Université de rennes 1

Mémoire présenté afin d'obtenir

l'habilitation à diriger les recherches

Spécialité :

Mathématiques

par

Yves COUDÈNE

Titre : Géométrie ergodique

soutenue le 28/11/2008 devant le jury composé de :

M. Bachir BEKKA
M. Jean-Pierre CONZE
M^{me} Françoise DAL'BO-MILONET
M. François LEDRAPPIER
M. Marc PEIGNÉ

Au vu des rapports de messieurs :

Patrick FOULON, Boris HASSELBLATT, Marc PEIGNÉ.

Remerciements

Je remercie Bachir Bekka, Jean-Pierre Conze, Françoise Dal'Bo-Milonet, François Ledrappier et Marc Peigné d'avoir accepté de faire partie du jury de mon habilitation à diriger les recherches. J'en suis à la fois très honoré et très heureux.

Un grand merci à toute l'équipe temi, dont j'espère voir les membres bientôt habilités. Les travaux que nous avons réalisés ensemble, ou que nous terminons en ce moment, ont grandement contribué à faire mûrir ma pensée mathématique. Je souhaite également remercier les membres de l'équipe de théorie ergodique, et au-delà, l'ensemble des Rennais avec lesquels j'ai collaboré pendant ces années.

Enfin, la rédaction de ce mémoire n'aurait pu se faire sans les constants encouragements de Philémon et les sourires de sa maman.

Table des matières

Introduction

Mes travaux se situent à l'interface de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques et de la théorie ergodique en mesure infinie. Les méthodes que j'ai employées ont été tour à tour de nature probabiliste, dynamique, géométrique ou bien issues de la théorie des groupes.

La théorie des systèmes uniformément hyperboliques est considérée comme bien comprise aujourd'hui, même si certaines des questions les plus élémentaires (récurrence des difféomorphismes Anosov, ou mélange topologique en courbure négative par exemple) sont toujours ouvertes à l'heure actuelle. On cherche aujourd'hui à généraliser les résultats de cette théorie dans deux directions différentes.

La première consiste à relaxer les hypothèses d'uniformité. Celles-ci sont rarement satisfaites en pratique, dès l'instant où l'on s'intéresse à des systèmes issus des sciences expérimentales. Après la mise en place d'un cadre général dans les années soixante-dix et quatre-vingts, l'attention s'est portée sur un petit nombre d'exemples qui concentrent les difficultés essentielles provenant de la perte d'uniformité, mais pour lesquels on espère malgré tout récupérer les résultats bien connus de la théorie des systèmes uniformément hyperboliques. Parmi ces systèmes, les flots géodésiques en courbure négative ou nulle, ou encore les systèmes partiellement hyperboliques, sont des exemples sur lesquels des progrès notables ont étés obtenus ces dernières années, mais qui sont encore loin d'être compris.

La seconde cherche à relaxer les hypothèses de compacité sur l'espace des phases ou les conditions de finitude sur les mesures étudiées. En l'absence de ces hypothèses, on n'est plus garanti d'obtenir de la récurrence et les propriétés du système peuvent être assez éloignées de ce qui est observé en mesure finie. L'exemple du flot géodésique sur les variétés à courbure négative de volume infini est sans doute un des premiers exemples à avoir été étudié en détail.

Aujourd'hui, l'étude des systèmes non-uniformément hyperboliques a pris un tour résolument technique, reposant sur des méthodes d'analyse fonctionnelle couplées à des modèles symboliques sophistiqués. La théorie ergodique en mesure infinie se concentre, pour sa part, sur des systèmes de nature abstraite, aussi proches que possible du cadre probabiliste.

J'ai cherché ici à mettre en valeur les méthodes de nature géométrique, lorsqu'elles survivent à une perte de compacité ou d'uniformité. Ces méthodes permettent de généraliser plusieurs aspects qualitatifs de la théorie.

Quelques propriétés générales du mouvement

Il est d'usage de faire remonter les débuts de la théorie ergodique au théorème de récurrence de Poincaré (1899). Ce résultat à la fois élégant et utile est "une des rares conclusions générales que l'on puisse faire sur le caractère du mouvement" [Ar76]. Il existe une autre conclusion valide pour un mouvement général : E. Hopf démontre en 1936 dans le cadre de la courbure négative, qu'une fonction invariante par le flot géodésique est en fait constante le long des feuilles stables et instables du flot. Ce résultat a connu de nombreuses généralisations : systèmes hyperboliques [AnSi67], partiellement hyperboliques [HPS77], non-uniformément hyperboliques, billards, etc. On sait à présent qu'il est en fait valide pour tous les systèmes, dès l'instant où ils satisfont les conclusions du théorème de récurrence de Poincaré [C07bis].

Feuilletages stables

Dans une autre direction, on a cherché s'il n'y aurait pas d'autres quantités associées au système, non nécessairement invariantes, qui seraient constantes le long des feuilles stables et instables. En connexion avec la propriété de mélange, je me suis intéressé aux valeurs d'adhérence faibles de suites de la forme $f \circ T^n$. J'ai pu montrer qu'elles étaient invariantes par les feuilletages, sans hypothèse sur le système autre que la finitude de la mesure [C07]. Ce résultat était auparavant connu pour les systèmes non-uniformément hyperboliques [LY85].

Recollement d'orbites

Il existe diverses façons de caractériser l'hyperbolicité d'un système régulier défini sur un espace compact. Parmi ces caractérisations, quelles sont celles susceptibles de former la base d'une théorie en mesure infinie ? La notion de structure de produit local est certainement un bon candidat. Introduite par S. Smale dans son article fondateur [Sm67], cette notion permet de recoller deux trajectoires suffisamment proches. Elle ne nécessite ni uniformité ni compacité ; elle s'obtient aisément par des considérations géométriques pour un flot géodésique en courbure négative, passe sans difficulté aux revêtements, et intervient en plusieurs points clefs de la théorie.

Il faut dans un premier temps déterminer quelles sont les propriétés topologiques des systèmes hyperboliques qui découlent de ce produit local. J'ai étudié la question de la transitivité du flot et de la densité du feuilletage stable associé [C04] [C05]. Les résultats que j'ai obtenus généralisent la minimalité de ce feuilletage pour un flot d'Anosov topologiquement mélangeant, ou encore la densité des feuilles associées aux points horosphériques, bien connue en courbure négative [Hed36] [Da00].

Pour aller plus loin, il faut introduire une autre propriété : J. Hadamard démontre un lemme de fermeture des trajectoires dans un des tout premiers articles consacrés aux propriétés dynamiques du flot géodésique en courbure négative [Had98]. Ce résultat est à l'origine des techniques de codage utilisées en théorie des systèmes hyperboliques. Il est maintenant connu sous le nom de "closing lemma" d'Anosov, suite à l'utilisation qui en a été faite par un des fondateurs de la théorie. Dans un travail en collaboration avec B. Schapira, je démontre, à partir de ce lemme, qu'il existe toujours des mesures de probabilité ergodiques de support total, invariantes par le flot, sans aucune hypothèse de compacité sur l'espace ambiant [CS08bis]. Ce résultat est étonnant ; même l'existence d'une mesure localement finie ergodique de support total a paru, à une époque, peu claire. La preuve repose sur des résultats de généricité, et généralise un théorème de K. Sigmund [Si72] pour les flots d'Anosov.

Exemples

Cette section est consacrée à l'étude de plusieurs exemples pour lesquels les deux "axiomes" de la partie précédente, produit local et lemme de fermeture, peuvent être vérifiés. Le premier est le flot géodésique en courbure négative ou nulle. Il existe peu d'études sur ce système en dehors du cas des variétés compactes. Nous démontrons dans [CS08bis] qu'il existe un sous-ensemble de l'ensemble non-errant, contenant les géodésiques périodiques hyperboliques, sur lequel nos deux axiomes sont satisfaits.

Le deuxième exemple s'obtient en relevant des flots hyperboliques à des revêtements. La question de la transitivité sur les revêtements était jusqu'ici mal comprise. Elle apparaît de manière déguisée dans une série de travaux cherchant à compter les orbites périodiques qui existent sur le revêtement [AS87] [BL98] [PS00]. Quant à la question de la densité du feuilletage stable, il n'existait aucun résultat, hors du cadre de la courbure négative.

Enfin, une troisième série d'exemples est donnée par les produits gauches au-dessus des chaînes de Markov. Les résultats sur le plan mesurable pouvaient laisser penser que la récurrence ou la transitivité avaient un caractère exceptionnel. Y. Guivarch montre que l'ergodicité n'est possible que si le groupe est virtuellement $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}^2$ [Gu89]. J'ai pu construire des extensions transitives pour tous les groupes abéliens [C04]. La situation est donc très différente sur le plan topologique, comparé au comportement du point de vue mesurable.

Ergodicité dans le cadre non compact

La dernière partie est consacrée aux propriétés ergodiques des systèmes précédents. On a vu que le flot géodésique en courbure négative admettait toujours des mesures de probabilité ergodiques de support total dans l'ensemble non-errant. Peut-on construire des mesures mélangeantes ? Les techniques génériques ne sont ici d'aucune aide. J'ai généralisé le concept de mesure de Gibbs bien connu des probabilistes, au cas des variétés non compactes à courbure négative, en employant des méthodes issues de la théorie des groupes, méthodes initiées par S. J. Patterson [Pa76]. Pour les variétés géométriquement finies, M. Peigné, F. Dal'bo et J. P. Otal ont donné des critères de finitude concernant la mesure induite sur le fibré unitaire par la mesure de Patterson-Sullivan [DOP00]. Ces critères s'adaptent au cas des mesures de Gibbs et permettent de montrer qu'il y a toujours une mesure de probabilité mélangeante invariante par le flot géodésique, si la variété est géométriquement finie [C03].

Pour ce qui est du feuilletage stable, il est uniquement ergodique lorsque l'espace est compact. Ce résultat est dû à H. Furstenberg [F73] pour un flot géodésique en courbure négative constante, et a été ensuite étendu aux flots d'Anosov par B. Marcus et R. Bowen [M75] [BM77]. Il existe également des extensions dans le cadre algébrique par G. Dani [D78], Veech [Ve77], Ratner [R91], qui ne nécessitent pas d'hypothèses de compacité. J'ai pu sortir du cadre algébrique et donner un équivalent purement dynamique de l'unique ergodicité des actions horosphériques, dès l'instant où subsiste suffisamment de récurrence dans le système.

Mais la vraie surprise, dans le cas non compact, est l'existence de flots totalement dissipatifs pour lesquels le feuilletage stable possède des propriétés ergodiques non triviales. Les exemples les plus simples s'obtiennent en relevant une suspension de difféomorphisme Anosov à un **Z**-revêtement bien choisi. Il est possible d'étudier en détail l'ergodicité du feuilletage stable des système obtenus par relèvement d'un flot hyperbolique à un revêtement abélien. Suite aux travaux de M. Babillot, F. Ledrappier [BL98] et M. Pollicott [Po98], j'ai pu donner des conditions nécessaires et suffisantes pour cette ergodicité, relativement aux relevés des mesures de Gibbs [C01]. J'ai également obtenu certains résultats dans le cas nilpotent [C03bis]. Ces résultats ont montré qu'il n'était pas du tout nécessaire qu'il y ait des orbites périodiques pour que le feuilletage ait un comportement non trivial à long terme.

Ce texte apporte quelques améliorations à certains résultats que j'ai publiés, parmi lesquels :

– la preuve de l'implication point horosphérique $\Rightarrow$ feuille dense en III.1.2 met mieux en valeur la connexion avec le mélange topologique ; elle ne repose que sur la structure de produit local. La preuve originale [C05] nécessitait une hypothèse de régularité sur le feuilletage, qui devait définir une relation ouverte ;

– la preuve du caractère suffisant de la condition sur les orbites périodiques en III.2.1, à base de lemme de fermeture, ne passe pas par le mélange faible et évite ainsi certaines hypothèses de régularité sur l'espace ambiant (polonais...) faites dans [C04] ;

– la construction de l'exemple dissipatif en V.3.1, qui vient de [C03bis], met mieux en valeur le lien avec les produits semi-directs au dessus des translations du tore ; on donne une expression explicite pour le paramétrage du feuilletage stable ;

– pour ce qui est de l'unique ergodicité en V.2, le cas d'un feuilletage stable multidimensionnel est détaillé. La publication [C08] se restreignait au cas unidimensionnel ;

– le théorème de Stone-Weierstrass mesurable (appendice 2) est replacé dans le contexte des espaces de Lebesgue, ce qui permet d'en donner une preuve plus courte que celle publiée dans [C02] ;

– les considérations sur la décomposition en composantes ergodiques en II.1.2 n'ont pas fait l'objet d'une publication spécifique. La présentation du lien entre partitions mesurables et σ-algèbres à l'appendice 3 est plus détaillée qu'en [C02].

Chapitre I

Quelques propriétés générales du mouvement

1. Conservativité

1.1 Le théorème de récurrence de Poincaré

L'usage est de faire remonter les débuts de la théorie ergodique, du point de vue mathématique, à un théorème de Henri Poincaré concernant la récurrence des trajectoires observées dans certains problèmes de mécanique céleste. Voici comment Henri Poincaré énonce ce théorème dans le mémoire : "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique".

> *Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1\, dx_2\, dx_3$ soit un invariant intégral ; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.*

Il donne ensuite un énoncé plus précis.

> *Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0 ; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.*

Les outils modernes de l'intégration ne sont pas encore disponibles. Il faut donc préciser ce qu'on entend par "trajectoires exceptionnelles". H. Poincaré montre que les trajectoires qui traversent la région r_0 au plus k fois sont contenues dans un ouvert de volume arbitrairement proche de zéro, ceci pour tout entier k positif. Ceci correspond bien à la notion usuelle d'ensemble négligeable au sens de la mesure de Lebesgue. Un peu plus loin, H. Poincaré fait la remarque suivante :

> *Mais il y a plus. Supposons que $x_1, x_2, ..., x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif $\int M\, dx_1\, dx_2 \, ...dx_n$ étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.*

On donne aujourd'hui le nom de théorème de récurrence de Poincaré à un énoncé purement mesurable :

Théorème de récurrence de Poincaré
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve la mesure μ. Supposons que $\mu(X)$ est fini. Alors, pour tout ensemble mesurable $B \subset X$, presque tout point $x \in B$ a une trajectoire qui repasse une infinité de fois dans B.

1.2 Deux exemples en mesure infinie

Il est bien sûr possible que les conclusions du théorème de Poincaré soient satisfaites sans que la mesure soit finie.

Un premier exemple est donné par une rotation du plan, qui préserve la mesure de Lebesgue. Dans ce cas particulier, les composantes ergodiques de la mesure sont finies, si bien que la récurrence se déduit du théorème de Poincaré.

Un second exemple est donné par un produit semi-direct au-dessus d'une rotation :

$$\begin{array}{cccc} T & : & S^1 \times \mathbf{R} & \to & S^1 \times \mathbf{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & (x+\theta, t+f(x)) \end{array}$$

avec θ nombre réel irrationnel et $f : S^1 \to \mathbf{R}$ une fonction continue. La transformation T préserve la mesure de Lebesgue, qui est de masse totale infinie. Les conclusions du théorème de récurrence de Poincaré sont satisfaites dès que $\int f dx = 0$. Pour un choix judicieux d'angle θ et de fonction f, il n'existe aucun ensemble mesurable invariant par T dont la mesure est comprise strictement entre 0 et $+\infty$.

Définition
Une transformation qui satisfait les conclusions du théorème de récurrence :

> *Pour tout ensemble mesurable $B \subset X$, presque tout point $x \in B$ a une trajectoire qui repasse une infinité de fois dans B.*

est dite *récurrente*, ou encore *conservative* relativement à la mesure μ.

1.3 Ensembles invariants σ-finis

La proposition suivante montre que les deux exemples donnés plus haut appartiennent à des classes bien distinctes de systèmes préservant une mesure infinie.

Proposition
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $T : X \to X$ une application mesurable préservant la mesure μ. Alors on peut trouver deux ensembles mesurables disjoints X_0, X_1 invariants par T, tels que :
– $X = X_0 \cup X_1$,
– X_0 *est union dénombrable d'ensembles invariants de mesure finie,*
– X_1 *ne contient aucun sous-ensemble mesurable invariant de mesure strictement comprise entre* 0 *et* $+\infty$.

La restriction de T à X_0 est bien sûr conservative. Pour une rotation de $\mathbf{R}^2$, l'ensemble X_1 est vide. A l'opposé, dans le cas du produit semi-direct décrit plus haut, c'est X_0 qui est trivial. Plus généralement, pour une transformation ergodique relativement à une mesure infinie, on est toujours dans le cas X_0 vide.

Les ensembles X_0 et X_1 peuvent s'interpréter à l'aide du théorème ergodique ; soit P le projecteur L^2 sur l'espace des fonctions L^2 invariantes. En restriction à X_0, la projection sur les fonctions L^2 invariantes n'occasionne aucune déperdition de masse :

$$\forall f \in L^2(X_0, \mu), \qquad \int Pf \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Par contre, le projecteur P est nul en restriction à X_1 :

$$\forall f \in L^2(X_1, \mu), \qquad Pf = 0.$$

Les moyennes ergodiques convergent donc vers zéro sur cet ensemble. L'ensemble X_0 peut aussi s'interpréter comme l'union de toutes les composantes ergodiques associées à des conditionnelles finies.

