Sur la diagonalisation des matrices 2x2

Yves Coudène, 20/10/04

On sait que toute matrice A, à coefficients réels ou complexes, dont les valeurs propres sont toutes distinctes, est diagonalisable. Peut-on réaliser cette diagonalisation de manière continue ? En d'autres termes, peut-on choisir la matrice conjuguant A à une matrice diagonale, de façon à ce quelle dépende continument de A ? Le but de ce texte est de démontrer que cela n'est pas possible sur tout l'ouvert des matrices dont les valeurs propres sont toutes distinctes.

1 **Etude locale**

Remarquons d'abord que si M est conjuguée à une matrice diagonale D par le biais d'une matrice $U \in GL_n$,

$$U^{-1}MU = D$$

alors les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de M et les vecteurs colonnes de U sont des vecteurs propres de M. Réciproquement, si U est une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres de M, alors $U^{-1}MU$ est diagonale.

Par conséquent, diagonaliser M continument revient donc peu ou prou à faire un choix pour les vecteurs propres de M, qui dépende continument de M.

Ce choix est toujours possible localement, au voisinage d'une matrice dont toutes les valeurs propres sont distinctes. C'est une application classique du théorème d'inversion locale.

Pour simplifier, on va se restreindre au cas des matrices 2x2, et donner des expressions explicites pour ces conjuguaisons. Intéressons nous au cas des matrices à coefficients réels et notons $\mathcal{U}$ l'ouvert de $M_2(\mathbf{R})$ correspondant aux matrices ayant leurs deux valeurs propres distinctes :

$$\mathcal{U} = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid \Delta(P_c(n)) \neq 0\}$$

où $P_c(M)$ est le polynôme caractéristique de M et Δ est son discriminant : $\Delta(x^2 + \alpha x + \beta) = \alpha^2 - 4\beta$. Cet ouvert $\mathcal{U}$ a deux composantes connexes $\mathcal{U}_+$ et $\mathcal{U}_-$ correspondant à $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$. Considérons le cas $\Delta > 0$, c'est à dire le cas où M a ses deux valeurs propres réelles.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Les deux valeurs propres de M sont données par les expressions :

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}(a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}), \quad \lambda_- = \frac{1}{2}(a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc})$$

Elles dépendent continument de a, b et c sur l'ouvert $\mathcal{U}_+$. Les vecteurs propres associés à λ_+ sont proportionnels à $\left(\begin{smallmatrix} b \\ a-\lambda_+ \end{smallmatrix}\right)$; remarquons que ce vecteur est lui-même proportionnel à $\left(\begin{smallmatrix} d-\lambda_+ \\ c \end{smallmatrix}\right)$. Les vecteurs propres associés à λ_- sont proportionnels à $\left(\begin{smallmatrix} b \\ a-\lambda_- \end{smallmatrix}\right)$; remarquons que ce vecteur est lui-même proportionnel au vecteur propre $\left(\begin{smallmatrix} d-\lambda \\ c \end{smallmatrix}\right)$.

On peut donc former différentes matrices susceptibles de diagonaliser M à partir de ces vecteurs ; par exemple, la matrice $\left(\begin{smallmatrix} b & b \\ a-\lambda_+ & a-\lambda_- \end{smallmatrix}\right)$, dont le déterminant est égal à $b(\lambda_+-\lambda_-)$, ou $\left(\begin{smallmatrix} b & d-\lambda \\ a-\lambda_+ & c \end{smallmatrix}\right)$ de déterminant égal à $bc+(a-\lambda_+)^2$ (car $\lambda_++\lambda_- = a+d$), ou encore $\left(\begin{smallmatrix} d-\lambda_+ & b \\ c & a-\lambda_- \end{smallmatrix}\right)$ de déterminant égal à $-bc-(a-\lambda_-)^2$. Par conséquent :

- Sur $\mathcal{U}_+ \cap \{b \neq 0\}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ a-\lambda_+ & a-\lambda_- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b \\ a-\lambda_+ & a-\lambda_- \end{pmatrix}$$

