Développement asymptotique de l'intégrale $\int \frac{sint}{t}\,dt$

Yves Coudene 16/10/03

Le calcul de la limite de l'intégrale $\int_0^N \frac{sint}{t}\,dt$, lorsque N tend vers l' infini, est un grand classique. Quitte à faire un peu plus de calculs, on peut obtenir un développement asymptotique complet :

$$\int_0^N \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^N \Big(\int_0^\infty e^{-tx}dx\Big) sint\ dt = \int_0^\infty \int_0^N e^{-tx} sint\ dt\ dx$$

L'intégrale $\int_0^N e^{-tx} sint\ dt$ se calcule explicitement à l'aide des complexes :

$$\int_0^N e^{-tx} sint\ dt = Im\Big(\int_0^N e^{-tx+it}\ dt\Big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-Nx}}{1+x^2}(cosN + xsinN)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_0^N \frac{\sin t}{t}\,dt &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-Nx}}{1+x^2}(cosN + xsinN)dx \quad , \qquad v = Nx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{cosN}{N}\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\,dv - \frac{sinN}{N^2}\int_0^\infty \frac{ve^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\,dv \end{aligned}$$

On utilise maintenant le développement en série de $\frac{1}{1+x^2}$, dont le reste est explicite :

$$\frac{1}{1+\frac{v^2}{N^2}} = \sum_{k=0}^K \Big(-\frac{v^2}{N^2}\Big)^k + \frac{\Big(-\frac{v^2}{N^2}\Big)^{K+1}}{1+\frac{v^2}{N^2}} \quad ,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\,dv = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{N^{2k}} \underbrace{\int_0^\infty v^{2k}e^{-v}dv}_{=(2k)!} + \frac{1}{N^{2k+2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(-v^2)^{K+1}e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}dv}_{|\quad|\leq(2k+2)!}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\,dv \ \sim\ \sum \frac{(-1)^k}{N^{2k}}\ (2k)!$$

$$\int_0^\infty \frac{ve^{-v}}{1+\frac{v^2}{N^2}}\,dv \ \sim\ \sum \frac{(-1)^k}{N^{2k}}\ (2k+1)!$$

Résultat :

$$\begin{aligned} \int_0^N \frac{\sin t}{t}\,dt \quad &\sim \quad \frac{\pi}{2} - \sum_{k\geq 0} (-1)^k(2k)!\ \frac{cosN}{N^{2k+1}} + (-1)^k(2k+1)!\ \frac{\sin N}{N^{2k+2}} \\ &\sim \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\cos N}{N} - \frac{\sin N}{N^2} + 2\ \frac{\cos N}{N^3} + 6\ \frac{sinN}{N^4} + O(\frac{1}{N^5}) \end{aligned}$$

Ce développement illustre les points suivants :
– utilisation de la transformée de Laplace ;
– calcul d'intégrales réelles en passant dans le domaine complexe ;
– fonction Gamma ;
– obtention d'une asymptotique en mettant l'expression à évaluer sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre ;
– obtention d'un reste sous forme intégrale, ce qui permet d'obtenir des équivalents, mais aussi des encadrements.
Enfin pour finir, il faut remarquer que la série obtenue est divergente.