Preuve de la proposition
Soit ν une mesure finie équivalente à μ. On note $\mathcal{I}$ la tribu des ensembles mesurables invariants par T et on travaille avec l'ensemble mesuré $(X, \mathcal{I}, \nu)$. Posons :

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{I} \mid \mu(A) < \infty\}$$

Cette famille est héréditaire : si A appartient à $\mathcal{H}$, tous les sous-ensembles mesurables de A appartiennent également à $\mathcal{H}$. On peut donc associer à $\mathcal{H}$ une union mesurable X_0, c'est-à-dire un ensemble mesurable X_0 tel que :

– pour tout $A \in \mathcal{H}$, $\mu(X_0 \backslash A) = 0$,

– il existe une suite $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in \mathbf{N}$, telle que $X_0 = \cup A_i$ mod 0.

Il existe un unique ensemble mesurable X_0 satisfaisant ces deux propriétés, modulo 0 ; cf par exemple [Aa96] th. 1.0.7 . Il suffit maintenant de poser $X_1 = X_0^c$.

L'étude du système en restriction à X_0 procède comme dans le cas de la mesure finie et les outils disponibles dans ce cadre s'emploient sans difficulté. Sur X_1, la situation est plus complexe et le comportement de la transformation est en général très différent de ce qui peut être observé en mesure finie :

– les moyennes de Birkhoff tendent vers zéro, et il n'existe pas de normalisation pour les sommes $\Sigma\ f \circ T^n$, qui permette d'obtenir de la convergence presque partout [Aa96] ;

– le mélange, au sens de la convergence des suites $\int f \circ T^n g$, f intégrable et g borné, n'a jamais lieu si la transformation est ergodique inversible [KrSu69].

On est donc amené à adopter un nouveau point de vue.

2. L'argument de E. Hopf

2.1 Retour sur l'énoncé du théorème de Poincaré

On peut donner des versions du théorème de Poincaré de nature plus topologique. Soit X un espace métrique, $T : X \to X$ une application borélienne.

Un point $x \in X$ est dit *récurrent* relativement à la transformation T si on peut trouver une suite d'entiers n_i tendant vers $+\infty$ pour laquelle la suite $T^{n_i}(x)$ converge vers x.

Théorème
Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie et $T : X \to X$ une application borélienne qui préserve μ. Alors presque tout point du support de μ est récurrent.

Le résultat de H. Poincaré est "une des rares conclusions générales que l'on puisse faire sur le caractère du mouvement" (Arnol'd [Ar76]).

2.2 Feuilletage stable d'une transformation

Il existe cependant un autre résultat, qui, tout comme le théorème de récurrence de Poincaré, s'applique à un mouvement général. Démontré par E. Hopf en 1936 [Ho36], il est d'abord énoncé dans un cadre géométrique, pour des flots géodésiques définis sur des espaces à courbure négative.

Définition
Soit X un espace métrique, $T : X \to X$ une application, et x un point de X. La feuille stable du point x est définie par :

$$W^{ss}(x) = \{y \in X \mid d(T^n x, T^n y) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\}$$

Une fonction mesurable $g : X \to \mathbf{R}$ est dite W^{ss}-invariante si il existe un ensemble $\Omega \subset X$ de complémentaire négligeable, tel que pour tout $x, y \in \Omega$, $y \in W^{ss}(x)$ implique $g(y) = g(x)$.

Dire qu'une fonction g est W^{ss}-invariante revient à dire qu'elle coïncide presque partout avec une fonction qui est constante sur les ensembles de la forme $W^{ss}(x)$, pour tout $x \in X$. De fait, si g est W^{ss}-invariante, on obtient une fonction constante sur toutes les feuilles stables en posant :

- $\tilde{g}(x) = g(y)$ s'il existe $y \in W^{ss}(x) \cap \Omega$,
- $\tilde{g}(x) = 0$ sinon.

La fonction $\tilde{g}$ coïncide avec g sur Ω.

La partition de X par les ensembles $W^{ss}(x)$ est appelée distribution stable de T, ou par abus de langage, et pour des raisons historiques, *feuilletage* *stable* de la transformation T. Lorsque l'application T est inversible, on peut également définir un feuilletage instable. La feuille instable $W^{su}(x)$ est la feuille stable de x relativement à la transformation T^{-1}.

On peut maintenant donner une version générale de l'argument de E. Hopf :

Théorème [C07]
Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ. Alors toute fonction $f \in L^2(X)$ invariante par T est W^{ss}-invariante. Si de plus T est inversible, f est aussi W^{su}-invariante.

En termes ensemblistes, cela revient à dire que tout ensemble mesurable invariant par T coïncide, à un ensemble négligeable près, avec une union de feuilles stables.

2.3 Preuve de l'argument de Hopf

Première preuve

Soit $\mathcal{I}$ la tribu des ensembles mesurables invariants par T. Appliquons le théorème ergodique L^2 : pour toute fonction $f : X \to \mathbf{R}$ Lipschitzienne bornée, de constante de Lipschitz C, on peut trouver un ensemble Ω_f de mesure totale, et une suite $n_i \to \infty$ tels que :

$$\forall\, x \in \Omega_f, \quad \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} f(T^k(x)) \xrightarrow[i \to \infty]{} E(f|\, \mathcal{I})(x)$$

Soit $y \in \Omega_f \ \cap \ W^{ss}(x)$. Nous avons :

$$\Big|\, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k(x)) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k(y)) \Big| \ \leq \ \frac{C}{n} \ \sum_{k=1}^{n} \ d(T^k x, T^k y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ceci implique : $E(f|\, \mathcal{I})(x) = E(f|\, \mathcal{I})(y)$.

Soit maintenant f un fonction L^2 invariante. On peut trouver une suite de fonctions Lipschitziennes bornées f_n qui convergent en norme L^2 vers f. Il en va alors de même pour les conditionnelles $E(f_n|\, \mathcal{I})$. Quitte à considérer une sous-suite n_ℓ, on peut supposer qu'on a convergence pour tout x appartenant à un ensemble Ω_0 de mesure totale. Pour tout point $x \in \Omega_0 \cap \Omega_{f_n}$ et tout $y \in W^{ss}(x)$,

$$f(x) = \lim E(f_{n_\ell} | \mathcal{I})(x) = \lim E(f_{n_\ell} | \mathcal{I})(y) = f(y).$$

D'où le résultat.

Deuxième preuve

Étant donné un ensemble mesurable $A \subset X$, on note $\tau_A(x)$ le temps moyen passé par x dans A, ou encore la fréquence de passage de x dans A. Cette quantité satisfait : $\|\tau_A - \tau_B\|_{L^2} \leq \mu(A \Delta B)$.

$$\tau_A(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k}\, Card\ \{i \leq k \mid T^i x \in A\} = E(\mathbf{1}_A | \mathcal{I})(x)$$

Soit C un sous-ensemble fermé de X , $x, y \in X$, $y \in W^{ss}(x)$. Montrons l'égalité $\tau_C(x) = \tau_C(y)$ dès l'instant où ces deux quantités sont bien définies.

Pour cela, posons $V_{1/k}(C) = \{x' \mid d(x', C) < 1/k\}$, pour $k \in \mathbf{N}$. Alors la fréquence de passage de y dans $V_{1/k}(C)$ est supérieure à la fréquence de passage de x dans C : $\tau_{V_{1/k}(C)}(y) \geq \tau_C(x)$. En effet, à partir d'un certain rang, $d(T^n x, T^n y) < 1/k$; par conséquent, $T^n y$ appartient à $V_{1/k}(C)$ dès que $T^n x$ appartient à C. Comme $C = \bigcap V_{1/k}(C)$, on obtient $\tau_C(y) \geq \tau_C(x)$, d'où $\tau_C(x) = \tau_C(y)$ en permutant x et y.

Soit I un ensemble mesurable T-invariant, et F_n une suite croissante de fermés inclus dans I, tels que $\mu(I \backslash F_n) \longrightarrow 0$. Ceci implique : $\tau_{F_n}(x) \to \tau_I(x)$. Par conséquent, si $y \in W^{ss}(x)$, alors $\tau_I(y) = \tau_I(x)$.

Soit x un élément de I et $y \in W^{ss}(x)$; tous les itérés de x sont dans I et $\tau_I(x) = 1$. Si y n'est pas dans I, aucun de ses itérés n'est dans I et $\tau_I(y) = 0$. Ceci montre l'inclusion $W^{ss}(x) \cap \Omega \subset I$, avec :

$$\Omega = \{x \mid \forall\ n,\ \tau_{F_n}(x) \text{ cv vers } \tau_I(x)\ ;\ \forall\ n, k,\ \tau_{V_{1/k}F_n}(x) \text{ cv vers } \tau_{F_n}(x)\}$$

Par conséquent, l'ensemble invariant I coïncide, à un ensemble négligeable près, avec une union de feuilles stables.

Remarques :

– Tout comme dans le théorème de récurrence de Poincaré, aucune hypothèse de continuité sur T ou de séparabilité sur X n'est nécessaire.

– Ce résultat est encore vrai pour un flot, il suffit de l'appliquer au temps 1 du flot.

3. Le cas de la mesure infinie

L'argument de Hopf est-il encore vrai en mesure infinie ? Peut-on affirmer qu'une fonction mesurable bornée invariante par une transformation conservative, qui préserve une mesure infinie, est encore invariante par le feuilletage stable de la transformation ?

3.1 Le théorème ratio de Hopf

Cette question conduit E. Hopf à chercher un analogue du théorème ergodique lorsque la mesure n'est pas finie. Il y parviendra dans le cas où la transformation est inversible et conservative. Son résultat sera ensuite généralisé dans plusieurs directions. La version due à R. Chacon et D. Ornstein est sans doute la plus connue. Le livre de U. Krengel [Kr95] contient une discussion détaillée de ces généralisations. Voici un énoncé proche du théorème initial de E. Hopf :

Théorème ratio de Hopf
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve la mesure μ et qui est conservative. On considère deux fonctions intégrables $f, p : X \to \mathbf{R}$, avec $p > 0$. Alors les quotients de Hopf :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} f \circ T^k}{\sum_{k=1}^{n} p \circ T^k}$$

convergent pour presque tout $x \in X$ vers une limite T-invariante, qui peut s'exprimer en terme d'espérances conditionnelles.

A l'aide de ce théorème, E. Hopf démontre l'ergodicité du flot géodésique sur les surfaces à courbure -1, relativement au volume canonique défini sur le fibré unitaire tangent, dès l'instant où le flot est conservatif.

Il existe plusieurs démonstrations du théorème quotient de Hopf. Il peut par exemple se déduire du théorème ergodique de Birkhoff par des techniques d'induction [Z04].

3.2 Le dénominateur dans le théorème quotient

Le théorème quotient de Hopf n'est pas le seul ingrédient dans la preuve de l'ergodicité du flot géodésique en courbure négative. Il faut également construire un bon dénominateur p, qui permette de contrôler les constantes de Lipschitz intervenant dans la preuve. Par un raisonnement de nature géométrique, E. Hopf montre l'existence d'une certaine fonction intégrable $p : X \to \mathbf{R}$ qui satisfait la propriété suivante :

$$\left|\frac{p(x) - p(y)}{p(y)}\right| \xrightarrow[d(x,y)\to 0]{} 0$$

A l'aide de cette estimée, il est possible de répéter le raisonnement qui fonctionnait en mesure finie, et d'obtenir le résultat recherché.

Il paraît peu probable qu'un tel dénominateur puisse exister en dehors du cadre de la géométrie hyperbolique, si bien que peu de généralisations ont été proposées jusqu'à présent.

3.3 La version générale de l'argument de Hopf

Malgré tout, l'argument de Hopf est vrai en toute généralité :

Théorème [C07bis]
Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne sur X et $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ et qui est conservative. Supposons qu'il existe une famille dénombrable d'ouverts, chacun de mesure finie, dont l'union recouvre presque tout X. Alors toute fonction mesurable bornée T-invariante est W^{ss}-invariante.

De manière remarquable, il n'est pas nécessaire de faire appel au théorème quotient de Hopf pour démontrer ce résultat. On peut se contenter d'interpréter localement les quotients de Hopf comme des moyennes de Birkhoff d'une certaine application induite, et d'appliquer le théorème ergodique presque sûr à cette application. Il ne semble par contre pas possible de se baser sur le théorème ergodique L^2 pour mener à bien la preuve.

Preuve
Il n'est pas difficile de voir que X peut (presque) s'écrire comme une union dénombrable croissante de fermés F_i, chacun de bord négligeable, et chacun admettant un voisinage $U_{\delta_i} = \{y \mid d(y, F_i) < \delta_i\}$ de mesure finie. On travaille en restriction à chacun des F_i.

Pour alléger les notations, oublions pour l'instant l'indice i. Soit $f : X \to \mathbf{R}_+$ une fonction Lipschitzienne positive bornée qui est nulle sur F^c, et soit U un voisinage de F comme considéré au-dessus.

Induction

Considérons la transformation T_F induite par T sur F.

$T_F(x) = T^{n_F(x)}(x)$, en posant $n_F(x) = min\{n \in \mathbf{N} - \{0\} \mid T^n(x) \in F\}$

Appliquons le théorème ergodique de Birkhoff à la transformation T_F :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(T_F^i(x)) \longrightarrow E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F)(x)$$

Voyons quel est le rapport entre ces moyennes et les quotients de Hopf. Posons pour $k \in \mathbf{N}$:

$$n_F^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} n_F(T_F^i(x))$$

Si bien que pour tout $N \in \mathbf{N}$ tel que $n^k(x) \leq N < n^{k+1}(x)$, on a :

$$T_F^k(x) = T^{n_F^k(x)}(x) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_F(T^j(x)) = k.$$

Si $T^j(x)$ n'est pas dans F, $f(T^j(x))$ est nul car la fonction f est nulle sur F^c. On a donc :

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(T_F^i(x)) = \frac{\sum_{j=1}^{N} f(T^j(x))}{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_F(T^j(x))}$$

Cette relation va nous permettre de montrer que si y appartient à $W^{ss}(x)$,

$$E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F)(x) \geq E_{\mu_{|U}}(f \mid \mathcal{I} \cap U)(y)$$

Monotonie

Soit $x \in F$ et $y \in W^{ss}(x)$. On peut trouver N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $T^N(y)$ est dans U dès que $T^N(x)$ est dans F. Ceci montre l'inégalité :

$$\sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_F(T^j(x)) \leq \sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_U(T^j(y))$$

Si $T^j(x)$ et $T^j(y)$ ne sont pas dans F, $f(T^j(x)) = f(T^j(y)) = 0$. Soit C la constante de Lipschitz de f et $\varepsilon > 0$. Si N_0 est assez grand, on a la majoration : $sup_{j \geq N_0} d(T^j(x), T^j(y)) \leq \frac{\varepsilon}{C}$. Ceci implique :

$$\sum_{j=N_0}^{N} \mid f(T^j(x)) - f(T^j(y)) \mid \leq 2\,\varepsilon \sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_U(T^j(y))$$

Considérons l'égalité :

$$\frac{\sum_{j=N_0}^{N} f(T^j(x))}{\sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_F(T^j(x))} = \frac{\sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_U(T^j(y))}{\sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_F(T^j(x))} \left(\frac{\sum_{j=N_0}^{N} f(T^j(y))}{\sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_U(T^j(y))} + \frac{\sum_{j=N_0}^{N} f(T^j(x)) - f(T^j(y))}{\sum_{j=N_0}^{N} \mathbf{1}_U(T^j(y))} \right)$$

Le premier terme converge vers $E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F)(x)$. Le terme en facteur est plus grand que 1 tandis qu'on voit apparaître la limite $E_{\mu_{|U}}(f \mid \mathcal{I} \cap U)(y)$ dans le second terme. On obtient en passant à la limite :

$$E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F)(x) \geq E_{\mu_{|U}}(f \mid \mathcal{I} \cap U)(y) - 2\varepsilon$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. On a donc l'inégalité recherchée.

W^{ss}-invariance en restriction à F

Considérons à présent des voisinages U_δ de F de plus en plus petit. Fixons un δ_0 tel que $\mu(U_{\delta_0})$ soit fini. D'après le théorème de convergence croissante pour les martingales,

$$E_{\mu_{|U_\delta}}(f \mid \mathcal{I} \cap U_\delta) \longrightarrow E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F) \quad \text{dans} \quad L^2(F)$$

Quitte à passer à des sous-suites, on obtient finalement :

$$E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F)(x) \geq E_{\mu_{|F}}(f \mid \mathcal{I} \cap F)(y)$$

Il suffit d'inverser le rôle de x et y pour obtenir une égalité dans l'expression précédente. Enfin, comme le bord de F est négligeable, il est possible d'approcher toute fonction f dans $L^2(F,\mu)$ par des fonctions Lipschitziennes sur X nulles hors de F. Si f est la restriction d'une fonction mesurable bornée T-invariante, on obtient l'égalité $f(x) = f(y)$ pour x, y appartenant à un sous-ensemble de mesure pleine de F, sous la condition $y \in W^{ss}(x)$. Le théorème s'en déduit.

Remarque
Un raisonnement similaire s'applique aux fonctions propres du système [C07bis].

Chapitre II

Feuilletages stables

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas d'une transformation définie sur un espace métrique, et préservant une mesure finie. On a vu dans le chapitre précédent qu'il existe un rapport entre fonctions invariantes par une transformation et fonctions constantes le long du feuilletage stable. L'étude des feuilles stables et instables constitue une première étape dans la détermination des propriétés ergodiques de la transformation.

Le feuilletage stable est dit *ergodique* si les seules fonctions W^{ss}-invariantes sont constantes presque partout. D'après ce qui précède, ceci implique l'ergodicité de notre application. On peut donc chercher à relier les propriétés du feuilletage et celles de la transformation.

