Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass

Yves Coudene

Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France
coudene@dma.ens.fr

Paru dans *la Gazette des Mathématiciens*, Janvier 2002, **91**.

1 Introduction

Le but de cette note est de présenter un résultat d'approximation analogue au théorème de Stone-Weierstrass, dans le cadre des espaces L^p. Rappelons l'énoncé de ce théorème (cf p.ex [Du66] chap.12, [P93]) :

Soit X un espace topologique et $f_i : X \to R$ une famille de fonctions de $C(X)$ qui sépare les points :

$$\forall\ x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\ i\ tq \quad f_i(x) \neq f_i(y).$$

Alors l'algèbre engendrée par les fonctions f_i est dense dans $C(X)$ pour la topologie compacte-ouverte.

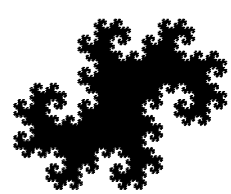
La topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie de la convergence uniforme lorsque X est compact.

Le théorème de Stone-Weierstrass peut être utilisé pour démontrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2([0,1], dx)$. Cet espace admet également des bases constituées de fonctions qui ne sont pas continues ; la plus simple est la base de Haar, définie comme suit :

$$f_0 = \mathbf{1},\quad f_{k,n} = 2^{n/2}\Big(\ \mathbf{1}_{[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}[} - \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}[}\Big)\ ,\ k = 0..2^n - 1,\ n \in \mathbf{N}.$$

Cette famille de fonctions possède plusieurs propriétés intéressantes : ses éléments ne prennent qu'un nombre fini de valeurs et satisfont une certaine invariance d'échelle : $f_{k,n+1}(x) = \sqrt{2}\ f_{k,n}(2x)$. Elle est donc facile à implémenter sur machine.

En dimension supérieure, il est possible de construire des fonctions satisfaisant des conditions semblables. Les intervalles sont remplacés par des ensembles possédant des propriétés d'autosimilarités, comme dans l'exemple ci-contre. Ces constructions interviennent en traitement d'images [KV95].



Revenons à la base de Haar : cette famille orthonormée de $L^2([0,1], dx)$ sépare les points ; on peut vérifier que le sous-espace vectoriel et l'algèbre qu'elle engendre coïncident. A partir de ces deux propriétés, peut-on en déduire que cette famille forme une base hilbertienne de L^2 ? Autrement dit, peut-on formuler une version du théorème de Stone-Weierstrass valide dans les espaces L^p ?

C'est le but de la première partie de cet article. On présente ensuite une correspondance entre σ-algèbres et partitions, due à V. A. Rokhlin ; cette correspondance permet d'obtenir des théorèmes d'approximation plus précis.

2 Approximation dans les espaces L^p

Afin de donner une preuve élémentaire, on se place sur l'espace $[0,1]$, qui est muni d'une mesure de probabilité borélienne μ.

Rappelons que pour $p \geq 1$, les espaces L^p sont des espaces de Banach pour la norme $||f||_p = (\int |f|^p)^{1/p}$. Pour $p \in]0,1[$, ce sont des espaces métriques complets pour la distance $d(f,g) = \int(|f-g|^p)$; ils ne sont plus localement convexes ([WRu73]1.47). En particulier, leur dual topologique est restreint à $\{0\}$, si μ est non-atomique. Pour $p = 0$, L^0 est l'espace des fonctions mesurables, muni de la convergence en probabilité ; c'est un espace métrique complet. Là encore, les seuls ouverts convexes sont $\{0\}$ et L^0 ([Fed69]2.3.8).

Théorème 1 *Soit $p \in [0,\infty[$, μ une mesure de probabilité borélienne sur l'intervalle $[0,1]$, et $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions μ-mesurables bornées qui sépare les points :*

$$\forall x,y \in [0,1],\ x \neq y,\ \exists\, n \in \mathbf{N} \quad tq \quad f_n(x) \neq f_n(y).$$

Alors l'algèbre engendrée par les fonctions f_n et les constantes, est dense dans $L^p([0,1],\mu)$.

