Formule d'inversion de Fourier

Yves Coudene 09/03

Le théorème suivant est une version ponctuelle de la formule d'inversion de Fourier ; c'est l'analogue du théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier. On prend la convention $\hat{f}(t) = \int e^{-itx} f(x)dx$.

Théorème 1 *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}$. On suppose que f admet une limite à droite et à gauche en a ; on suppose que f est dérivable à droite et à gauche en a. Alors,*

$$\frac{1}{2}\left(f(a^-) + f(a^+)\right) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{iax} \hat{f}(x) \ \frac{dx}{2\pi}$$

Preuve :

– Quitte à translater la variable, on peut supposer $a = 0$. On a

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{[-A,A]}(x)\hat{f}(x) \ \frac{dx}{2\pi} = \int_{\mathbf{R}} \widehat{\mathbf{1}_{[-A,A]}}(x) f(x) \ \frac{dx}{2\pi} = \int_{\mathbf{R}} \frac{2\sin Ax}{x} \ f(x) \ \frac{dx}{2\pi}.$$

On va donc montrer que $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{2\sin Ax}{x} \ f(x) \ \frac{dx}{2\pi} - \frac{1}{2} f(0^+) \right) = 0.$

– Remarquons que (en faisant le changement de variable $y = Ax$)

$$\int_0^\infty \frac{\sin Ax}{x} \ dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} \ dy = \frac{\pi}{2},$$

et qu'ainsi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2\sin Ax}{x} \ f(x) \ \frac{dx}{2\pi} - \frac{1}{2} f(0^+) = \int_0^\infty 2\sin(Ax) \frac{f(x) - f(0^+)}{x} \ \frac{dx}{2\pi}.$

Sans le facteur $1/x$, il suffirait d'appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue :

Lemme 1 (Riemann-Lebesgue) *Soit $g \in L^1$. Alors,* $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_{\mathbf{R}} e^{iAx} g(x) \ dx = 0.$

– Près de 0 :
on utilise l'hypothèse suivante : $f(x) = f(0^+) + x f'(0^+) + x \ \varepsilon(x)$, avec $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \varepsilon(x) = 0$;

par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{f(x)-f(0^+)}{x}$ soit borné sur $]0,\delta]$. La fonction $\frac{f(x)-f(0^+)}{x} \ \mathbf{1}_{]0,\delta]}(x)$ est donc intégrable et par Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^\delta \sin(Ax) \ \frac{f(x) - f(0^+)}{x} \ dx = 0$$

– Loin de 0 :
sur $[\delta, +\infty[$, on a $0 < 1/x < 1/\delta$, et donc $\frac{f(x)}{x} \ \mathbf{1}_{[\delta,\infty[}(x)$ est intégrable. Par Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_\delta^\infty \sin(Ax) \ \frac{f(x)}{x} \ dx = 0.$$

Enfin, par définition des intégrales généralisées[1], on a :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_\delta^\infty \frac{\sin(Ax)}{x} \ f(0^+) \ dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{A\delta}^\infty \frac{\sin y}{y} \ dy \ f(0^+) = 0.$$

– On démontre de même que $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{2\sin Ax}{x} \ f(x) \ \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2} f(0^-)$, ce qui termine la preuve.

Remarques :

On a en fait utilisé une hypothèse plus faible sur f : $f \in L^1$ et $\exists\delta > 0, \exists K > 0$ tels que

$$\forall x \in]0,\delta[\ , \ |f(x) - f(a^+)| \leq K|x-a| \ ; \quad \forall x \in]-\delta, 0[\ , \ |f(x) - f(a^-)| \leq K|x-a|.$$

[1] $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} \ dy = \lim_{B\to\infty} \int_0^B \frac{\sin y}{y} \ dy$