De manière générale, on peut chercher à affaiblir ou renforcer les exigences dans la définition du feuilletage stable, dans le but d'atteindre certaines propriétés de la transformation. Voici plusieurs alternatives au feuilletage considéré au chapitre précédent :

Feuilletage moyen dual :

$$\bar{W}^{ss}_{dual}(x) = \left\{ y \in X \,|\, \forall\, f \in C_b(X),\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) - f(T^k y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

Feuilletage moyen dual absolu :

$$\bar{W}^{ss}(x) = \left\{ y \in X \,\middle|\, \forall\, f \in C_b(X),\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| f(T^k x) - f(T^k y) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

Feuilletage moyen :

$$W^{ss}_{moy}(x) = \left\{ y \in X \;\Big|\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(T^k x, T^k y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

Feuilletage standard :

$$W^{ss}(x) = \left\{ y \in X \;\Big|\; d(T^k x, T^k y) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \right\}$$

Feuilletage exponentiel :

$$W^{ss}_{exp}(x) = \left\{ y \in X \;\Big|\; \overline{\lim}\, \frac{1}{k} \ln d(T^k x, T^k y) < 0 \right\}$$

Feuilletage uniforme ($\lambda < 0$) :

$$W^{ss}_{\lambda}(x) = \left\{ y \in X \;\Big|\; \overline{\lim}\, \frac{1}{k} \ln d(T^k x, T^k y) < \lambda \right\}$$

1. Décomposition ergodique et feuilletage dual

On peut se demander s'il existe une propriété du feuilletage qui soit équivalente à l'ergodicité de la transformation. Pour cela, nous allons affaiblir la notion de feuilletage stable, ce qui va permettre de donner une réalisation géométrique des composantes ergodiques de la transformation.

Définition
Soit X un espace topologique, $T : X \to X$ une application borélienne. On pose :

$$\bar{W}^{ss}_{dual}(x) = \left\{ y \in X \,|\, \forall\, f \in C_b(X),\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) - f(T^k y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

L'ensemble des fonctions continues bornées définies sur X à valeurs réelles a été noté $C_b(X)$. Les ensembles $\bar{W}^{ss}_{dual}(x)$ mesurent une contraction moyenne pour l'action duale de T sur les fonctions.

Soit μ une mesure de probabilité invariante par T. On va montrer que la partition $\{W^{ss}(x)\}_{x\in X}$ coïncide avec la partition en composantes ergodiques associée à μ, à un ensemble μ-négligeable près. La partition $\{W^{ss}(x)\}_{x\in X}$ est donc une réalisation géométrique simultanée des décompositions ergodiques de toutes les probabilités invariantes par T.

1.1 Quelques notations

Commençons par rappeler quelques définitions.

Un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un *espace de Lebesgue* s'il est isomorphe, sur le plan mesurable, à un intervalle de $\mathbf{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, auquel on a éventuellement ajouté un nombre au plus dénombrable de mesures de Dirac ponctuelles. On ne considère dans la suite de ce chapitre que des espaces de Lebesgue probabilisés. De plus, la tribu $\mathcal{T}$ sera toujours complète relativement à la mesure μ.

Un espace topologique est *Borel standard* s'il est homéomorphe à un sous-ensemble borélien d'un espace métrique séparable complet. On obtient un espace de Lebesgue si on munit un tel espace d'une mesure de probabilité borélienne, et qu'on complète la tribu des boréliens relativement à cette mesure.

Une partition $\{\xi(x)\}_{x\in X}$ d'un espace mesuré X est dite *mesurable* si on peut trouver des ensembles mesurables B_n, chacun union d'éléments de la partition, tels que, pour presque tout $x \in X$, on ait l'égalité :

$$\xi(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$$

On convient d'identifier deux partitions mesurable ξ, ξ' si elles coïncident presque partout au sens suivant : il existe $\Omega \subset X$ tel que $\mu(\Omega^c) = 0$ et $\xi(x) \cap \Omega = \xi'(x) \cap \Omega$ pour tout x.

Les partitions mesurables des espaces de Lebesgue possèdent des propriétés remarquables qui sont rappelées dans l'appendice. Ces propriétés ne sont pas utilisées dans la suite de ce chapitre.

1.2 Désintégration

Le théorème suivant montre comment désintégrer une mesure de probabilité le long d'une partition mesurable. Sous cette forme, il est dû à Rokhlin [Ro52].

Théorème
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de Lebesgue et ξ une partition mesurable. Alors il existe une unique famille de mesures de probabilité $\mu_{\xi(x)}$ portées par les éléments de la partition, et satisfaisant, pour tout $A \in \mathcal{T}$:

– l'ensemble A est $\mu_{\xi(x)}$-mesurable pour μ-presque tout x ;

– *la fonction* $x \mapsto \mu_{\xi(x)}(A)$ *est* μ*-intégrable et son intégrale vaut* $\mu(A)$ *:*

$$\mu(A) = \int \mu_{\xi(x)}(A)\ d\mu(x).$$

Preuve

On peut supposer que X est de la forme $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Notons par $\mathcal{C}$ l'algèbre des unions finies de cylindres de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et par $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. L'algèbre $\mathcal{C}$ satisfait le critère de Kolmogorov : toute suite décroissante d'éléments de cette famille, dont l'intersection est vide, est vide à partir d'un certain rang ; elle est donc de mesure nulle relativement à toute mesure finiment additive définie sur $\mathcal{C}$. Par conséquent toute mesure finiment additive définie sur $\mathcal{C}$ admet une unique extension σ-additive à $\mathcal{B}$. Il suffit donc de définir les $\mu_{\xi(x)}$ sur l'algèbre engendrée par les cylindres.

Soit $\hat{\xi} \subset \mathcal{T}$ la tribu des ensembles qui sont unions d'éléments de la partition. Supposons la relation intégrale vérifiée. Considérons $C \in \mathcal{C}$ et $A \in \hat{\xi}$. Comme A est constante sur les éléments de ξ, on doit avoir $\mu(A \cap C) = \int_A \mu_{\xi(x)}(C)\ d\mu$. D'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, ceci est équivalent à l'égalité :

$$\forall\ C \in \mathcal{C},\ \ \mu - pp\, x, \qquad \mu_{\xi(x)}(C) = E(\mathbf{1}_C |\ \hat{\xi})(x)$$

La fonction $E(\mathbf{1}_C |\ \hat{\xi})$ n'est à priori définie que presque partout. Choisissons un représentant qui est constant sur les éléments de la partition. Les éléments de $\mathcal{C}$ étant en nombre dénombrable, on peut trouver un ensemble Ω, $\mu(\Omega^c) = 0$, pour lequel les quantités $E(\mathbf{1}_C |\ \hat{\xi})(x)$ sont définies pour tout $C \in \mathcal{C}$ et pour tout $x \in \Omega$. Quitte à restreindre à nouveau Ω, on peut supposer que la fonction $C \mapsto E(\mathbf{1}_C |\ \hat{\xi})(x)$ est finiment additive, ce qui donne la mesure $\mu_{\xi(x)}$ recherchée.

La relation intégrale est satisfaite pour $A \in \mathcal{C}$. Montrons que c'est encore vrai si $A \in \mathcal{T}$. Comme tout ouvert est union croissante d'élément de $\mathcal{C}$, elle est encore vrai pour les ouverts, et par passage au complémentaire, pour les fermés. Soit $A \in \mathcal{B}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un fermé F et un ouvert U tels que $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$ et $F \subset A \subset U$. On a donc :

$$\mu(A) - \varepsilon \leq \mu(F) = \int \mu_{\xi(x)}(F)\ d\mu(x) \leq \int \mu_{\xi(x)}(U)\ d\mu(x) = \mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$$

Ceci démontre la relation recherchée pour $A \in \mathcal{B}$. Il reste à la vérifier pour $A \in \mathcal{T}$ μ-négligeable. Un tel ensemble est contenu dans un $B \in \mathcal{B}$ négligeable. La relation montre que B est $\mu_{\xi(x)}$-négligeable pour μ-presque tout x. Il en va donc de même pour A. Ceci implique $\int \mu_{\xi(x)}(A)\ d\mu = 0$.

Il reste à montrer que $\mu_{\xi(x)}$ est supporté par $\xi(x)$. Soit B_n la suite d'ensembles intervenant dans la définition de ξ. On a, pour μ-presque tout x, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mu_{\xi(x)}(B_n) = E(\mathbf{1}_{B_n} | \hat{\xi})(x) = \mathbf{1}_{B_n}(x)$. Par conséquent, les B_n et B_n^c qui contiennent x sont de mesure totale pour $\mu_{\xi(x)}$, et il en va de même pour $\xi(x)$, qui est une intersection dénombrable de tels ensembles.

Remarques :
– Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une tribu engendrée par un nombre dénombrable d'éléments, alors pour presque tout x, les éléments de $\mathcal{B}$ sont $\mu_{\xi(x)}$-mesurables. Cependant, en général, les $\mu_{\xi(x)}$ ne sont pas définis sur toute la tribu $\mathcal{T}$.
– Après complétion de $\mathcal{B}$, l'espace X muni de $\mu_{\xi(x)}$ est bien sûr un espace de Lebesgue.

1.3 Décomposition ergodique

Proposition
Soit X un espace métrique, $T : X \to X$ une application borélienne et $x \in X$. Il existe au plus une mesure de probabilité borélienne invariante ν_x satisfaisant $\nu_x(X \backslash \bar{W}^{ss}_{dual}(x)) = 0$. Lorsque cette mesure existe, elle est ergodique et on a :

$$\forall y \in \bar{W}^{ss}_{dual}(x),\ \forall f \in C_b(X), \quad \frac{1}{n} S_n(f)(y) \to \int f d\nu_x.$$

Preuve
Soit $f \in C_b(X)$ et $n_i \in \mathbf{N}$ une suite telle que $\frac{1}{n_i} S_{n_i}(f)(x)$ converge ; on note l sa limite. Comme $\frac{1}{n_i} S_{n_i}(f)(y)$ converge aussi vers l pour tout $y \in \bar{W}^{ss}_{dual}(x)$, on a pour toute probabilité μ invariante, supportée par $\bar{W}^{ss}_{dual}(x)$:

$$\int f\, d\mu = \int_{\bar{W}^{ss}_{dual}(x)} f\, d\mu = \int_{\bar{W}^{ss}_{dual}(x)} \frac{1}{n_i} S_{n_i}(f)(y)\ d\mu(y) = l\, \mu(\bar{W}^{ss}_{dual}(x)) = l$$

Deux probabilités invariantes portées par $\bar{W}^{ss}_{dual}(x)$ donnent même valeur à l'intégrale de f, elles sont donc égales. Si de plus une telle probabilité ν_x existe, alors $\int f d\nu_x$ est la seule valeur d'adhérence possible pour la suite $\frac{1}{n} S_n(f)(y)$, qui est donc convergente.

Théorème
Soit X un espace Borel standard, $T : X \to X$ une application borélienne et μ une probabilité invariante par T. Alors la partition $\bar{W}^{ss}_{dual}(x)$ est mesurable. L'ensemble des x pour lesquels $\bar{W}^{ss}_{dual}(x)$ porte une probabilité invariante est

de μ-mesure totale et on a, pour toute fonction f borélienne positive, et g μ-intégrable invariante :

$$\int_X f\ g\ d\mu \ = \ \int_X \Big(\int_{\bar{W}^{ss}_{dual}(x)} f\ d\nu_x\Big)\ g(x)\ d\mu(x)$$

Preuve
Soit $\{f_k\}$ une famille dénombrable de fonctions continues, qui permet d'approcher de manière croissante les fonctions indicatrices d'ouverts. Le théorème ergodique de Birkhoff donne un ensemble $\tilde{\Omega}$ de mesure totale pour lequel $\frac{1}{n}S_n(f_k)(x)$ converge vers $Pf_k(x)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$. On pose, pour ces x :

$$\begin{array}{rcl}\tilde{C}(x) & = & \{\, y \in \tilde{\Omega} \mid \forall k \in \mathbf{N},\ \frac{1}{n}S_n(f_k)(x) - \frac{1}{n}S_n(f_k)(y) \longrightarrow 0 \,\} \\ & = & \{\, y \in \tilde{\Omega} \mid \forall k \in \mathbf{N},\ Pf_k(x) = Pf_k(y) \,\}\end{array}$$

La partition $\tilde{C}$ est mesurable car ses éléments sont intersection d'ensembles de la forme $\{\, x \mid Pf_k(x) \in [r_1, r_2] \,\}$, $m \in \mathbf{N}$, $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$. Elle est T-invariante. Il en va donc de même pour les mesures $\mu_{\tilde{C}(x)}$, par unicité de la désintégration. Comme $\frac{1}{n}S_n(f_k)(y)$ converge vers $Pf_k(x)$ pour tout $y \in \tilde{C}(x)$, on a $\int f_k\ d\mu_{\tilde{C}(x)} = Pf_k(x)$.

Soit $\Omega = \{x \in \tilde{\Omega} \mid \forall\, k,\ \frac{1}{n}S_n(f_k)(x) \to \int f_k\, d\mu_{\tilde{C}(x)}\,\}$. La formule de désintégration montre que Ω est $\mu_{\tilde{C}(x)}$-négligeable pour μ-pp x, et le théorème du portemanteau montre que $\tilde{C}(x) \cap \Omega$ est égal à $\bar{W}^{ss}_{dual}(x) \cap \Omega$. La partition $\bar{W}^{ss}_{dual}$ est donc mesurable et pour μ-pp x, $\bar{W}^{ss}_{dual}(x)$ porte une mesure de probabilité invariante : $\nu_x = \mu_{\tilde{C}(x)} = \mu_{\bar{W}^{ss}_{dual}(x)}$.

Enfin, de la relation $\int f_k\ d\mu_{\bar{W}^{ss}_{dual}(x)} = Pf_k(x)$, pour pp $x \in X$, on en déduit la relation intégrale recherchée pour les f_k, puis, par convergence croissante, pour les fonctions indicatrices d'ouverts, et enfin pour tous les f. Ceci démontre le théorème.

Ces deux derniers résultats montrent que la partition donnée par les $\bar{W}^{ss}_{dual}$ est égale à la décomposition ergodique de la mesure μ, à un ensemble μ-négligeable près, et ceci est valide pour toute mesure de probabilité μ invariante par T. En particulier, cette partition est ergodique si et seulement si la transformation T est ergodique.

Il existe diverses méthodes pour construire la décomposition ergodique associée à une mesure invariante. L'approche qu'on vient de présenter est similaire à celle adoptée par V. S. Varadarajan [Va63].

2. Feuilletage moyen

Rappelons qu'une fonction $f : X \to \mathbf{C}$ est une fonction propre de la transformation T si elle satisfait une équation de la forme :

$$f \circ T = e^{i\alpha}\, f \quad \mu\ p.p.$$

pour un certain $\alpha \in \mathbf{R}$. Si les seules fonctions propres sont les constantes, la transformation est dite *faiblement mélangeante*. Si on s'intéresse au mélange faible plutôt qu'à l'ergodicité, il vaut mieux considérer un des deux feuilletages suivants :

$$\bar{W}^{ss}(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; \forall\, f \in C_b(X),\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| f(T^k x) - f(T^k y) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

$$W^{ss}_{moy}(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(T^k x, T^k y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$$

D'après un lemme classique sur la convergence des séries à termes positifs au sens des moyennes de Césaro, cela revient à demander la convergence des suites $|f(T^k x) - f(T^k y)|$ ou $d(T^k x, T^k y)$ pour k appartenant à un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ de densité 1.

Théorème
Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie sur X, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ. Alors les fonctions propres sont $\bar{W}^{ss}$-invariantes. Si la transformation T est inversible, elles sont également $\bar{W}^{su}$-invariantes.

Preuve
Soit P_α le projecteur sur le sous-espace des fonctions propres associée au réel α. Le théorème ergodique L^2 appliqué à l'isométrie $Uf = e^{-i\alpha} f \circ T$ donne la convergence :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-ik\alpha}\ f \circ T^k \xrightarrow[n\to\infty]{} P_\alpha f$$

Il suffit de reprendre la preuve de l'argument de Hopf donnée au chapitre précédent, en remplaçant les sommes de Birkhoff par les sommes ci-dessus.

Remarques :

– Le théorème reste vrai avec $\bar{W}^{ss}$ remplacé par W^{ss}_{moy}.

– Dans la définition du feuilletage $\bar{W}^{ss}$, on aurait pu considérer des fonctions Lipschitziennes bornées plutôt que l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées. Cela ne change rien au théorème. Qui plus est, les deux partitions sont égales, modulo un ensemble négligeable.

– Pour une rotation irrationnelle sur le cercle, le feuilletage $\bar{W}^{ss}_{dual}$ est ergodique tandis que $\bar{W}^{ss}(x) = W^{ss}_{moy}(x) = \{x\}$ pour tout x.

Questions

– Peut-on raisonner comme dans le cas de la décomposition ergodique et montrer que la partition $\{\bar{W}^{ss}(x)\}_{x\in X}$ correspond à la partition associée à l'algèbre engendrée par toutes les fonctions propres de la transformation ?

– Peut-on donner des exemples non triviaux de transformations pour lesquelles les partitions $\bar{W}^{ss}$ et W^{ss}_{moy} sont différentes ?

3. Feuilletage stable standard

Le feuilletage le plus étudié est le suivant :

$$W^{ss}(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; d(T^k x, T^k y) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \right\}$$

On a vu au chapitre précédent que toute fonction invariante par la transformation T est en fait invariante par ce feuilletage stable. L'ergodicité de ce feuilletage est en fait plus forte que l'ergodicité de la transformation. Nous allons voir qu'il implique son mélange.

3.1 Feuilletage et mélange

Pour mener à bien cette étude, nous avons besoin de quelques outils qui proviennent de la théorie des espaces de Hilbert. Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire noté $\langle f, g\rangle$. Rappelons qu'une suite f_n de H converge faiblement vers f si, pour tout g dans H, on a :

$$\langle f_n, g\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, g\rangle$$

La convergence faible est parfois notée comme suit : $f_n \rightharpoonup f$. Elle satisfait les deux propriétés suivantes :

– (*Banach-Alaoglu*) La boule unité d'un espace de Hilbert est faiblement séquentiellement compact.

