Quaternions et rotations

Yves Coudene 09/03

J'explique brièvement comment employer les quaternions pour étudier les rotations de $\mathbf{R}^3$. Les démonstrations sont laissées en exercice.

1 Quaternions

Soit $\mathbf{C} = \mathbf{R} + i'\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres complexes. On considère les matrices de $M_2(\mathbf{C})$ suivantes, appelées matrices de Pauli :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices obéissent aux règles de commutation suivantes :

$$\forall i, j, \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \ \ si\ i \neq j\ ; \quad \forall i,\ \sigma_i^2 = 1.$$

Théorème :
Les matrices $1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ forment une base de l'ensemble des matrices 2x2 à coefficients complexes, $M_2(\mathbf{C})$.

L'algèbre $M_2(\mathbf{C})$ se décompose donc en :
– un espace vectoriel de dimension 3, $\mathbf{E} = Vect(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; Un vecteur $\vec{a} \in \mathbf{E}$ s'écrit $\vec{a} = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$;
– une sous-algèbre de dimension 4, $\mathbf{H} = Vect(1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1)$;
– un sous-espace de dimension 1 engendré par $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

On pose $i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i'\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a bien $i^2 = -1$. On a également :
$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$. Attention : $i \notin \mathbf{H}$.

Par conséquent, tout élément de $\mathbf{H}$ peut se mettre sous la forme :

$$q = \alpha + i\ \vec{a}, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \vec{a} \in \mathbf{E}.$$

La loi de composition induite sur $\mathbf{H}$ par le produit matriciel peut se reécrire :

$$(\alpha + i\ \vec{a})(\alpha' + i\ \vec{a}') = \alpha\alpha' + i\ (\alpha\ \vec{a}' + \alpha'\ \vec{a}) - \vec{a}\ \vec{a}'$$

$$avec \quad \vec{a}\ \vec{a}' = \vec{a} \mid \vec{a}' + i\ \vec{a}\ \times \vec{a}', \qquad \mid\ prod.scalaire,\ \times\ prod.vectoriel.$$

Remarques : i commute avec les vecteurs de $\mathbf{E}$. Le produit de deux vecteurs de $\mathbf{E}$ donne un élément de $\mathbf{H}$. Enfin le carré d'un vecteur est égal au carré de sa norme.

On pose : $\bar{q} = \alpha - i\ \vec{a}$ et on vérifie la formule : $q\bar{q} = \alpha^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Tout élément non nul de $\mathbf{H}$ est donc inversible. Le corps $\mathbf{H}$ est appelé corps des quaternions. Il vient d' être construit comme sous-algèbre de $M_2(\mathbf{C})$.

2 Rotations

La construction précédente peut être utilisée pour étudier les rotations de $\mathbf{R}^3$.

Pour cela, on remarque que l'exponentielle de matrices se restreint aux quaternions :

$$e^{i\ \vec{a}} = 1 + i\ \vec{a} - 1/2 \parallel \vec{a} \parallel^2 + ... = \cos \parallel \vec{a} \parallel + i\ \frac{\vec{a}}{\parallel \vec{a} \parallel} \sin \parallel \vec{a} \parallel .$$

en posant $\parallel \vec{a} \parallel^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, pour $\vec{a} \in \mathbf{E}$. En particulier le quaternion $e^{i\ \vec{a}}$ est de norme 1.

Théorème:
Soit $\vec{a} \in \mathbf{E}$ un vecteur unitaire et θ un nombre réel. La rotation d'axe dirigé par $\vec{a}$ et d'angle θ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \to & \mathbf{E} \\ \vec{x} & \to & e^{-\frac{1}{2} i\ \theta\ \vec{a}}\ \ \vec{x}\ \ e^{\frac{1}{2} i\ \theta\ \vec{a}} \end{array}$$

Ceci se vérifie en décomposant $\vec{x}$ selon un vecteur proportionnel à $\vec{a}$ et un vecteur orthogonal à $\vec{a}$. Un calcul direct redonne l'expression classique des rotations :

$$e^{-\frac{1}{2} i\ \theta\ \vec{a}}\ \ \vec{x}\ \ e^{\frac{1}{2} i\ \theta\ \vec{a}} \ = \ \cos\theta\ \vec{x} + (1 - \cos\theta)(\vec{x}|\ \vec{a})\ \vec{a} + \vec{a} \times \vec{x}\ \ \sin\theta.$$

De là, il est facile de composer les rotations. On obtient, par exemple , une expression pour le cosinus de l'angle ω de la rotation composée d'une rotation d'angle θ d'axe $\vec{a}$ suivie d'une rotation d'angle ϕ d'axe $\vec{b}$:

$$e^{-\frac{1}{2} i\ \omega\ \vec{u}} \ = \ e^{-\frac{1}{2} i\ \phi\ \vec{b}} e^{-\frac{1}{2} i\ \theta\ \vec{a}}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2} i\ \omega\ \vec{u}} &= \cos(\omega/2) - i\ \vec{u} \sin(\omega/2) \\ e^{-\frac{1}{2} i\ \phi\ \vec{b}}\ e^{-\frac{1}{2} i\ \theta\ \vec{a}} &= (\ \cos(\phi/2) - i\ \vec{b} \sin(\phi/2)\ )(\ \cos(\theta/2) - i\ \vec{a} \sin(\theta/2)\ ) \\ &= \cos(\phi/2)\cos(\theta/2) - \vec{a}|\ \vec{b} \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)... \\ ... - i\ (\vec{b} &\sin(\phi/2)\cos(\theta/2) + \vec{a}\cos(\phi/2)\sin(\theta/2) + \vec{b} \times \vec{a} \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)). \end{aligned}$$

Donc

$$\cos\frac{1}{2}\omega = \cos\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\theta - (\vec{a}|\ \vec{b}) \sin\frac{1}{2}\phi \sin\frac{1}{2}\theta.$$

Exercices :
– Montrez que le groupe des quaternions de norme 1 s'identifie à $SU_2(\mathbf{C})$.
– Explicitez le morphisme de $SU_2(\mathbf{C})$ dans $SO_3(\mathbf{R})$ donné par le théorème plus haut. Quel est son noyau ?
– Démontrez l'égalité : $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{z}|\vec{x})\vec{y} - (\vec{z}|\vec{y})\vec{x}$ par un calcul direct avec les quaternions.
– Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire. A quoi correspond la transformation de $\mathbf{E}$ donnée par $\vec{x} \mapsto -\vec{u}\vec{x}\vec{u}$?
– Montrez que l'application $\vec{a} \mapsto e^{i\vec{a}}$, définie de $\mathbf{E}$ dans l'ensemble des quaternions de norme 1, est surjective. Est-ce un morphisme ?

Référence : G. Casanova, *Que-sais-je ?* 1657 "L'algèbre vectorielle".