La formule de Stirling

Yves Coudène, septembre 2006

Voici une preuve de la formule de Stirling qui utilise la méthode de Laplace.

Théorème : $n! \sim n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}$

Preuve :

Commençons par exprimer la factorielle à l'aide de la fonction Γ :

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n\, dt$$

Effectuons les changements $t = n(1+u)$ et $u = s/\sqrt{n}$ dans cette intégrale.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) = & \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n\, dt = \left(\int_{-1}^{+\infty} e^{n(\ell n(1+u)-u)}du\right) n^{n+1}e^{-n} \\ = & \left(\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{n\ell n(1+\frac{s}{\sqrt{n}})-\frac{s}{\sqrt{n}})}ds\right) n^{n+1/2}e^{-n}\end{aligned}$$

On utilise ensuite les deux inégalités suivantes :

Si $u \leq 1$, $\ell n(1+u) - u \leq -\frac{u^2}{4}$

Si $u \geq 1$, $\ell n(1+u) - u \leq (\ell n 2 - 1)\ u \leq -0,3\ u$

La deuxième inégalité provient de la décroissance de $\ell n(1+u)/u$ sur $[0, +\infty[$.

Pour les valeurs de s appartenant à l'intervalle $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. En effet, la première inégalité montre que la fonction $e^{n(\ell n(1+\frac{s}{\sqrt{n}})-\frac{s}{\sqrt{n}})}$ est majorée par $e^{-s^2/4}$, qui est intégrable. De plus elle converge vers $e^{-s^2/2}$. Par conséquent :

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{n(\ell n(1+\frac{s}{\sqrt{n}})-\frac{s}{\sqrt{n}})}ds \quad \longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2}ds \;=\; \sqrt{2\pi}$$

L'intégrale sur l'intervalle $[\sqrt{n}, +\infty[$ se majore grace à la seconde inégalité :

$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{n\ell n(1+s/\sqrt{n})-s/\sqrt{n})}ds \leq \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-0,3\sqrt{n}s}ds = \frac{e^{-0,3n}}{0,3\sqrt{n}} \quad \longrightarrow \quad 0.$$

Voici un encadrement plus précis (cf Feller, *Introduction to Probability*) :

Théorème : $1 \leq \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}} \leq e^{\frac{1}{12n}}$

Preuve :

Soit $u_n = \ell n\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right)$. En vertu de l'égalité : $Ath(t) = \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n \;&=\; 1 - \frac{(2n+1)}{2}\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - (2n+1)Ath\left(\frac{1}{2n+1}\right) \\ &=\; -\sum_{i\geq 1}\frac{1}{2i+1}\frac{1}{(2n+1)^{2i}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} - \cdots \\ &\geq\; -\frac{1}{3}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc $u_n - \frac{1}{12n}$ est croissante, bornée, donc convergente ; sa limite est égale à celle de u_n. Au final, $u_n - \frac{1}{12n} \leq \ell n(\sqrt{2\pi}) \leq u_n$