Remarques :
– Il faut que la famille de fonctions f_n soit dénombrable. La famille des fonctions indicatrice des singletons sépare les points mais n'engendre pas L^p.
– Les fonctions f_n sont supposées bornées afin que l'algèbre qu'elles engendrent soit bien incluse dans L^p. Lorsque $p = 0$, cette condition est superflue.
– Il est possible de démontrer ce théorème à l'aide du théorème de Krein-Milman, portant sur les points extrémaux des compacts convexes ; cf [WRu73]5.7 pour une preuve dans le cadre topologique.

Preuve :
La démonstration comporte trois étapes : On commence par se ramener au cas où les f_n sont des fonctions indicatrices d'ensembles mesurables B_n. La propriété de séparation permet d'obtenir une injection de $[0,1]$ dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, qui envoie les ensembles B_n sur les cylindres. Comme les cylindres engendrent la tribu des boréliens, il suffit de vérifier que cette injection est un plongement pour terminer la preuve.

Le lemme suivant est un résultat classique en théorie des probabilités.

Lemme 1 *Soit $n \in \mathbf{N}$, et $a,b \in \mathbf{R}$. Alors la fonction indicatrice de l'ensemble $f_n^{-1}(]a,b[)$ est dans l'adhérence de l'algèbre engendrée par f_n et les constantes.*

Preuve :
Posons $f = f_n$; soit C une constante positive telle que $|f| \leq C$. Sur l'intervalle $[-C,C]$, on peut trouver une suite uniformément bornée de polynômes P_k, qui converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$. Pour cela, il suffit d'approcher de manière croissante la fonction $\mathbf{1}_{]a,b[}$ par des fonctions continues, par exemple $g_j(x) = min(1, jd(x,]a,b[^c))$ puis d'approcher ces fonctions g_j par des polynômes uniformément bornés par 2 ; la suite P_k est obtenue par extraction diagonale.

On a alors $P_k \circ f \to \mathbf{1}_{]a,b[} \circ f$ simplement, et $|P_k \circ f(x)| \leq 2,\ \forall x \in [0,1]$. Le théorème de convergence dominée montre donc que les éléments $P_k \circ f$ de l'algèbre engendrée par f tendent vers $\mathbf{1}_{f^{-1}(]a,b[)}$ lorsque k tend vers l'infini. La domination uniforme est inutile lorsque $p = 0$, car la converge presque partout implique la convergence en probabilité. †

Revenons à la preuve du théorème. Les ensembles $f_n^{-1}(]a,b[)$, avec a,b rationnels, sont en nombre dénombrable ; mettons les sous la forme d'une suite $\{B_k\}$.

L'algèbre engendrée par les $\mathbf{1}_{B_k}$ est contenue dans l'adhérence de l'algèbre engendrée par les f_n, il suffit donc de démontrer qu'elle est dense dans L^p, ou encore que les B_k, et les ensembles négligeables, engendrent la tribu des ensembles μ-mesurables.

La famille $\{\mathbf{1}_{B_k}\}$ sépare les points ; par conséquent, on obtient une injection :

$$\begin{array}{rccl} \phi: & [0,1] & \to & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ & x & \to & \{\mathbf{1}_{B_k}(x)\}_{k\in\mathbf{N}} \end{array}$$

Notons $\tilde{B}_k$ l'ensemble des points de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dont la k^{ieme} coordonnée est égale à 1. Les $\tilde{B}_k$ engendrent la tribu des boréliens de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. L'égalité $\phi^{-1}(\tilde{B}_k) = B_k$ montre que les B_k engendrent l'image réciproque de la tribu des boréliens de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Il suffit donc de montrer que l'image réciproque de la tribu des ensembles $\phi_*\mu$-mesurables contient la tribu des ensembles μ-mesurables.