– (*Banach-Saks*) si $f_n \to f$ faiblement, alors il existe une sous-suite n_k telle que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{n_k} \to f$ en norme.

On peut trouver des preuves élémentaires de ces deux résultats classiques dans le livre de F. Riesz [RN90]. Rappelons enfin qu'une transformation T préservant une mesure de probabilité μ est mélangeante relativement à μ si pour tout $f \in L^2(X,\mu)$, la suite $f \circ T^n$ converge faiblement vers une constante.

Théorème [C07]
Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie sur X, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ. Soit $f \in L^2(X)$; alors les valeurs d'adhérence faibles de la suite $f \circ T^n$ sont W^{ss}-invariantes. Si de plus T est inversible, ces valeurs d'adhérence sont aussi W^{su}-invariantes.

Preuve
Soient n_i et g tels que $f \circ T^{n_i} \rightharpoonup g$. Supposons tout d'abord que f est lipschitzienne bornée. Le lemme de Banach-Saks donne des sous-suites m_ℓ, n_{i_k} telles que :

$$\Psi_\ell(x) := \frac{1}{m_\ell}\sum_{k=1}^{m_\ell} f \circ T^{n_{i_k}}(x) \ \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \ g(x) \quad p.p.$$

Si $y \in W^{ss}(x)$, $\quad |\Psi_\ell(x) - \Psi_\ell(y)| \leq C\frac{1}{m_\ell}\sum_{k=1}^{m_\ell} d(T^{n_{i_k}}(x), T^{n_{i_k}}(y)) \ \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \ 0.$
Par conséquent, g est W^{ss}-invariante.

Soit $f \in L^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver f' lipschitzienne telle que $||f - f'|| < \varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f' \circ T^{n_k}$ converge faiblement vers une fonction g', qui est W^{ss}-invariante. On a donc : $(f-f') \circ T^{n_k} \rightharpoonup g - g'$ ce qui implique :

$$||g - g'|| \ \leq \ \underline{\lim}\ ||(f - f') \circ T^{n_k}|| \ \leq \ ||f - f'|| \ < \ \varepsilon.$$

On peut donc trouver une suite de fonctions W^{ss}-invariantes qui converge vers g en norme L^2 et, après extraction, presque partout. Ceci montre que g est W^{ss}-invariante.

Traitons le cas T inversible. Soit I le sous-espace des fonctions W^{su}-invariantes. Montrons que si f appartient à $I^\perp$, alors $f \circ T^n$ converge faiblement vers zéro. Soit g une limite faible de $f \circ T^{n_i}$. Appliquons ce qui précède à T^{-1} ; on peut trouver une sous-suite n_{i_k} et une fonction $g_0 \in I$ telle que $g \circ T^{-n_{i_k}} \rightharpoonup g_0$. On obtient :

$$\langle g, g \rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle f \circ T^{n_{i_k}}, g \rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle f, g \circ T^{-n_{i_k}} \rangle = \langle f, g_0 \rangle = 0.$$

Toute fonction $f \in L^2$ peut s'écrire comme une somme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in I$ et $f_2 \in I^{\perp}$. La suite $f_2 \circ T^n$ tend faiblement vers 0. Les valeurs d'adhérence de $f \circ T^n$ sont donc aussi des valeurs d'adhérence de la suite $f_1 \circ T^n$, qui appartient à I. Le théorème est donc démontré.

Corollaire

Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie sur X, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ. Alors l'ergodicité du feuilletage stable W^{ss} implique le mélange de la transformation T.

Il ne faut pas s'attendre à ce qu'on ait équivalence entre le mélange de la transformation et l'ergodicité de W^{ss}. Un contre-exemple est donné par le temps 1 du flot horocyclique sur une surface hyperbolique compacte. Cette transformation est mélangeante, mais d'entropie nulle. Un petit calcul montre que les feuilles stables associées sont réduites à des points. Ceci n'exclut pas, du reste, l'existence d'une distance différente de celle issue de la métrique riemannienne, pour laquelle cette transformation a un feuilletage stable ergodique.

On peut chercher à modifier un peu la définition du feuilletage, dans le but d'obtenir une équivalence. L'étude des ensembles suivants est susceptible d'apporter des informations :

$$W^{ss}_{dual}(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; \forall f \in C_b(X),\ f(T^k x) - f(T^k y) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \right\}$$

Enfin, voila deux résultats en lien avec le théorème précédent. Le premier est une caractérisation du mélange due à Blum et Hanson [BH60] : Une transformation T est mélangeante si et seulement si pour toute suite strictement croissante k_i, et tout $f \in L^2$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f \circ T^{k_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \int f$$

On renvoie au livre de U. Krengel [Kr95] pour la preuve. Ce résultat permet de démontrer le corollaire en remplaçant les sommes de Birkhoff par les sommes le long des suites k_i dans l'argument de Hopf.

Le second résultat est dû à R. Ellis et W. Perizzo [EP78] et concerne le mélange faible : Soit P_{eig} le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par les fonctions propres de la transformation. Alors on peut trouver une suite n_i telle que pour tout $f \in L^2$:

$$f \circ T^{n_i} \rightharpoonup P_{eig} f$$

Ce résultat peut se déduire des théorèmes 4.4 et 4.5, §2.4 de [Kr95]. Il permet d'obtenir l'unique ergodicité des actions horosphériques à partir du mélange faible de la transformation associée.

3.2 Un exemple élémentaire

Illustrons ces principes abstraits sur un des exemples les plus élémentaires de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques. Considérons l'action de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur le tore $\mathbf{T}^2$. Les feuilletages stables et instables sont les projections sur le tore des droites du plan dirigées selon les deux vecteurs propres de la matrice.

Plaçons-nous dans le système de coordonnées donné par ces deux vecteurs propres. Être invariant par les feuilletages stables et instables de la transformation, c'est ne pas dépendre des deux coordonnées, à un ensemble négligeable près. Comme la mesure de Lebesgue est une mesure produit dans ces coordonnées, c'est être en fait constant presque partout. Les suites de la forme $f \circ T^n$ convergent faiblement vers des constantes et la transformation est mélangeante.

3.3 Mélange d'ordre multiple

L'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset L^2(X)$ est notée $Conv(A)$; il s'agit du plus petit convexe contenant A. Soit $f \in L^2(X)$. On démontre de la même façon que tous les éléments du convexe suivant sont W^{ss}-invariants :

$$\bigcap_{N \in \mathbf{N}} \overline{Conv(\{f \circ T^n \mid n \geq N\})}$$

Ce résultat est sans doute plus satisfaisant du point de vue de l'analyse convexe, mais il n'apporte rien du point de vue du mélange. En effet, on vérifie sans difficulté que si $T^n f \rightharpoonup g$, alors $\bigcap_{N \in \mathbf{N}} \overline{Conv(\{f \circ T^n \mid n \geq N\})} = \{g\}$.

On peut également s'intéresser au mélange d'ordre k. Là encore, les valeurs d'adhérence faibles des suites de la forme $f_1 \circ T^{n_1} \ f_2 \circ T^{n_1+n_2} ... f_k \circ T^{n_1+...+n_k}$ sont invariantes par le feuilletage stable.

Théorème
Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie sur X, $T : X \to X$ une application mesurable qui préserve μ. On se donne des fonctions f_1, f_2,... f_k mesurables bornées. Alors l'ensemble suivant est composé de fonctions qui sont W^{ss}-invariantes :

$$\bigcap_{N \in \mathbf{N}} \overline{Conv(\{f_1 \circ T^{n_1} \ f_2 \circ T^{n_1+n_2} ... \ f_k \circ T^{n_1+...+n_k} \mid n_1, \, n_2, \, ...n_k \, \geq N\})}$$

Preuve
Commençons par le cas où les fonctions f_i sont Lipschitziennes bornées. Posons $m_i = n_1 + n_2 + ... + n_i$. Rappelons que l'adhérence faible d'un ensemble convexe coïncide avec son adhérence forte. Soit g un élément de l'adhérence convexe des $\{\prod f_i \circ T^{m_i}\}$. Prenons $N \in \mathbf{N}$; on peut trouver des $p_{j,N} \in [0,1]$ tels que $\sum_j p_{j,N} = 1$ et des $n_{i,j,N} > N$ tels que

$$|| \sum_j \ p_{j,N} \prod_{i=1}^{k} f_i \circ T^{m_{i,j,N}} - g \ || < \frac{1}{N}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu presque partout. Soit x, y deux points pour lesquels on a cette convergence. A l'aide de l'identité remarquable :

$$\prod x_i - \prod y_i = \sum \ (x_i - y_i) \prod_{j<i} y_j \prod_{j>i} x_j$$

et du caractère borné et Lipschitzien des f_i, on obtient les majorations :

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| \ &\leq \ \overline{\lim_N} \ \sum_j \ p_{j,N} \left| \prod_{i=1}^{k} f_i(T^{m_{i,j,N}}(x)) - \prod_{i=1}^{k} f_i(T^{m_{i,j,N}}(y)) \right| \\ &\leq \ \overline{\lim_N} \ \sum_j \ p_{j,N} \ C \ sup_{n \geq N} \ d(T^n x, T^n y) \\ &\leq \ \overline{\lim_N} \ C \ sup_{n \geq N} \ d(T^n x, T^n y) \end{aligned}$$

Si $y \in W^{ss}(x)$, on a donc $g(x) = g(y)$.

Lorsque les f_i sont des fonctions bornées arbitraires, on les approche en norme L^2 par des fonctions f'_i Lipschitziennes bornées. On a alors :

$$|| \sum_j p_{j,N} \left(\prod_{i=1}^k f_i \circ T^{m_{i,j,N}} - \prod_{i=1}^k f'_i \circ T^{m_{i,j,N}} \right) || \leq C \sum_i || f_i - f'_i ||$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les fonctions suivantes :

$$\sum_j p_{j,N} \prod_{i=1}^k f'_i \circ T^{m_{i,j,N}}$$

convergent faiblement vers une certaine fonction, qui est W^{ss}-invariante, d'après ce qui précède. La fonction g est limite faible de fonctions W^{ss}-invariantes, elle est donc elle-même W^{ss}-invariante.

Question
Lorsque T est inversible, peut-on affirmer que les valeurs d'adhérence faibles des suites de la forme $f_1 \circ T^{n_1} \, f_2 \circ T^{n_1+n_2} \ldots f_k \circ T^{n_1+\ldots+n_k}$ sont W^{su}-invariantes ?

4. Feuilletage uniforme et exponentiel

Afin d'étudier des propriétés plus fortes que le mélange, on peut vouloir forcer une certaine vitesse de contraction le long des feuilles stables du système. Ceci amène à considérer les ensembles suivants :

$$W^{ss}_{exp}(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; \overline{\lim} \, \frac{1}{k} \ln d(T^k x, T^k y) < 0 \right\}$$

Ce feuilletage joue un rôle important dans l'étude des systèmes non-uniformément hyperboliques. Ces propriétés ont été étudiées par F. Ledrappier et L. S. Young, à la suite des travaux de Y. Sinaï et D. V. Anosov sur les difféomorphismes uniformément hyperboliques.

Rappelons que la *tribu de Pinsker* est la tribu engendrée par les ensembles mesurables A d'entropie nulle : $h_\mu(T, \{A, A^c\}) = 0$. Cette tribu est triviale (c.-à-d. coïncide avec la complétion de la tribu $\{\emptyset, X\}$) si et seulement si toutes les partitions finies non triviales (c.-à-d. non réduites à un élément) ont une entropie strictement positive. On dit dans ce cas que la transformation satisfait la propriété K. Cette propriété entraîne le mélange de tout ordre.

Théorème [LY85]
Soit X une variété différentielle compacte, $T : X \to X$ un difféomorphisme C^2 qui préserve une mesure de probabilité borélienne. Alors une fonction est mesurable par rapport à la tribu de Pinsker si et seulement si elle est W^{ss}_{exp}-invariante.

Ceci montre que l'ergodicité de W^{ss}_{exp} est équivalente à la propriété K pour T. Ce résultat remarquable, couplé avec le fait que la tribu de Pinsker d'une application coïncide avec celle de son inverse, implique la symétrie suivante.

Corollaire
Soit X une variété différentielle compacte, $T : X \to X$ un difféomorphisme C^2 qui préserve une mesure de probabilité borélienne. Alors une fonction mesurable est W^{ss}_{exp}-invariante si et seulement si elle est W^{su}_{exp}-invariante.

Ce corollaire n'est pas connu pour le feuilletage W^{ss}. La question pour les difféomorphismes C^1 est elle aussi ouverte.

Dans le cadre des systèmes hyperboliques, il existe une autre relation entre entropie et feuilletage stable : la mesure d'entropie maximale est la seule mesure invariante par le feuilletage stable. Existe-t-il un principe général qui relie l'invariance par le feuilletage et la valeur de l'entropie pour la mesure ?

On peut aussi s'intéresser au caractère Bernoulli de la transformation, ou encore au mélange exponentiel. Ces deux propriétés sont satisfaites par les systèmes uniformément hyperboliques. Pour ces systèmes, on a une contraction uniforme sur les feuilles stables et instables, et on peut trouver un $\lambda < 0$ tel que le feuilletage suivant soit ergodique.

$$W^{ss}_{\lambda}(x) = \left\{ y \in X \;\middle|\; \overline{\lim}\, \frac{1}{k} \ln d(T^k x, T^k y) \leq \lambda \right\}$$

Quelle propriétés de T peuvent se déduire de l'ergodicité de ce feuilletage ?

5. Résumé

En résumé, voila quelques-unes des implications connues à l'heure actuelle :

$$\begin{aligned}
\bar{W}^{ss}_{dual}(x) &= \left\{ y \in X \;\middle|\; \forall f \in C_b(X),\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k x) - f(T^k y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\} \\
W^{ss}_{moy}(x) &= \left\{ y \in X \;\middle|\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(T^k x, T^k y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\} \\
W^{ss}(x) &= \left\{ y \in X \;\middle|\; d(T^n x, T^n y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\} \\
W^{ss}_{exp}(x) &= \left\{ y \in X \;\middle|\; \overline{\lim}\, \frac{1}{n} \ln d(T^n x, T^n y) < 0 \right\}
\end{aligned}$$

X	T	ergodicité de		propriété de T
Borel standard	mesurable	$\bar{W}^{ss}_{dual}$	$\Leftrightarrow$	ergodicité
métrique	mesurable	W^{ss}_{moy}	$\Rightarrow$	mélange faible
métrique	mesurable	W^{ss}	$\Rightarrow$	mélange
variété	difféo C^2	W^{ss}_{exp}	$\Leftrightarrow$	propriété K

Questions

– Pour une transformation inversible, à quelle condition l'invariance par W^{ss} implique-t-elle l'invariance par W^{su} ?

– Y a-t-il un feuilletage dont l'ergodicité soit équivalente à la propriété de Bernoulli pour la transformation ? Même question pour le mélange exponentiel.

– Peut-on donner des exemples de systèmes réguliers pour lesquels W^{ss}_{exp} est trivial (c.-à-d. $W^{ss}_{exp}(x) = \{x\}$ pour pp x) mais W^{ss} est ergodique ?

Chapitre III

Recollement d'orbites

1. Structure de produit local

La notion de produit local est introduite par S. Smale [Sm67] dans le contexte des systèmes uniformément hyperbolique. Cette notion permet de recoller les orbites, en se servant du fait que les feuilles stables et instables forment un système de coordonnées au voisinage de tous les points.

Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu. Rappelons que les feuilles stables et instables d'un point $x \in X$ sont définies par :

$$W^{ss}(x) := \{\ y \in X \mid \lim_{t\to+\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0\ \}$$

$$W^{su}(x) := \{\ y \in X \mid \lim_{t\to-\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0\ \}$$

On définit également les feuilles stables et instables locales en posant :

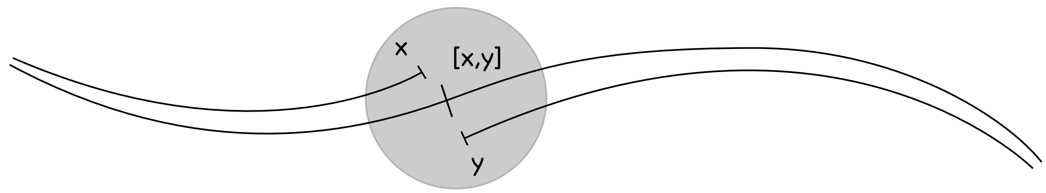
$$W^{ss}_\varepsilon(x) := \{\ y \in W^{ss}(x) \mid d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0\ \}$$

$$W^{su}_\varepsilon(x) := \{\ y \in W^{su}(x) \mid d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \leq 0\ \}$$

Définition
Le flot ϕ_t admet une structure de produit local *au voisinage d'un point $x_0 \in X$ si on peut trouver un voisinage V de x_0 avec la propriété suivante :*
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in V$ satisfaisant $d(x,y) < \delta$, il existe un point $[x,y] \in X$ et un réel $t \in\ ]-\varepsilon, \varepsilon[$ tels que :

$$[x,y] \ \in\ W^{su}_\varepsilon(\phi_t(x)) \cap W^{ss}_\varepsilon(y).$$

Un flot admet une structure de produit local s'il admet une telle structure au voisinage de tous les points. Cette propriété est résumée par le diagramme suivant :



On dit qu'on a recollé l'orbite de x avec l'orbite de y au niveau du point x_0.

Dans le contexte des flots uniformément hyperboliques, on montre que si l'adhérence de l'ensemble des points périodiques est hyperbolique, alors il existe une structure de produit local pour le flot en restriction à cette adhérence ; cf par exemple [Shu87]. Le produit local est ensuite utilisé dans la preuve du théorème de décomposition spectrale, qui donne les premières informations concernant la dynamique topologique du flot.

