montrer qu'une telle probabilité vérifie :

$$\sigma^2(x^2 p)' - 2rx(K - x)p = C$$

avec C une constante.

9. On suppose que $C = 0$. Montrer que dans ce cas, la probabilité invariante est une loi gamma dont on donnera la densité.
10. Montrer que $B(t - s) - B(t), s \in [0, t]$, est un mouvement Brownien.
11. (Difficile) En déduire que $X(t) \stackrel{d}{=} Y(t)$.