L'application ϕ étant injective, on a, pour tout $A \subset X$, $A = \phi^{-1}(\phi(A))$. Il suffit donc de montrer que l'image d'un ensemble μ-mesurable est $\phi_*\mu$-mesurable. Quitte à réaliser $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ comme un compact de $\mathbf{R}$, on peut considérer que ϕ est à valeurs réelles. Le lemme suivant termine la démonstration du théorème :

Lemme 2 *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur l'intervalle $[0,1]$, et soit $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application injective μ-mesurable (l'image réciproque d'un borélien est mesurable). Alors l'image d'un ensemble μ-mesurable est $\phi_*\mu$-mesurable.*

Preuve :
Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble μ-mesurable. Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on peut trouver un compact $K_j \subset A$, de mesure supérieure à $\mu(A) - 1/j$, sur lequel l'application ϕ est continue. C'est une conséquence de la densité des fonctions continues, au sens de la convergence presque partout, et du théorème d'Egorov : si ϕ_n est une suite de fonctions mesurables qui convergent presque partout, elle converge uniformément sur des compacts de mesure arbitrairement proche de 1.

On peut supposer les K_j croissants pour l'inclusion ; notons A_0 l'union des K_j. L'image d'un compact par une application continue est un compact, si bien que $\phi(K_j)$ est compact. L'ensemble $\phi(A_0)$ est donc borélien. De la même façon, on peut trouver un ensemble borélien $A_1 \subset A^c$ tel que $\mu(A^c - A_1) = 0$ et $\phi(A_1)$ est borélien. L'application ϕ étant injective, on a les égalités :

$$\phi^{-1}\phi(A) = A, \qquad \phi(A) \cap \phi(A^c) = \emptyset.$$

Les inclusions $A_0 \subset \phi^{-1}\phi(A_0) \subset \phi^{-1}\phi(A) = A$ montrent que $\phi_*\mu(\phi A_0) = \mu(A)$. De même, $\phi_*\mu(\phi A_1) = \mu(A^c)$, si bien que l'ensemble $\phi(A_0) \amalg \phi(A_1)$ est de $\phi_*\mu$-mesure totale.
Enfin les inclusions $\phi(A) \subset \phi(A^c)^c \subset \phi(A_1)^c$ impliquent la relation suivante : $\phi(A) - \phi(A_0) \subset \phi(A_1)^c \cap \phi(A_0)^c$. Ce dernier ensemble est négligeable, donc l'image de A est $\phi_*\mu$-mesurable. †

L'énoncé du théorème étant de nature mesurable, il reste encore vrai sur tous les espaces probabilisés isomorphes à $[0,1]$. La preuve qui vient d'être donnée se généralise immédiatement, lorsque $[0,1]$ est remplacé par un borélien d'un espace métrique séparable complet ; ceci afin d'assurer la régularité de la mesure de probabilité borélienne μ.

Il n'existe, à notre connaissance, aucun ouvrage mentionnant ce résultat d'approximation. Cela ne signifie pas pour autant qu'il est nouveau : dans [Ro52], V. A. Rokhlin démontre qu'une famille dénombrable d'ensembles mesurables séparant les points engendre la tribu des ensembles mesurables. Ce résultat est parfois mentionné dans les livres de théorie de la mesure [Co80] [DRu90]. Il est obtenu comme corollaire des théorèmes de structure des ensembles analytiques.

3 Correspondance de Rokhlin

Que se passe-t-il lorsque les fonctions f_n ne séparent plus les points ? Peut-on encore caractériser les fonctions qui appartiennent à l'adhérence de l'algèbre engendrée par les f_n ? La réponse se trouve dans un article de V. A. Rokhlin [Ro52], qui met en correspondance les sous σ-algèbres de la tribu des ensembles mesurables, et certaines partitions de l'espace considéré.

3.1 Définitions

Définition 1 *Une partition ξ de $[0,1]$ est la donnée d'un ensemble de parties de $[0,1]$, disjointes deux à deux, recouvrant $[0,1]$. L'élément de la partition qui contient le point $x \in [0,1]$ est noté $\xi(x)$.*
La partition est dite mesurable *s'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $\{B_n\}$, chacun des B_n étant union d'éléments de la partition, et tel que :*
$\forall\ C_1, C_2 \in \xi,\ C_1 \neq C_2,\ \exists\ n$ *tq :*

$$C_1 \subset B_n \text{ et } C_2 \subset B_n^c \qquad \text{ou} \qquad C_1 \subset B_n^c \text{ et } C_2 \subset B_n.$$

On convient d'identifier deux partitions ξ et η s'il existe un ensemble mesurable $\Omega \subset [0,1]$, de mesure pleine, tel que $\xi(x) \cap \Omega = \eta(x) \cap \Omega,\ \forall x \in [0,1]$.