On s'intéresse dans la suite à des systèmes définis sur des espaces non compacts, et dont les propriétés de dilatation et contraction ne sont plus forcément uniformes, mais pour lesquels on peut encore démontrer l'existence d'une structure de produit local. On est donc amené à se poser la question suivante :

Quelles sont les propriétés topologiques d'un système dynamique qui peuvent se déduire de l'existence d'une structure de produit local ?

1.1 Transitivité et connexité

Rappelons quelques définitions. Soit ϕ_t un flot défini sur un espace topologique X, et $x \in X$. Les ensembles α et ω-limite du point x sont définis comme suit :

$$\alpha(x) = \{y \in X \mid \exists\, t_i \to -\infty \ \text{ tel que } \phi_{t_i}(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} y\}$$
$$\omega(x) = \{y \in X \mid \exists\, t_i \to +\infty \ \text{ tel que } \phi_{t_i}(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} y\}$$

Le point est *ω-récurrent*, ou encore positivement récurrent, si $x \in \omega(x)$. Les points *α-récurrents* sont définis de manière similaire. D'après le théorème de récurrence de Poincaré, les points qui sont à la fois α et ω-récurrents sont denses dans le support de toute mesure finie invariante par le flot.

Le flot ϕ_t est dit *transitif* si pour tout ouverts non vides U et $V \subset X$, on peut trouver une suite $t_i \to +\infty$ telle que $\phi_{t_i}(U) \cap V \neq \emptyset$. Remarquons que si un flot est transitif, l'espace sous-jacent est nécessairement connexe.
Le théorème suivant est une version topologique de l'argument de Hopf.

Théorème [C04]
Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu. On suppose que :
– l'espace X est connexe,
– le flot admet une structure de produit local,
– les points ω-récurrents sont denses dans X, les points α-récurrents aussi.
Alors le flot est transitif.

Preuve
Soit $x \in X$; il s'agit de montrer que le fermé suivant :

$$F = \{y \in X \mid \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, t_i \to +\infty,\ \phi_{t_i}(B(y,\varepsilon)) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset\ \}$$

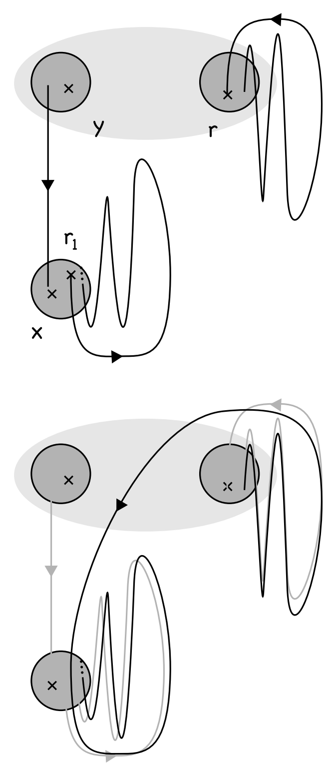
est aussi ouvert.

Fixons $y \in F$ et on montrons que tout point r α-récurrent qui se trouve dans un ouvert de produit local autour de y est aussi dans F.

Considérons une trajectoire partant d'un ε-voisinage de y et aboutissant dans un ε-voisinage de x, ainsi qu'un point r_1 ω-récurrent dans le ε-voisinage de x.

Recollons ces trois orbites : d'abord la trajectoire de r pour les temps négatifs, puis la trajectoire allant de y à x, et enfin l'orbite de r_1 pour les temps positifs.

La trajectoire obtenu est négativement asymptotique à celle de r et positivement asymptotique à celle de r_1. Elle traverse donc les ε-voisinages de r et de x, comme désiré.



1.2 Points de type horosphérique

La notion de point horosphérique est introduite par G. A. Hedlund [Hed36] en 1936 afin de caractériser les horocycles denses dans le contexte des flots géodésiques définis sur des surfaces à courbure négative.

Rappelons comment cette notion est définie : une surface connexe dont la courbure est égale à -1 peut s'identifier à un quotient du disque de Poincaré $\mathbf{D}$ par un sous-groupe discret Γ du groupe d'isométrie de $\mathbf{D}$. Le flot géodésique, défini sur le fibré unitaire tangent à $\mathbf{D}$, possède des variétés stables et instables. La projection de ces variétés sur le disque sont les horosphères positives et négatives. Elles s'identifient aux cercles tangents au bord de $\mathbf{D}$. Fixons une origine $o \in D$. Un point du bord ∂D est dit *horosphérique* si les images de l'origine sous l'action du groupe Γ pénètre dans tous les horosphères tangentes au bord de D au point considéré.

G. A. Hedlund démontre qu'une horosphère dans D possède une projection dense dans la surface si et seulement si son point de tangence avec le bord de D est horosphérique. Ce résultat a ensuite été généralisé par Françoise Dal'bo pour des variétés à courbure négative variable, de dimension finie arbitraire [Da00].

On va montrer que le résultat de G. A. Hedlund est vrai pour tous les flots admettant une structure de produit local. Pour cela, il nous faut donner une définition dynamique de la notion de point horosphérique.

Définition
Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu. Un point $x \in X$ est dit de type horosphérique *si on peut trouver une suite de points $x_i \in W^{ss}(x)$ et une suite de réels $t_i \in \mathbf{R}$ tendant vers l'infini, tels que la suite $\phi_{t_i}(x_i)$ soit convergente.*

Cette définition peut se reformuler comme suit : soit $x \in X$; considérons l'ensemble des points d'accumulation de sa feuille stable $W^{ss}(x)$ sous l'action du flot ϕ_t, pour les temps positifs :

$$\omega(W^{ss}(x)) = \{z \in X \mid \exists\ t_i \to \infty,\ \exists\ x_i \in W^{ss}(x), \quad \text{tels que} \quad \phi_{t_i}(x_i) \to z\}$$

Le point $x \in X$ est de type horosphérique si l'ensemble $\omega(W^{ss}(x))$ est non vide.

Donnons quelques exemples de points horosphériques. Pour commencer, observons que l'ensemble ω-limite de x est inclus dans l'ensemble limite de la feuille :

$$\omega(x) \ \subset \ \omega(W^{ss}(x))$$

Les points récurrents, plus généralement les points dont la trajectoire admet un point d'accumulation, sont donc des points de type horosphérique. Il en va de même pour les points admettant une feuille stable dense, si le flot est continu. Ceci découle de l'égalité :

$$\omega(W^{ss}(x)) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\phi_{[t,\infty[}(W^{ss}(x))}.$$

Théorème [C05]
Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu. On suppose que :
– le flot admet une structure de produit local,
– le flot est transitif,
– les périodes des orbites périodiques engendrent un groupe dense dans $\mathbf{R}$.
Alors tout point de type horosphérique admet une feuille stable dense.

Lorsque X est localement compact, la conclusion du théorème peut se reformuler comme suit : pour tout point $x \in X$,
– ou bien la feuille stable de x est dense dans X,
– ou bien elle part à l'infini sous l'action du flot ϕ_t.
(c.-à-d. elle quitte tout compact après un certain temps).

Remarquons que si l'espace ambiant est compact, tous les points sont horosphériques. Le théorème précédent montre alors que toutes les feuilles sont denses. On dit que le feuilletage stable est minimal. Pour un flot géodésique topologiquement mélangeant défini sur une variété à courbure négative, on a même équivalence entre la minimalité du feuilletage stable et la compacité de la variété ; ceci découle par exemple de la caractérisation des points horosphériques en terme de trajectoires quasi-minimisantes (P. Eberlein [Eb73]).

Preuve
La preuve se décompose en deux étapes. Commençons par montrer que le flot est topologiquement mélangeant : pour toute paire d'ouverts non vide U, $V \ \subset X$, il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t > t_0$, l'ensemble $\phi_t(U) \cap V$ est non vide.

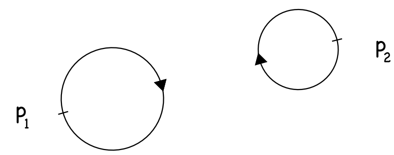
Le sous-groupe engendré par les périodes est dense, on peut donc trouver pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C > 0$ et deux points périodiques p_1, p_2 tels que le semi-groupe engendré par les périodes $l(p_1)$ et $l(p_2)$ soit ε-dense dans $[C, +\infty[$ (cf appendice).

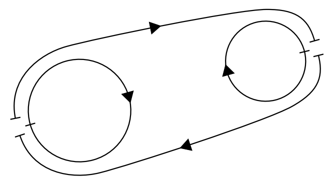
Soit U_1 et U_2 deux petits ouverts de produit local en p_1 et p_2. Par transitivité, on peut trouver des trajectoires allant de U_1 à U_2 et de U_2 à U_1, en temps s_1 et s_2.

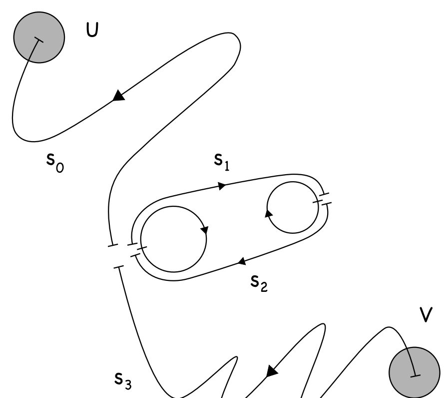
Il existe aussi une trajectoire allant de U_1 à U en temps s_0 et une trajectoire allant de V à U_1 en temps s_3.

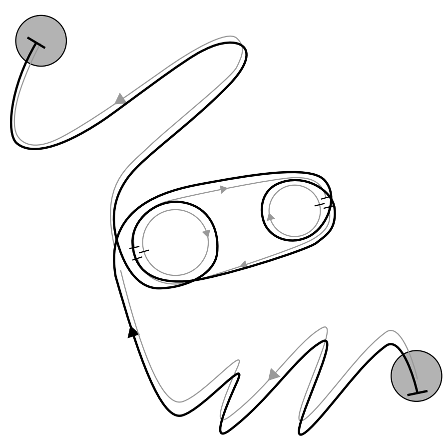
Soit k_1, k_2 deux entiers positifs. Recollons la trajectoire allant de V à U_1 avec l'orbite périodique p_1 parcourue k_1 fois. On peut ensuite recoller le résultat obtenu avec la trajectoire allant de p_1 à p_2, puis avec l'orbite de p_2 parcourue k_2 fois, et enfin avec la trajectoire allant de U_1 à U.

Remarquons que les erreurs faites lors des recollements ne dépendent pas de k_1 et k_2. Les trajectoires obtenues vont de V à U en un temps à peu près égal à $s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + k_1 l(p_1) + k_2 l(p_2)$, c'est-à-dire en un temps $C + k\,\varepsilon$ pour un certain C et pour tout entier k. Si ε est assez petit, on peut trouver un ouvert V' tel que $\phi_{[0,\varepsilon]}(V') \subset V$. Il suffit de remplacer V dans cette construction par V' pour relier V à U comme désiré.





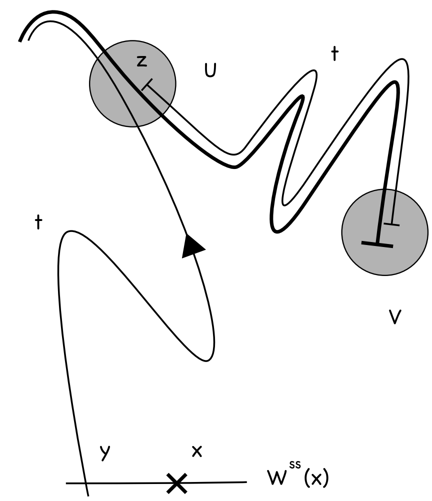




Considérons maintenant un flot topologiquement mélangeant admettant une structure de produit local. Soit $x \in X$ un point de type horosphérique. Montrons que sa feuille stable intersecte tous les ouverts.

Soit U un petit ouvert de produit local autour d'un point $z \in \omega(W^{ss}(x))$, et V un ouvert quelconque de X. Pour tout t supérieur à un certain t_0, on peut trouver une trajectoire reliant V à U.

Soit y un point de $W^{ss}(x)$ dont la trajectoire atteint U après un temps donné $t > t_0$. On peut recoller une trajectoire reliant V à U en un temps t avec celle-ci, au niveau du point z, afin obtenir un point sur la feuille stable de y qui est dans V.



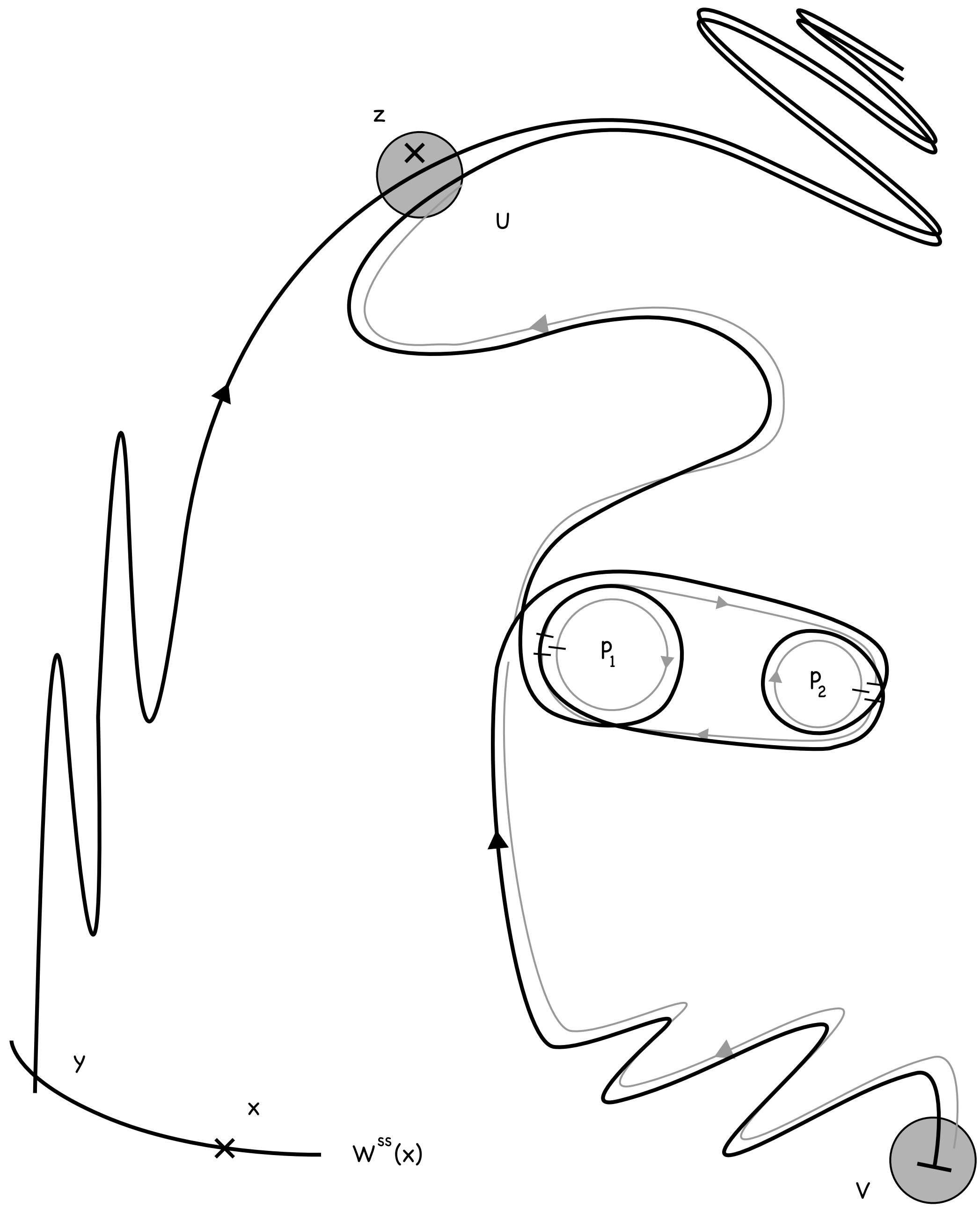
Ceci termine la preuve du théorème. On a montré au passage l'implication :

produit local + mélange topologique
$\Downarrow$
les points horosphériques ont une feuille stable dense.

De cette implication découle, par exemple, la minimalité du feuilletage stable des flots d'Anosov topologiquement mélangeants.

Il faut que le flot admette au moins deux orbites périodiques pour qu'on puisse obtenir le mélange topologique et la densité des feuilles associées aux points horosphériques. On peut se demander si cela est vraiment nécessaire.

Question :
Considérons un flot admettant une structure de produit local ; supposons qu'il existe un point dont la feuille stable est dense, et dont l'orbite est dense, aussi bien pour les temps positifs que pour les temps négatifs. Peut-on en déduire que les points horosphériques ont une feuille stable dense ?


z
U
p1
p2
y
x
W^ss(x)
V

1.3 Le cas des transformations

Les deux théorèmes précédents se généralisent au cas des transformations inversibles. Les notions de points récurrents et horosphériques se définissent comme pour les flots.

Théorème [C04]
Soit X un espace métrique, $T : X \to X$ une transformation continue inversible. On suppose que :
– *l'espace X est connexe,*
– *la transformation admet une structure de produit local,*
– *les points ω-récurrents sont denses dans X, les points α-récurrents aussi.*
Alors la transformation est transitive.

Contrairement au cas des flots, il n'est pas nécessaire que l'espace ambiant soit connexe pour que la transformation soit transitive.