- Sur $\mathcal{U}_+ \cap \{a \neq \lambda_+, |bc| < (a-\lambda_+)^2\}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d-\lambda_- \\ a-\lambda_+ & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d-\lambda_- \\ a+\lambda_+ & c \end{pmatrix}$$

- Sur $\mathcal{U}_+ \cap \{a \neq \lambda_-, |bc| < (a-\lambda_-)^2\}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-\lambda_+ & b \\ c & a-\lambda_- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d-\lambda_+ & b \\ c & a-\lambda_- \end{pmatrix}$$

Les trois ouverts précédents recouvrent $\mathcal{U}_+$; on est donc parvenu à diagonaliser $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, au moins localement. Le problème est que les trois matrices qui réalisent ces conjuguaisons ne coïncident pas sur l'intersection de ces ouverts, si bien qu'il n'est pas possible de les "recoller" afin de former une solution globale continue qui conjugue M à une matrice diagonale.

On pourrait penser que cela est dû à un mauvais choix quant au choix des vecteurs propres que nous avons fait. Il n'en est rien :

Théorème 1 *Soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *et* $\mathcal{U} = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid \Delta(P_c(M)) > 0\}$ *,*
ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *et* $\mathcal{U} = \{M \in M_2(\mathbf{C}) \mid \Delta(P_c(M)) \neq 0\}$.
Il n'existe pas de fonction continue $f : \mathcal{U} \longrightarrow GL_2(\mathbf{K})$ *telle que, pour tout* $M \in \mathcal{U}$, $f(M)^{-1}Mf(M)$ *soit diagonale.*

Remarque : ce théorème est en fait vrai en toute dimension.

2 **Le cas réel**

Remarquons que si une telle fonction f existait, alors on pourrait diagonaliser continument les matrices symétriques à l'aide de matrices de $S0_2$. En effet, si v_1, v_2 sont les deux vecteurs colonnes de $f(M)$: $f(M) = (v_1, v_2)$, alors $\tilde{f}(M) = (\frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|})$ conjugue encore M à une matrice diagonale. Si M est symétrique, ses vecteurs propres v_1 et v_2 sont orthogonaux ; par conséquent $\tilde{f}(M) \in 0_2(\mathbf{R})$. La fonction $\frac{\tilde{f}(M)}{det\tilde{f}(M)} \in S0_2(\mathbf{R})$ réalise donc la conjuguaison recherchée. Le théorème précédent découle donc de l'énoncé suivant :

Théorème 2 *Soit $Sym(\mathbf{R}^2) = \{M \in M_2(\mathbf{R}) \mid {}^tM = M\}$.*
Il n'existe pas de fonction continue $f : \mathcal{U} \cap Sym(\mathbf{R}^2) \longrightarrow S0_2(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{U} \cap Sym(\mathbf{R}^2)$, $f(M)^{-1}Mf(M)$ soit diagonale.

Au lieu de considérer l'ensemble de toutes les matrices symétriques, on peut même se restreindre à la classe de conjugaison d'une matrice diagonale $A_0 \in \mathcal{U}$. Posons :

$$\mathcal{O}_{A_0} = \{UA_0U^{-1} \mid U \in S0_2(\mathbf{R})\}$$

Les matrices de la forme $f(A)^{-1}Af(A)$, $A \in \mathcal{O}_{A_0}$, sont diagonales et conjuguées à A_0 ; elles ont donc les même valeurs propres que A_0. Il n'existe qu'un nombre fini de telles matrices, elles sont obtenues en permutant les termes diagonaux de A_0. Comme $\mathcal{O}_{A_0}$ est connexe, on voit que $f(A)^{-1}Af(A)$ est constant. Quitte à multiplier f par une matrice de permutation, on peut donc supposer que $f(A)^{-1}Af(A)$ est égale à A_0.