Les éléments d'une partition mesurable sont mesurables. Il suffit de remarquer que les ensembles B_n qui interviennent dans la définition de la partition déterminent complètement cette partition : $\xi(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$.

La σ-algèbre des ensembles μ-mesurables est notée $\mathcal{T}$. On dira qu'une sous σ-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}$ est *complète* si elle contient les ensembles μ-mesurables négligeables relativement à la mesure μ. Il s'agit d'une complétion relative. Toute sous σ-algèbre $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ admet une complétion unique : c'est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et les ensembles μ-négligeables. De manière équivalente, c'est l'ensemble des parties $\tilde{A} \in \mathcal{T}$ pour lesquelles il existe un ensemble $\Omega \in \mathcal{T}$ de mesure pleine, et un ensemble $A \in \mathcal{A}$ satisfaisant : $\tilde{A} \cap \Omega = A \cap \Omega$.

On dira qu'une σ-algèbre complète $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est *séparable* si c'est la complétion d'une σ-algèbre engendrée par une famille dénombrable de parties.

Lemme 3 *Toute σ-algèbre complète $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est séparable.*

Preuve :
L'espace $L^1([0,1], \mathcal{T}, \mu)$ est séparable. Toute partie d'un espace métrique séparable étant séparable, l'ensemble $\{\mathbf{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ est séparable pour la norme L^1. Soit $\{\mathbf{1}_{A_n}\}$ une partie dénombrable dense ; montrons que les A_n engendrent $\mathcal{A}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut trouver une suite n_k telle que $\mathbf{1}_{A_{n_k}}$ converge presque partout vers $\mathbf{1}_A$. La différence symétrique de A et de $\overline{\lim}\ A_{n_k}$ est donc de mesure nulle ; l'ensemble A est dans la complétion de la σ-algèbre engendrée par les A_n. †

3.2 Partitions et σ-algèbres

Les algèbres de fonctions considérées dans la suite sont supposées unitaires : elles contiennent les constantes.

Correspondance [Ro52] *Il existe une bijection entre :*
– les partitions mesurables de $[0,1]$;
– les sous σ-algèbres complètes de $\mathcal{T}$;
– les sous-algèbres fermées de $L^0([0,1], \mathcal{T}, \mu)$.

Cette correspondance est définie comme suit :

A la partition ξ, on associe la complétion de la σ-algèbre $\{A \in \mathcal{T} \mid A = \cup_{x \in A} \xi(x)\}$. Cette complétion est notée $\hat{\xi}$; elle est composée des ensembles mesurables saturés par ξ.

Soit $\mathcal{A}$ une sous σ-algèbre, $\{B_n\}$ un ensemble dénombrable de parties tels que $\mathcal{A}$ soit engendré par les B_n et les ensembles négligeables. On associe à $\mathcal{A}$ la partition $\xi_{\mathcal{A}}$ dont les atomes sont donnés par $\xi_{\mathcal{A}}(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$.

Lemme 4 *La définition de la partition $\xi_{\mathcal{A}}$ ne dépend pas du choix des B_n.*

Preuve :
Soit B_n un ensemble de parties et $< B_n >$ la σ-algèbre engendrée. On a l'égalité :

$$\bigcap_{B_n \ni x} B_n \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c = \bigcap_{\substack{A \ni x \\ A \in < B_n >}} A$$

Pour voir cela, on remarque que $< B_n >_{x,y} = \{A \in < B_n > \mid x \in A \leftrightarrow y \in A\}$ est une σ-algèbre qui contient les ensembles B_n, si $x \in B_n \leftrightarrow y \in B_n, \ \forall n$.