Théorème
Soit X un espace métrique, $T : X \to X$ une transformation continue inversible. On suppose que :
– *la transformation admet une structure de produit local,*
– *la transformation est transitive,*
– *les périodes des points périodiques engendrent $\mathbf{Z}$.*
Alors tout point de type horosphérique admet une feuille stable dense.

Ces théorèmes présentent un intérêt, même lorsque l'espace ambiant est compact. On retrouve alors des résultats bien connus dans le cadre des systèmes dynamiques hyperboliques. Le corollaire suivant se déduit immédiatement des considérations précédentes.

Corollaire
Soit X un espace métrique compact connexe, $T : X \to X$ une transformation continue inversible qui possède une structure de produit local. On suppose qu'elle préserve une mesure de probabilité de support total, et qu'elle admet un point fixe. Alors la transformation T est topologiquement mélangeante et toutes les feuilles stables sont denses dans X.

Ce corollaire s'applique aux automorphismes hyperboliques du tore, et plus généralement aux difféomorphismes d'Anosov préservant une mesure absolument continue par rapport à Lebesgue.

Les preuves classiques du mélange topologique pour ces systèmes passent par le théorème de décomposition spectrale (cf par exemple [Shu87], chapitre 8), théorème basé sur le fait que les orbites périodiques sont denses dans la variété. Ici, on n'a pas eu besoin de cette propriété.

On obtient un exemple un peu artificiel de système ne possédant qu'une orbite périodique, auquel on peut malgré tout appliquer les deux théorèmes précédents, en considérant l'action de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur le tore privé des feuilles stables et instables des points à coordonnées rationnelles non nuls. On peut se demander s'il existe un analogue de ces théorèmes pour des systèmes ne possédant aucune orbite périodique.

2. Lemme de fermeture

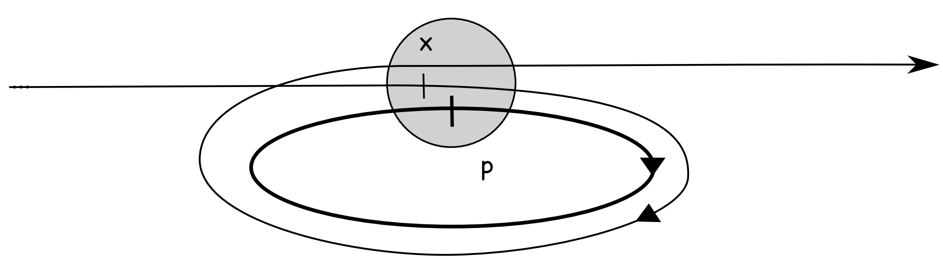
Dans le but de donner une réciproque aux théorèmes précédents, on va s'intéresser à une autre propriété des systèmes hyperboliques, connue sous le nom de lemme de fermeture.

On a vu comment recoller deux orbites. On va maintenant s'intéresser à une propriété qui permet de recoller une orbite avec elle-même.

Définition
Soit X un espace métrique et $\phi_t : X \to X$ un flot continu. Ce flot satisfait le lemme de fermeture si pour tout point $x_0 \in X$, on peut trouver un voisinage V pour lequel on a la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $x \in V$, pour tout $t \geq t_0$ satisfaisant $d(x, \phi_t(x)) < \delta$ et $\phi_t(x) \in V$, on peut trouver $p \in X$ et $l \in \mathbf{R}$, tel que $|l - t| < \varepsilon$, $\phi_l(p) = p$, et $d(\phi_s(p), \phi_s(x)) < \varepsilon$ pour $0 \leq s \leq min(t, l)$

Le lemme de fermeture est illustré par le dessin suivant :



2.1 Feuilletage stable et groupe des périodes

Donnons deux résultats qui utilisent le lemme de fermeture. Le premier montre que la densité du sous-groupe engendré par les périodes est en fait une condition nécessaire pour obtenir l'existence d'un point récurrent admettant une feuille stable dense.

Théorème [C04]
Soit X un espace métrique, ϕ_t un flot continu qui satisfait le lemme de fermeture. Supposons qu'il existe un point dont l'orbite admet un point d'accumulation, et dont la feuille stable est dense. Alors le sous-groupe de $\mathbf{R}$ engendré par les périodes des orbites périodiques est dense dans $\mathbf{R}$.

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $\delta > 0$ donné par le lemme de fermeture. Notons x le point dont la feuille est dense et z le point d'accumulation de la trajectoire de x : il existe une suite t_i tendant vers l'infini telle que :

$$\phi_{t_i}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$$

Soit V la boule centrée en z et de rayon $\delta/2$, qu'on peut supposer contenue dans un ouvert de recollement autour de z. Fixons $l \in \mathbf{R}$; comme la feuille stable de $\phi_l(x)$ est dense, il existe un point y sur cette feuille qui appartient à V :

$$y \in W^{ss}(\phi_l(x)) \cap V$$

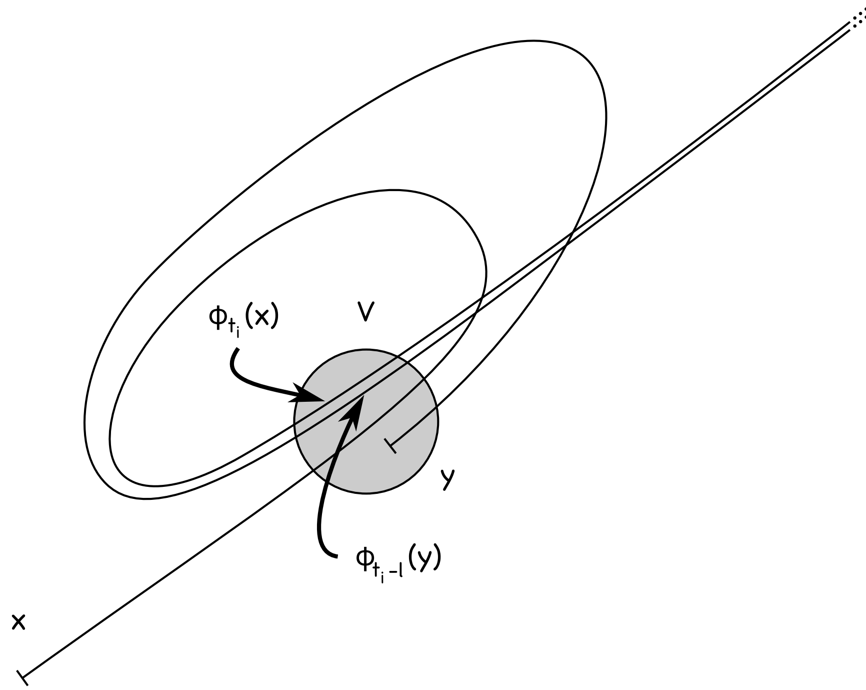
On peut donc trouver un réel $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, on a la majoration :

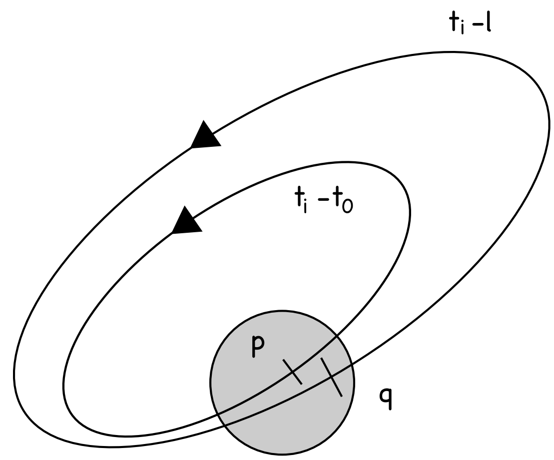
$$d(\phi_t(x), \phi_{t-l}(y)) < \delta/2$$

Choisissons $t_i > T$ tel que $\phi_{t_i}(x)$ soit dans V. On peut recoller la trajectoire $\phi_{[t_0,t_i]}(x)$ afin d'obtenir un point périodique p dont la période vaut $t_i - t_0$ à ε près.

Maintenant $\phi_{t_i-l}(y)$ est à distance inférieure à δ de z. Il est donc possible de recoller la trajectoire $\phi_{[0,t_i-l]}(y)$ afin d'obtenir un point périodique q dont la période vaut $t_i - l$ à ε près.

On en déduit que le sous-groupe engendré par les périodes contient un point à distance inférieure à ε de $t_0 - l$ pour tout $l \in \mathbf{R}$, ce qui termine la preuve.





Création d'orbites périodiques

2.2 Mesures périodiques

Le second résultat est de nature mesurable. Soit X un espace métrique sur lequel opère un flot ; on note $\mathcal{M}^1(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes qui sont invariantes par le flot. Cet ensemble est muni de la topologie de la convergence étroite des mesures : une suite de mesures de probabilité μ_n converge vers une mesure μ si pour toute fonction $f : X \to \mathbf{R}$ continue bornée, on a :

$$\int f\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\, d\mu$$

On renvoie au livre de Billingsley [Bi99], *Convergence of probability measures*, pour une étude détaillée de cette topologie. En particulier, il est possible de se restreindre aux fonctions Lipschitziennes bornées dans la définition de la convergence étroite.

Théorème [CS08bis]
Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu qui satisfait le lemme de fermeture. Alors l'ensemble des mesures de Dirac supportées par les orbites périodiques du flot est dense dans l'ensemble de toutes les mesures de probabilité boréliennes invariantes ergodiques sur X.

Preuve
Considérons $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Soit $f_i : X \to \mathbf{R}$ un ensemble fini de fonctions Lipschitziennes bornées et K un majorant pour leurs constantes de Lipschitz. D'après le théorème de récurrence de Poincaré et le théorème ergodique de Birkhoff, nous savons qu'on peut trouver un point $x \in X$, tel que x est récurrent et les sommes de Birkhoff des f_i, évaluées au point x, convergent vers $\int f_i d\mu$.

On va fermer l'orbite de x. Fixons un $\varepsilon > 0$; soit δ et t_0 les quantités qui lui sont associées par le lemme de fermeture. Choisissons un $t > t_0$ suffisamment grand tel que :

$$d(\phi_t(x), x) < \delta$$

$$\forall\, i, \quad \left| \frac{1}{t}\int_0^t f_i \circ \phi_s(x) ds - \int_X f_i\, d\mu \right| \;\leq\; \varepsilon$$

D'après le lemme de fermeture, il existe un point périodique p proche de x et dont la période l est ε-proche de t. On a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|\int f_i\,d\mu - \frac{1}{l}\int_0^l f_i(\phi_s p)\,ds\right| &\leq \left|\frac{1}{t}\int_0^t f_i(\phi_s(x))\,ds - \frac{1}{l}\int_0^l f_i(\phi_s p)\,ds\right| + \varepsilon \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t K\,d(\phi_s x, \phi_s p)\,ds + 2|t-l|\,||f_i||_\infty + \varepsilon \\
&\leq (K + 2||f_i||_\infty + 1)\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Ceci montre que la mesure de Dirac sur l'orbite de p est proche de la mesure μ. Le théorème est donc démontré.

2.3 Produit local et orbites périodiques

On va maintenant combiner les deux propriétés étudiées aux chapitres précédents : produit local et lemme de fermeture.

Les deux premiers théorèmes résument les résultats de nature topologique obtenus dans les paragraphes précédents. On utilise la terminologie suivante : un flot est dit positivement (respectivement négativement) transitif si on peut trouver $x \in X$ tel que $\omega(x) = X$ (resp. $\alpha(x) = X$). Ces deux propriétés sont équivalentes dès que X est séparable et possède la propriété de Baire. Elles impliquent la propriété de transitivité discutée plus haut.

Théorème
Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu admettant une structure de produit local, et satisfaisant le lemme de fermeture. Sont équivalents :

– *X est connexe et l'ensemble des points récurrents est dense dans X,*

– *X est connexe et l'ensemble des points périodiques est dense dans X,*

– *le flot est positivement et négativement transitif.*

Théorème
Soit X un espace métrique, $\phi_t : X \to X$ un flot continu admettant une structure de produit local, et satisfaisant le lemme de fermeture. On suppose que le flot est transitif. Sont équivalents :

– *le flot est topologiquement mélangeant,*

– *les périodes des orbites périodiques engendrent un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$,*

– *il existe un point $x \in X$ dont la feuille stable est dense et tel que $\omega(x) \neq \emptyset$.*

Si une de ces conditions est satisfaite, alors tout point horosphérique admet une feuille stable dense.

Supposons X séparable et possédant la propriété de Baire. Supposons de plus que pour tout ouvert U, $\cup\{W^{ss}(y)\,|\,y\in U\}$ est ouvert. Alors l' ensemble des points ayant une feuille stable dense forme un G_δ. Par conséquent, il intersecte le G_δ des points dont l'orbite est dense. On peut donc trouver un point dont la feuille stable est dense et dont l'orbite admet un point d'accumulation dès qu'il existe un point avec une feuille stable dense.

Intéressons nous maintenant à l'espace des probabilités invariantes $\mathcal{M}^1(X)$. Si X est un espace topologique Borel standard, alors les combinaisons linéaires convexes de mesures ergodiques sont denses dans $\mathcal{M}^1(X)$.

Théorème [CS08bis]
Soit X un espace métrique Borel standard, $\phi_t : X \to X$ un flot transitif admettant une structure de produit local et satisfaisant le lemme de fermeture. Alors l'ensemble des mesures de Dirac normalisées portées par les orbites périodiques est dense dans $\mathcal{M}^1(X)$.

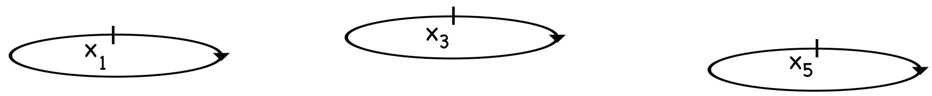
Preuve
On a vu que l'ensemble des Dirac sur les orbites périodiques est dense dans l'ensemble des mesures ergodiques. Il suffit donc d'approcher toute combinaison linéaire de Dirac par un Dirac pour démontrer le théorème.

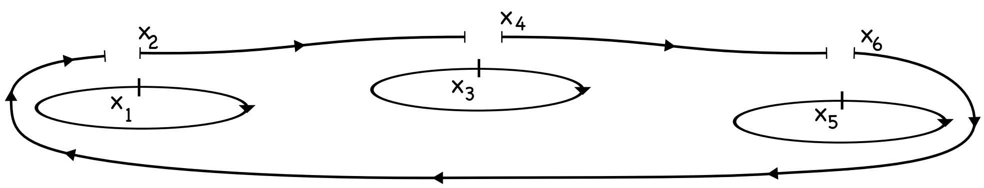
Soit x_1, x_3,..., x_{2n-1} des points périodiques de périodes l_1, l_3,..., l_{2n-1}, et c_1, c_3, ..., c_{2n-1} des nombres réels positifs tels que $\Sigma\, c_{2i+1}=1$. La mesure de Dirac normalisée sur l'orbite de x_i est notée δ_{x_i}. On veut trouver un point périodique x tel que δ_x est proche de la somme $\Sigma c_{2i+1}\delta_{x_i}$. Pour cela, on peut supposer les c_{2i+1} rationnels de la forme p_{2i+1}/q.

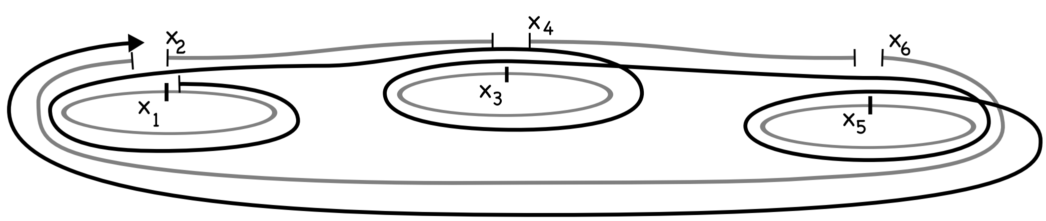
Par transitivité, il existe des points x_{2i} proches de x_{2i-1} dont la trajectoire est proche de x_{2i+1} après un certain temps t_{2i}. On peut également trouver un point x_{2n} proche de x_{2n-1} dont la trajectoire revient près de x_1.

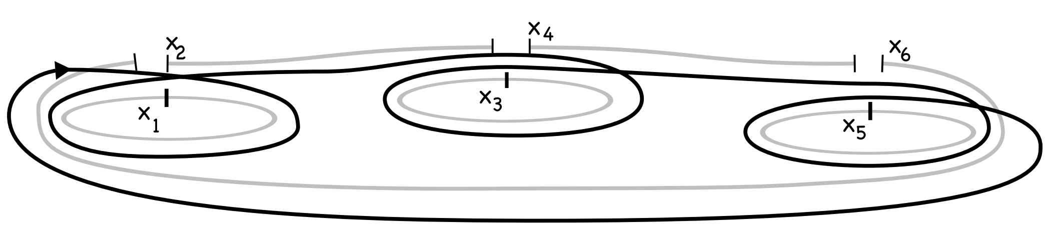
Il s'agit maintenant de recoller ces trajectoires. Fixons un entier $N>0$. Il existe une trajectoire qui commence par faire q_1N tour autour de l'orbite périodique x_1, puis qui suit l'orbite de x_2, avant d'arriver dans un voisinage de recollement de x_3. Elle fait ensuite q_3N tours autour de x_3, se déplace jusqu'à x_4, et ainsi de suite jusqu'à revenir à x_1.

On peut alors appliquer le lemme de fermeture afin d'obtenir une orbite périodique. Si N est suffisamment grand, les contributions des orbites x_{2i} est petite devant celles des orbites périodiques x_{2i+1}. La mesure δ_x est donc proche de la normalisation de $\Sigma\; p_{2i+1}\delta_{x_{2i+1}}$, comme voulu.


x_1
x_3
x_5


x_2
x_4
x_6
x_1
x_3
x_5


x_2
x_4
x_6
x_1
x_3
x_5


x_2
x_4
x_6
x_1
x_3
x_5

De là, on en déduit le résultat suivant, modulo quelques raisonnements classiques concernant le théorème de Baire et la topologie faible.