Théorème 3 *Soit $A_0 \in \mathcal{U}$ une matrice diagonale.*
Il n'existe pas de fonction continue $f : \mathcal{O}_{A_0} \longrightarrow S0_2(\mathbf{R})$ tel que

$$f(A)^{-1}Af(A) = A_0.$$

Lemme 1 *Soit $A_0 \in \mathcal{U}$ une matrice diagonale.*
Si $A = UA_0U^{-1} = VA_0V^{-1}$, alors UV^{-1} est diagonale

Preuve du lemme :
UV^{-1} doit commuter avec A_0. La matrice UV^{-1} doit donc laisser invariant les sous-espaces propres de A_0 ; ceux-ci sont engendrés par les vecteurs de la base canonique. La matrice UV^{-1} est donc diagonale.

Preuve du théorème :
Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble des matrices diagonales de $S0_2$. Considérons la projection π de $S0_2$ sur $\mathcal{O}_{A_0}$ donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \pi : & SO_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A_0} \\ & U & \longmapsto & UA_0U^{-1} \end{array}$$

Le lemme montre que les "fibres" de cette projection s'identifient naturellement à $\mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R})$:

$$\pi(u) = \pi(v) \quad \longleftrightarrow \quad uv^{-1} \in \mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R}).$$

L'existence de f permettrait d'établir un homéomorphisme entre $S0_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{O}_{A_0} \times (\mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R}))$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{A_0} \times (\mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R})) & \longrightarrow & S0_2(\mathbf{R}) \\ (A, D) & \longmapsto & f(A)D \end{array}$$

On peut écrire explicitement l'inverse de cette application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{A_0} \times (\mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R})) & \longleftarrow & S0_2(\mathbf{R}) \\ (UA_0U^{-1},\ f(UA_0U^{-1})^{-1}U) & \longleftarrow & U \end{array}$$

La matrice $f(UA_0U^{-1})^{-1}U$ est bien diagonale car elle commute avec A_0. En effet, d'après la définition de f, on doit avoir l'égalité :

$$f(UA_0U^{-1})^{-1}UA_0U^{-1}f(UA_0U^{-1}) = A_0.$$

On est parvenu a une absurdité. Il n'existe pas d'homéomorphisme entre $S0_2(\mathbf{R})$ et $\mathcal{O}_{A_0} \times (\mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R}))$ car $S0_2(\mathbf{R})$ est connexe tandis que $\mathcal{D} \cap S0_2(\mathbf{R}) = \{Id, -Id\}$ n'est pas connexe.

Remarques :
– La preuve se généralise à des matrices de taille quelquonque.
– L'application π est un revétement à deux feuillets non trivial de S^1 par S^1.

3 **Le cas complexe**

Les énoncés précédents se généralisent au cas complexe en remplaçant $S0_2(\mathbf{R})$ par $SU_2(\mathbf{C})$ et les matrices symétriques par les matrices hermitiennes.

Les arguments précédents établiraient un homéomorphisme entre $SU_2(\mathbf{C})$ et $\mathcal{O}_{A_0} \times (\mathcal{D} \cap SU_2(\mathbf{C}))$. Mais $SU_2(\mathbf{C})$ est homéomorphe à S^3 qui est simplement connexe ; l'homéomorphisme est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \{(a,b) \in \mathbf{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\} & \longrightarrow & SU_2(\mathbf{C}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \end{array}$$

tandis que $\mathcal{D} \cap SU_2(\mathbf{C}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{smallmatrix} \right) \mid \theta \in \mathbf{R} \right\}$ est homéomorphe au cercle S^1, qui n'est pas simplement connexe.

Remarques :
– on peut démontrer que $\mathcal{O}_{A_0}$ est homéomorphe à la sphère S^2. La projection $\pi : SU_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_{A_0}$ est la fibration de Hopf.
– La preuve se généralise en dimension quelquonque. Le groupe $\mathcal{D} \cap SU_n(\mathbf{C})$ est maintenant homéomorphe à un tore $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$.