Soit B_n et B'_n deux familles dénombrables dont $\mathcal{A}$ est la complétion.Pour chaque n, il existe des ensembles $A_n^1, \ A_n^2 \ \in < B_n >$ tel que $A_n^1 \subset B'_n \subset A_n^2$ et $\mu(A_n^2 - A_n^1) = 0$. De la même façon, il existe des ensembles $A_n'^1, \ A_n'^2 \ \in < B'_n >$ tel que $A_n'^1 \subset B_n \subset A_n'^2$ et $\mu(A_n'^2 - A_n'^1) = 0$. Les partitions associées aux B_n et aux B'_n coïncident sur $\Omega = (\cup \ A_n^2 - A_n^1)^c \cap (\cup \ A_n'^2 - A_n'^1)^c$. †

La correspondance entre partitions et σ-algèbres est maintenant une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5 *Soit ξ une partition mesurable de $[0,1]$ et B_n les ensembles qui interviennent dans sa définition. Alors la σ-algèbre $\hat{\xi}$ est engendrée par les B_n et les ensembles négligeables.*

Preuve :
Soit $\phi : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ la fonction définie par $\phi(x) = \{\mathbf{1}_{B_n}(x)\}$. L'image réciproque de la σ-algèbre des ensembles $\phi_*\mu$-mesurables est contenue dans la σ-algèbre engendrée par les B_n et les ensembles négligeables. Il s'agit donc de montrer qu'elle contient la σ-algèbre $\{A \in \mathcal{T} \mid A = \cup_{x \in A} \xi(x)\}$.

Considérons un ensemble $A \in \mathcal{T}$; on a l'égalité $\phi^{-1}\phi(A) = \cup_{x \in A} \xi(x)$. Par conséquent, si $A = \cup_{x \in A} \xi(x)$, on obtient :

$$\phi^{-1}\phi(A) = A, \qquad \phi(A) \cap \phi(A^c) = \emptyset.$$

La preuve du second lemme montre que $\phi(A)$ est $\phi_*\mu$-mesurable, ce qui termine la démonstration. †

La correspondance entre sous σ-algèbres complètes de $\mathcal{T}$ et sous-algèbres fermées de L^0 dérive du premier lemme. Elle est donnée par :

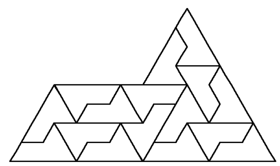
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & L^0([0,1], \mathcal{A}, \mu) \\ \{A \in \mathcal{T} \mid \mathbf{1}_A \in A^0\} & \longleftarrow & A^0 \end{array}$$

Remarques :
– En général, la σ-algèbre associée à une partition ξ n'est pas la σ-algèbre engendrée par les éléments de la partition. Par exemple, la σ-algèbre associée à la partition en points est égale à $\mathcal{T}$, tandis que la σ-algèbre engendrée par les singletons ne contient

que les ensembles négligeables et leurs complémentaires.
– On peut associer à une partition ξ un facteur $\pi : [0,1] \to [0,1]/\xi$; V. A. Rokhlin démontre que tous les facteurs sont de cette forme.
– Soit T une transformation de $[0,1]$ qui préserve la mesure. La partition en orbites est mesurable si et seulement si T est intégrable du point de vue de la mesure : il existe une fonction mesurable dont les lignes de niveau coïncident avec les orbites de T. A l'opposé, si T est ergodique, toute partition mesurable qui contient la partition en orbites est grossière.

Illustrons cette correspondance sur un exemple : on cherche à construire sur $\mathbf{R}^2$ une base d'ondelettes, c'est-à-dire une base hilbertienne de L^2 satisfaisant des propriétés d'échelle. Pour cela, on se donne un pavage autosimilaire du plan.

Celui-ci est par exemple défini par la donnée d'une tuile de référence, disons un borélien d'intérieur non vide, et par une partition de cette tuile en un nombre fini de sous-ensembles qui peuvent être superposés à la tuile de référence à l'aide d'homothéties, rotations et translations.



En réitérant ce procédé, on obtient une suite de partitions emboitées, formées de tuiles dont le diamètre tend vers zéro. Considérons la famille $\mathcal{F}$ des fonctions indicatrice de toutes les tuiles obtenues par ce procédé. C'est une famille dénombrable qui sépare les points. L'algèbre engendrée par $\mathcal{F}$ est donc dense dans L^2.