Corollaire [CS08bis]
Soit X un espace polonais, $\phi_t : X \to X$ un flot continu transitif qui possède une structure de produit local et satisfait le lemme de fermeture. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes ergodiques de support total est un G_δ-dense de $\mathcal{M}^1(X)$.

Ces deux derniers résultats ont été obtenus en collaboration avec B. Schapira. Ils sont étonnants dans la mesure où on n'a fait aucune hypothèse de compacité sur X.

Chapitre IV

Exemples

1. Le flot géodésique en courbure négative ou nulle

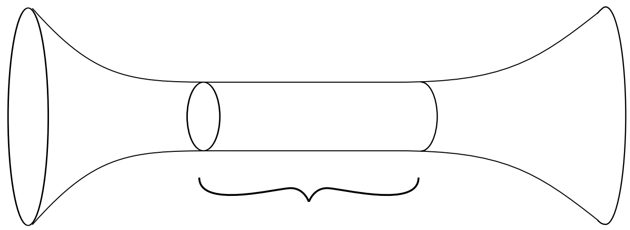
Le flot géodésique défini sur une variété à courbure négative admet une structure de produit local et satisfait le lemme de fermeture. Dans ce cadre, le résultat faisant le lien entre mélange topologique et densité des feuilles stables associées aux points horosphériques est bien connu [Hed36] [Da00], de même que la transitivité du flot en restriction à l'adhérence des points périodiques. La généricité des mesures de probabilité invariantes ergodiques de support total est due à Sigmund [Si72] lorsque la variété est compacte. Elle est démontrée en toute généralité dans [CS08bis].

La question de la densité des périodes ou, de manière équivalente, du mélange topologique en courbure négative est en partie ouverte. Lorsque tous les points de la variété sont non-errants sous l'action du flot géodésique, ou si le groupe fondamental contient un élément parabolique, ou encore si la courbure est constante, le mélange est connu, ce qui permet d'étudier en détail le comportement du feuilletage stable du point de vue de la dynamique topologique.

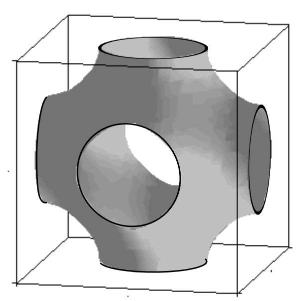
1.1 Exemples

La situation est différente lorsqu'on autorise la courbure à s'annuler. Commençons par passer en revue quelques exemples explicites de surfaces à courbure négative ou nulle.

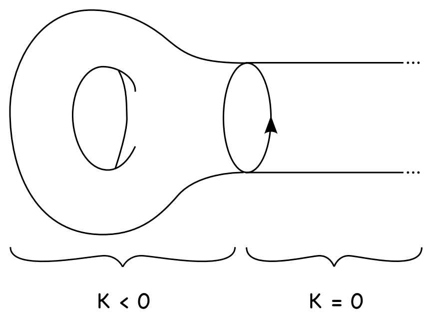
– Considérons le graphe d'une fonction convexe constante sur un intervalle $[a, b]$. On obtient une surface de rotation à courbure négative ou nulle en faisant tourner ce graphe autour de l'axe des abscisses. Il existe des orbites périodiques sur cette surface mais aucune d'elles n'est hyperbolique. L'ensemble non-errant du flot géodésique est composé exactement de ces orbites périodiques. Il n'y a pas de structure de produit local.



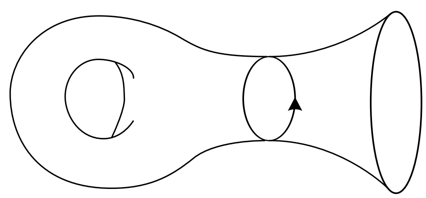
– La surface plongée dans le tore $\mathbf{T}^3$ d'équation $\{(x, y, z) \in \mathbf{T}^3 \mid \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 0\}$ possède huit points en lesquels la courbure s'annule. Le flot géodésique sur le fibré de cette surface est un flot d'Anosov transitif. De manière générale, sur une surface compacte de dimension 2, il suffit qu'il y ait sur chaque géodésique un point où la courbure s'annule pour que le flot soit Anosov. En tant que flot d'Anosov, toutes les orbites périodiques sont hyperboliques et le flot géodésique hérite d'une structure de produit local.



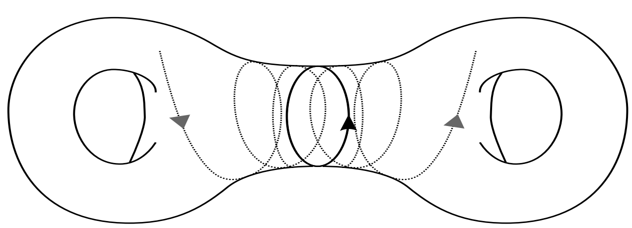
– On peut recoller le long d'une géodésique fermée un ouvert de courbure strictement négative et d'adhérence compacte avec un demi-cylindre euclidien. Les méridiens du cylindre donnent des géodésiques périodiques qui ne sont pas hyperboliques. Ces géodésiques sont contenues dans l'ensemble non-errant, qui est non-compact. L'ensemble des géodésiques fermées hyperboliques est contenu dans la partie de courbure strictement négative et n'est donc pas dense dans l'ensemble non-errant. On vérifie sans difficulté que le flot n'admet aucune mesure de probabilité invariante ergodique de support total dans l'ensemble non-errant.



– Enfin, remarquons que même si la courbure est strictement négative, on peut construire des compacts invariants sur la variété qui n'admettent pas de produit local. Pour cela, on munit un tore privé d'un disque d'une métrique à courbure -1. Notons Ω son ensemble non-errant ; ce compact possède une structure de produit local. Le bout évasé de la surface est bordé par une géodésique simple γ appartenant à Ω.



Supprimons ce bout et doublons la surface le long de cette géodésique. Soit Ω' l'image de Ω dans le double du tore troué. L'ensemble $\Omega \cup \Omega'$ est un compact invariant qui ne possède pas de structure de produit local, car il existe des géodésiques dans $\Omega \cup \Omega'$ qui sont asymptotes à la géodésique fermée γ des deux cotés de γ, mais il n'existe aucune géodésique dans $\Omega \cup \Omega'$ allant de Ω à Ω'.



1.2 Variétés de rang un

On va s'intéresser au cas des variétés dites de rang un. Soit M une variété riemannienne connexe complète dont la courbure est négative ou nulle en tout point. Le flot géodésique est défini sur le fibré unitaire tangent $X = T^1M$.

Un vecteur $v \in T^1M$ est *de rang un* si les seuls champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique engendrée par v sont proportionnels au générateur du flot géodésique. En dimension deux, un vecteur est de rang un si et seulement si la courbure est strictement négative en au moins un point de la géodésique. La variété est dite de rang un si elle possède un vecteur de rang un. Les vecteurs de rang un forment un ouvert de T^1M. Ceux qui engendrent une orbite périodique sont précisément les points périodiques hyperboliques du flot géodésique.

Le concept de variété de rang un est introduit par W. Ballmann dans [Ba82] puis développé par W. Ballmann, M. Brin et P. Eberlein dans [BBE85]. On renvoie à l'article de G. Knieper [Kn02] pour quelques développements récents concernant les variétés compactes de rang un. Les variétés compactes à courbure négative ou nulle qui ne sont pas de rang un sont des espaces symétriques ; ils possèdent des propriétés de rigidité qui n'existent pas en rang un.

1.3 Un ensemble admettant un produit local

On cherche à appliquer les résultats des chapitres précédents aux variétés de rang un. Pour cela, il faut construire un sous-ensemble du fibré unitaire, invariant par le flot géodésique, sur lequel il existe une structure de produit local.

Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, $\tilde{\phi}_t$ le relevé du flot géodésique à $\tilde{M}$. L'ensemble non-errant du flot géodésique est noté Ω ; il est composé des points de T^1M dont tous les voisinages V satisfont $\phi_t(V) \cap V \neq \emptyset$ pour un ensemble de t non borné. On définit un ensemble Ω_1^+ comme suit : c'est le sous-ensemble de Ω composé des vecteurs de rang un dont les relevés $\tilde{v}$ à $\tilde{M}$ satisfont la propriété suivante :

Pour tout $\tilde{w} \in T^1\tilde{M}$ tel que la distance $d(\tilde{\phi}_t(\tilde{w}), \tilde{\phi}_t(\tilde{v}))$ reste bornée pour $t \geq 0$, on peut trouver un $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\tilde{\phi}_{t_0}(\tilde{w}) \in W^{ss}(\tilde{v})$.

En d'autres termes, toute trajectoire qui reste à distance bornée, pour les temps positifs, d'une géodésique associée à un vecteur de Ω_1^+ est en fait asymptotique à cette géodésique. On définit de même un ensemble Ω_1^- associé au flot ϕ_{-t} et on pose $\Omega_1 = \Omega_1^+ \cap \Omega_1^-$.

Lorsque la courbure est strictement négative en tout point, on a bien sûr $\Omega_1 = \Omega$.

Proposition [CS08bis]
Soit M une variété de rang un. Le flot géodésique, en restriction à l'ensemble Ω_1, admet une structure de produit local et satisfait le lemme de fermeture.

La preuve repose sur le fait suivant [Kn02] prop 4.4 :

Lemme
Les vecteurs récurrents de rang un appartiennent à Ω_1.

Preuve
Soit v un vecteur récurrent de rang un et $\tilde{v}$ son relevé à $\tilde{M}$. Soit $\tilde{w}$ un vecteur dont la trajectoire reste à distance bornée de celle de $\tilde{v}$ pour les temps positifs. Comme la courbure est négative ou nulle, la fonction $t \mapsto d(\tilde{\phi}_t(\tilde{v}), \tilde{\phi}_t(\tilde{w}))$ est convexe. Si elle ne tend pas vers 0, elle doit décroître vers une limite $\beta > 0$:

$$\forall\, t \geq 0, \quad d(\tilde{v}, \tilde{w}) \;\geq\; d(\tilde{\phi}_t(\tilde{v}), \tilde{\phi}_t(\tilde{w})) \;\geq\; \beta$$

Comme le vecteur v est récurrent, on peut trouver des éléments γ_n dans le groupe fondamental de M et des temps $t_n \to +\infty$ tels que $\gamma_n(\tilde{\phi}_{t_n}(\tilde{v}))$ converge vers $\tilde{v}$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\gamma_n(\tilde{\phi}_{t_n}(\tilde{w}))$ converge vers un certain vecteur $\tilde{w}'$. Fixons $s \in \mathbf{R}$; la quantité $t_n + s$ est positive à partir d'un certain rang. En passant à la limite, on obtient la majoration :

$$\forall\, s \in \mathbf{R}, \quad d(\tilde{v}, \tilde{w}) \;\geq\; d(\tilde{\phi}_s(\tilde{v}), \tilde{\phi}_s(\tilde{w}')) \;\geq\; \beta \;>\; 0.$$

Dans une variété de Hadamard, deux trajectoires qui restent à distance bornée l'une de l'autre pour tout temps doivent nécessairement border une surface euclidienne totalement géodésique ; cf par exemple [BGS85] §2.3. Aucune de ces trajectoires ne peut donc être associée à un vecteur de rang un. Ceci démontre le lemme.

P. Eberlein démontre un lemme de fermeture pour les vecteurs de rang un non-errants dans [Eb96], la preuve est rappelée dans [CS08bis]. Comme les vecteurs de rang un forment un ouvert et que les géodésiques périodiques de rang un sont dans Ω_1, le lemme de fermeture est encore valide en restriction à Ω_1. Quant à l'existence d'un produit local, il découle de la définition de Ω_1 et du fait que deux points du bord idéal de $\tilde{M}$ joints par un vecteur de rang un admettent des voisinages dont les points peuvent être joints par des vecteurs de rang un ; cf [Kn02] §5 lemme 3.1.

La transitivité en restriction à Ω est démontrée par P. Eberlein dans [Eb72]. La transitivité en restriction à Ω_1 s'en déduit sans difficulté ; on renvoie à [CS08bis] pour les détails.

Questions :
Peut-on caractériser les variétés de rang un pour lesquelles Ω_1 est vide ? Peut-on caractériser celles pour lesquelles Ω_1 est dense dans Ω ?

1.4 Dynamique sur les variétés de rang un

On est maintenant en mesure d'appliquer les théorèmes vus précédemment, en restriction à Ω_1 :

Théorème
Soit M une variété de rang un. Supposons que le groupe engendré par les longueurs des géodésiques hyperboliques soit dense dans $\mathbf{R}$. *Alors les points de Ω_1 de type horosphérique ont une feuille stable dense dans Ω_1.*

Remarquons que si tous les points de T^1M sont non-errants, alors l'ensemble des vecteurs de rang un est un ouvert dense dans T^1M. Il y a donc un vecteur de rang un dont l'orbite est dense. Ce vecteur est dans Ω_1, qui est dense.

Corollaire
Supposons de plus que $\Omega = T^1M$. Alors les points de type horosphérique dans Ω_1 ont une feuille stable dense dans T^1M.

Pour ce qui est des mesures de probabilité invariantes ergodiques, on peut énoncer un théorème ne faisant pas explicitement référence à l'ensemble Ω_1 :

Théorème [CS08bis]
Soit M une variété riemannienne connexe complète à courbure négative ou nulle. Supposons que le flot géodésique admette un point périodique hyperbolique. Alors il existe une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique, ergodique et dont le support contient tous les points périodiques hyperboliques du flot.

2. Le cas des revêtements

On considère un flot d'Anosov ϕ_t défini sur une variété $\hat{X}$ compacte connexe. Ce flot possède une structure de produit local et satisfait le lemme de fermeture. Ces deux propriétés sont démontrées par D. V. Anosov dans [An67].

De manière générale, on peut considérer un flot Axiom A en restriction à une pièce basique. Là encore, on a un produit local et un lemme de fermeture ; ces résultats sont dus à R. Bowen, on renvoie à la monographie de B. Hasselblatt et A. Katok [KH95] pour une étude détaillée.

Considérons à présent un revêtement galoisien $\hat{M}$ de M, dont le groupe d'automorphismes est noté G. La structure de produit local et le lemme de fermeture sont automatiquement satisfait par le flot relevé $\hat{\phi}_t$. On en déduit le résultat suivant :

Théorème
Soit X une variété compacte, $\pi : \hat{X} \to X$ un revêtement galoisien de X. Soit ϕ_t un flot d'Anosov sur X, $\hat{\phi}_t : \hat{X} \to \hat{X}$ son relevé. L'ensemble des mesures de probabilité invariantes par $\hat{\phi}_t$ ergodiques de support total dans l'ensemble non-errant est un G_δ-dense de $\mathcal{M}^1(\hat{X})$.

Que peut-on dire sur l'ensemble non-errant de $\hat{\phi}_t$? Pour un flot géodésique sur une variété compacte à courbure négative, tous les points sont non-errants pour le relevé au revêtement, dès l'instant où le revêtement n'est pas élémentaire [Eb72]. On a dessiné au verso quelques exemples de revêtements de surfaces.

2.1 Flot hyperbolique errant

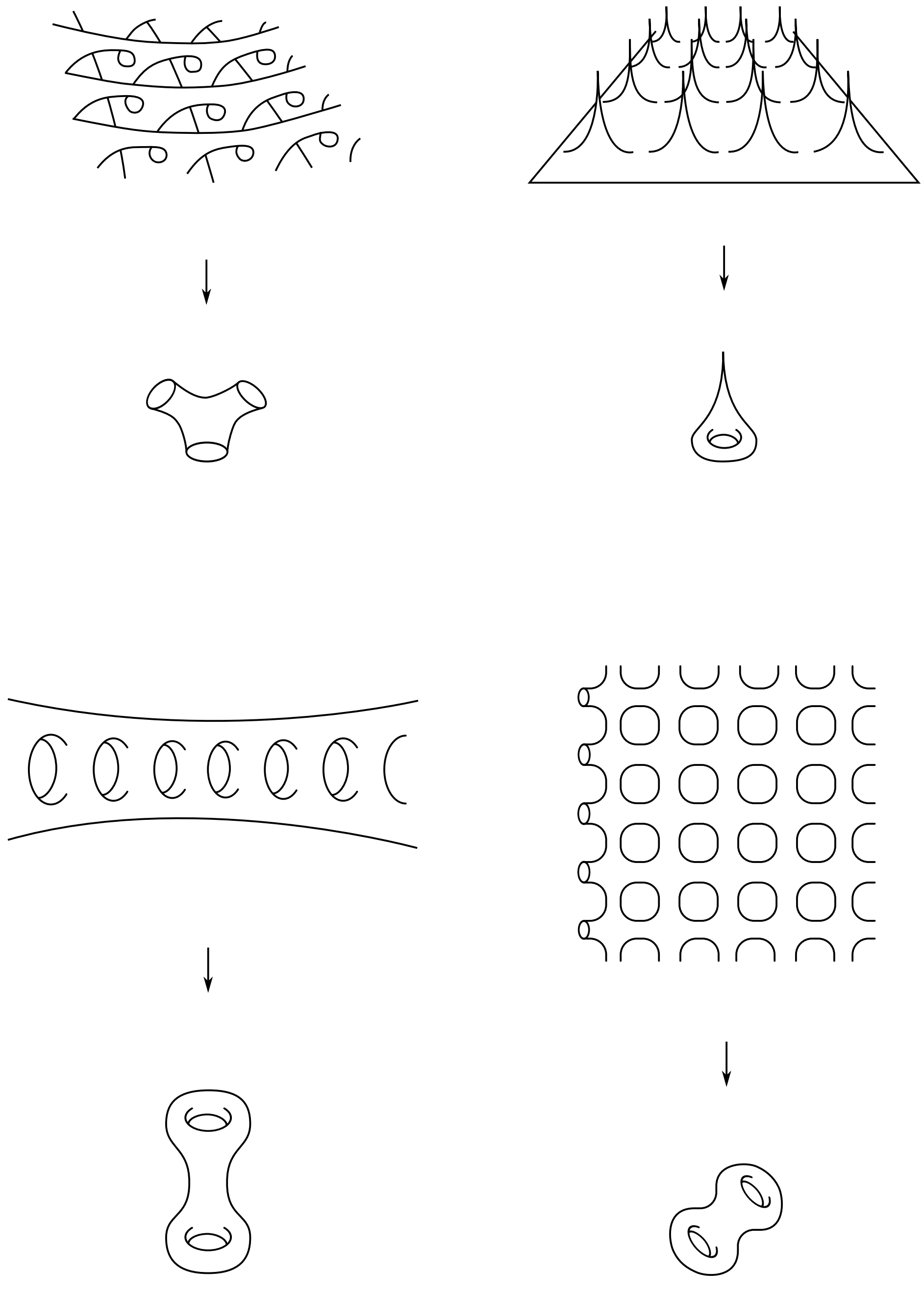
Il existe par contre des flots d'Anosov dont le relevé à un revêtement de groupe $\mathbf{Z}$ est totalement dissipatif. Voici comment construire un tel exemple.