Remarquons maintenant que l'algèbre engendrée par les fonctions indicatrice des éléments d'une partition coïncide avec l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est dense dans L^2. Il suffit d'appliquer un procédé d'orthonormalisation pour obtenir une base hilbertienne.

3.3 Approximation et partitions

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la correspondance qui vient d'être décrite :

Théorème 2 *Soit A^0 une sous-algèbre fermée de $L^0([0,1],\mathcal{T},\mu)$, contenant les constantes. Soit $f_n \in A^0$, $n \in \mathbf{N}$ une suite de (représentants de) fonctions mesurables qui engendrent A^0. On définit une relation d'équivalence sur $[0,1]$ comme suit :*

$$x \sim y \;\leftrightarrow\; f_n(x) = f_n(y),\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Cette relation ne dépend pas de la suite f_n, à un ensemble de mesure nulle près.

Une fonction $f \in L^0$ appartient à A^0 si et seulement si il existe un ensemble Ω de mesure pleine tel que la restriction de f à Ω est constante sur les classes d'équivalence de la relation $\sim$.

En d'autres termes, la projection $\pi : X \to X/\sim$ induit un isomorphisme de $L^0(X/\sim, \pi_*\mathcal{T}, \pi_*\mu)$ sur A^0 ; on a noté : $\pi_*\mathcal{T} = \{A \subset X/\sim \mid \pi^{-1}A \in \mathcal{T}\}$. Il est possible de donner un énoncé similaire pour les espaces L^p. Ces espaces ne sont pas des algèbres lorsque $p \neq 0$, si bien que le parallèle avec le théorème de Stone-Weierstrass est moins frappant. Afin de faire ressortir ce parallèle lorsque $p = 0$, on introduit les définitions suivantes :

Définition 2 *Un espace probabilisé $(X,\mathcal{S},\nu)$ est un* espace de Lebesgue *s'il est isomorphe à $([0,1],\mathcal{T},\mu)$, où μ est une mesure borélienne sur $[0,1]$ et $\mathcal{T}$ est la complétion de la σ-algèbre des boréliens relativement à la mesure μ.*

On dit qu'une sous-algèbre de $L^0(X, \mathcal{S}, \nu)$ sépare les points *s'il existe une suite de (représentants de) fonctions* f_n *de cette sous-algèbre et un ensemble mesurable* Ω *de mesure pleine tel que :* $\forall\ x, y \in \Omega,\ x \neq y,\ \exists\ n \in \mathbf{N},\ tq\ f_n(x) \neq f_n(y)$.

Le résultat suivant est une reformulation du théorème 1. C'est aussi un corollaire du théorème 2.

Théorème 3 *Soit* $(X, \mathcal{S}, \nu)$ *un espace de Lebesgue, et* A^0 *une sous-algèbre de l'algèbre* $L^0(X, \mathcal{S}, \mu)$*, contenant les constantes. Alors l'algèbre* A^0 *sépare les points si et seulement si elle est dense dans* L^0*.*

4 Conclusion

La notion de partition mesurable joue un rôle important en théorie ergodique. Elle intervient dans les problèmes de désintégration de mesures et dans les calculs d'entropie. Nous espérons avoir montré que cette notion peut être présentée à un niveau élémentaire, et que son intérêt ne se restreint pas au seul domaine de la théorie ergodique.

References

[Co80] Cohn, Donald L. Measure theory. Birkhauser, Boston, Mass., 1980.

[Du66] Dugundji, James. Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966.

[Fed69] Federer, Herbert. Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.

[KV95] Kovacevic, J. Vetterli, M. Wavelets and subband coding, Prentice Hall, Signal Processing Series, 1995. http://cm.bell-labs.com/who/jelena/TwinDragon

[P93] Prolla, J.B. Weierstrass - Stone, the Theorem, Verlag Peter Lang, 1993.

[Ro52] Rokhlin, V. A. On the fundamental ideas of measure theory. Amer. Math. Soc. Translation 1952, (1952). no. 71, 55 pp.

[WRu73] Rudin, Walter. Functional analysis. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Dusseldorf-Johannesburg, 1973.

[DRu90] Rudolph, Daniel J. Fundamentals of measurable dynamics. Ergodic theory on Lebesgue spaces. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990.