Considérons un automorphisme hyperbolique T agissant sur le tore $\mathbf{T}^2$, et donnons-nous une fonction de suspension $r : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1. Quotientons le produit $\hat{X} = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ par l'action de la transformation :

$$\tilde{T}(x,s) = (T(x), s - r(x))$$

L'espace obtenu est noté X :

$$X = \hat{X} / < (x,s) \mapsto \tilde{T}(x,s) >$$



L'espace $\hat{X}$ est un revêtement galoisien de X dont le groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Considérons le flot $\hat{\phi}_t : \hat{X} \to \hat{X}$ défini par :

$$\tilde{\phi}_t(x, s) = (x, t + s)$$

Ce flot est totalement dissipatif et passe au quotient pour donner un flot d'Anosov ϕ_t sur X, qui préserve la mesure $\frac{1}{r(x)}\, dx\, dt$. L'espace X est compact, cette mesure est finie. Ceci montre que tous les points sont non-errants sur X et que le flot ϕ_t est transitif.

On peut s'arranger pour que ce flot soit mélangeant en choisissant la fonction r de manière judicieuse. Pour cela, on remarque que les orbites périodiques du flot ϕ_t sont en bijection avec celles de T. Soit p un point périodique de période n pour la transformation T ; il lui correspond une trajectoire périodique $(p, 0) \in X$ pour ϕ_t dont la période vaut :

$$r^n(p) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} r(T^k(p))$$

Le mélange est donc équivalent à la condition :

$$\overline{< r^n(p) \mid p \in \mathbf{T}^2,\ n \in \mathbf{N} \ \text{ tq } \ T^n(p) = p >} \ = \ \mathbf{R}$$

Il suffit de choisir un point fixe $p \in \mathbf{T}^2$ et une fonction r telle que $r(p)/r(0)$ est irrationnel, pour réaliser cette condition.

2.2 Non-errance sur les revêtements

On est donc conduit à étudier plus en détail la non-errance des flots hyperboliques définis sur les revêtements.

On a vu plus haut que la transitivité de $\hat{\phi}_t$ est équivalente à la densité des orbites périodiques sur $\hat{X}$. Il faut maintenant donner une version fibrée de ce théorème.

Pour cela, introduisons la notion de déplacement dans la fibre le long d'une orbite périodique. Soit p un point périodique de période $l(p)$ pour ϕ_t : $\phi_{l(p)}(p) = p$. Considérons une préimage $\hat{p} \in \hat{p}$ de p ; l'orbite de p se relève de manière unique en une trajectoire issue de $\hat{p}$. On obtient alors un élément $[p] \in G$ satisfaisant :

$$\hat{\phi}_{l(p)}(\hat{p}) \ = \ [p]\,(\hat{p})$$

Si l'on suppose le groupe G abélien, cet élément $[p]$ ne dépend pas du relevé $\hat{p}$ choisi. Il est parfois appelé *élément de Frobénius* de l'orbite périodique p. Voici comment caractériser la transitivité sur le revêtement en terme de ces éléments de Frobénius.

Théorème [C04]
Soit X une variété compacte, $\pi : \hat{X} \to X$ un revêtement abélien de X, de groupe $G = \mathbf{Z}^d$. Soit $\phi_t : X \to X$ un flot d'Anosov, $\hat{\phi}_t$ son relevé à $\hat{X}$. Sont équivalents :

- *tous les points de $\hat{X}$ sont non-errants sous l'action de $\hat{\phi}_t$,*
- *l'espace $\hat{X}$ est connexe et les points périodiques de $\hat{\phi}_t$ sont denses dans $\hat{X}$,*
- *le flot $\hat{\phi}_t$ est transitif sur $\hat{X}$,*
- *ϕ_t est transitif et $\{ [p] \mid p$ point périodique pour $\phi_t \} = G$.*

Si de plus les périodes des orbites périodiques de $\hat{\phi}_t$ engendrent un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$, alors $\hat{\phi}_t$ est topologiquement mélangeant et les points de type horosphérique sur $\hat{X}$ ont une feuille stable dense.

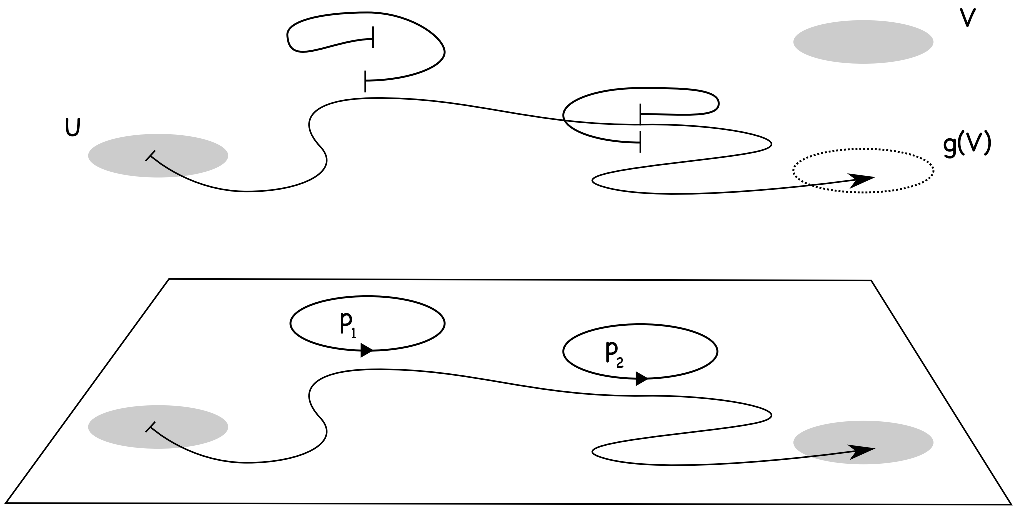
Ce résultat peut être démontré en se basant uniquement sur la structure de produit local du flot et sur le lemme de fermeture. Il est encore vrai si le groupe G est résoluble de type fini. Enfin, on peut remplacer la condition sur les éléments de Frobénius par la suivante :

> *Le semi-groupe engendré par les éléments de Frobénius des orbites périodiques de ϕ_t coïncide avec G.*

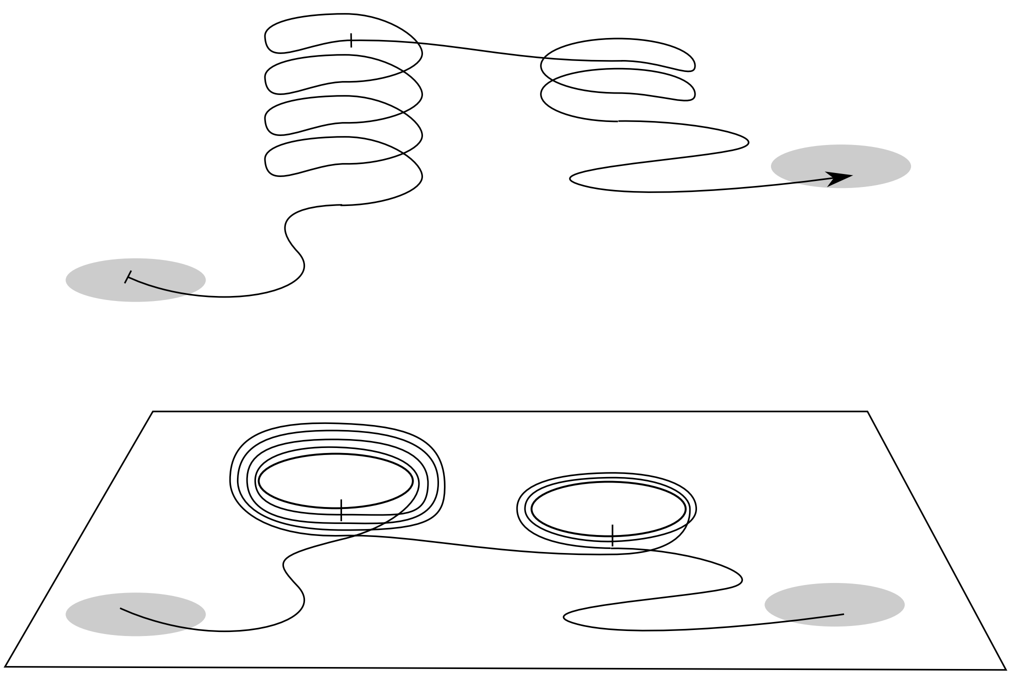
Expliquons brièvement pourquoi cette condition sur les éléments de Frobenius des orbites périodiques implique la transitivité sur le revêtement.

Il s'agit de relier deux ouverts quelconques U, V de $\hat{X}$ par une orbite du flot $\hat{\phi}_t$. Comme le flot est transitif sur la base du revêtement, il est possible de trouver une orbite sur X allant de la projection de U à la projection de V. On peut également supposer que cette orbite passe à proximité d'orbites périodiques p_i engendrant G comme semi-groupe.

Le relevé de cette orbite qui part de U termine dans un ensemble de la forme $g(V)$, pour un certain $g \in G$ dont l'opposé peut s'écrire sous la forme $\Sigma\, n_i[p_i]$. Si maintenant nous utilisons la structure de produit local pour construire une orbite sur X proche de la précédente, mais qui tourne n_i fois de plus autour de p_i pour tout i, nous obtenons un relevé qui termine dans V.



V
U
g(V)
P_1
P_2



3. Exemples de nature probabiliste

Le résultat précédent peut se traduire en terme probabiliste. Considérons une chaîne de Markov avec un nombre fini d'états.

Soit I un ensemble fini à n éléments et A une matrice de taille $n \times n$ dont les éléments appartiennent à $\{0,1\}$. Le décalage de type fini associé à la matrice de transition A est défini par :

$$\Sigma_A := \{\ \{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}} \in I^{\mathbf{Z}} \mid \forall\ k \in \mathbf{Z},\ A_{x_k x_{k+1}} = 1\}$$

Le décalage σ sur Σ_A est donné par : $\sigma(\{x_i\}) := \{x_{i+1}\}$. Pour obtenir un flot, on se donne une fonction Holdérienne $r : \Sigma_A \to \mathbf{R}_+$, qui ne dépend que des coordonnées positives, et on construit la suspension :

$$\Sigma_A^r := \Sigma_A \times \mathbf{R} / < (x,t) \sim (\sigma(x), t - r(x)) >$$

Le flot correspond à la translation sur $\mathbf{R}$:

$$\phi_s(x,t) = (x, s+t)$$

Ce système admet une structure de produit local. Le produit est donné par :

$$[(\{x_i\}, s), (\{y_i\}, t)] := (\{...x_{-2}x_{-1}x_0, y_1y_2...\}, t)$$

Un tel raccord n'est possible que si A_{x_0,y_1} est non nul, ce qui est le cas par exemple si $x_1 = y_1$, à fortiori si $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ ne sont pas trop loin l'un de l'autre.

Soit G un groupe de Lie, $g : \Sigma_A \to G$ une fonction continue. On considère l'extension :

$${}^g\Sigma_A^r :=\ \Sigma_A \times \mathbf{R} \times G\ /\ < (x,t,u) \sim (\sigma(x),\ t - r(x),\ g(x).u) >$$

Le flot ϕ_s se relève naturellement à ${}^g\Sigma_A^r$ en un flot noté $\hat{\phi}_s$.

$$\hat{\phi}_s(x,\ t,\ u) = (x,\ t+s,\ u)$$

On note π la projection de ${}^g\Sigma_A^r$ sur Σ_A^r. Le théorème du paragraphe précédent se traduit comme suit :

Théorème
Soit G un groupe de Lie virtuellement résoluble tel que le quotient de G par la composante connexe de l'identité soit de type fini. Sont équivalents :

– le flot $\hat{\phi}_t$ est transitif sur ${}^g\Sigma_A^r$,

– Tous les points de ${}^g\Sigma_A^r$ sont non errants sous l'action de $\hat{\phi}_t$,

– $\hat{X}$ est connexe et les points périodiques de $\hat{\phi}_t$ sont denses dans ${}^g\Sigma_A^r$,

– ϕ_t est transitif et $\overline{\{\, [p] \mid p \in \Sigma_A \text{ point périodique pour } \sigma \,\}} = G$.

Si de plus les périodes des orbites périodiques de $\hat{\phi}_t$ engendrent un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$, alors $\hat{\phi}_t$ est topologiquement mélangeant.

On a noté $[p] = g(\sigma^{n-1}(p))...g(\sigma(p))g(p)$ lorsque $p \in \Sigma_A$ est un point périodique de période n.

La preuve de ce résultat est similaire à celle donnée plus haut ; il suffit de remarquer qu'un groupe de Lie dont le quotient par la composante connexe de l'identité est de type fini satisfait la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver dans tout sous-ensemble dense du groupe une partie finie qui engendre un sous-groupe ε - dense.

Question :
L'hypothèse de résolubilité sur le groupe est-elle vraiment nécessaire dans l'énoncé du théorème ?

On a un résultat similaire pour les transformations plutôt que pour les flots. Cela revient à supprimer le facteur $\mathbf{R}$ et l'application r dans la construction précédente. Le flot $\hat{\phi}_t$ est remplacé par l'application $\hat{\sigma}$ définie sur $\Sigma_A \times G$ par :

$$\hat{\sigma}(x, g) = (\sigma(x), g(x)\, g)$$

On a alors équivalence entre :

– la densité des points périodiques sur $\Sigma_A \times G$

– la transitivité de $\hat{\sigma}$

– l'irréductibilité de A et $\overline{\{\, [p] \mid p \in \Sigma_A \text{ point périodique pour } \sigma \,\}} = G$

De là, on construit aisément des exemples d'extensions transitives. La situation sur le plan topologique est donc assez différente du cadre mesurable. Les mesures de la forme $m \otimes Haar$, m mesure de Gibbs sur Σ_A, ne sont en effet jamais ergodiques relativement à $\hat{\sigma}$ si le groupe n'est pas virtuellement $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}^2$ [Gu89].

On a vu que la transitivité est néanmoins une condition suffisante pour l'existence d'une mesure de probabilité ergodique de support total sur l'extension $\Sigma_A \times G$.

Chapitre V

Ergodicité dans le cadre non compact

1. Mesures de Gibbs en courbure négative

On a vu qu'un flot géodésique défini sur une variété complète connexe à courbure négative admet toujours une mesure de probabilité ergodique de support total dans l'ensemble non-errant. L'ergodicité et le support total sont même des propriétés génériques dans l'ensemble de toutes les mesures de probabilité invariantes, relativement à la topologie étroite sur cet espace.

Dans ce contexte, on peut se demander si il existe toujours une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique qui est mélangeante. Remarquons que la construction des mesures ergodiques de support total passe par la densité des Diracs sur les orbites périodiques ; ces mesures sont ergodiques mais pas mélangeantes. De manière générale, il ne faut pas s'attendre à ce que le mélange soit une propriété générique dans l'espace des probabilités invariantes. Lorsque la variété est compacte, on peut en effet démontrer que l'ensemble des mesures mélangeantes est maigre.

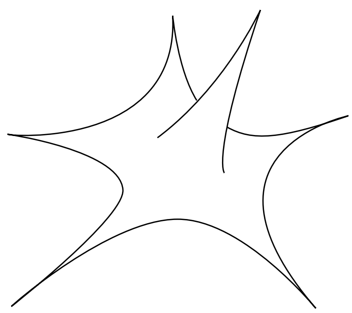
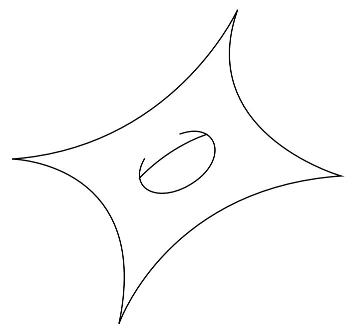
Il faut donc faire appel à d'autres méthodes pour construire des mesures de probabilités mélangeantes.

Commençons par décrire la situation pour les mesures usuelles. D'abord, la mesure de Liouville sur le fibré unitaire est finie si et seulement si la variété est de volume fini. Cette condition de volume fini peut être caractérisé indépendamment de toute référence à une mesure ; pour simplifier, on se restreint au cas des surfaces [Da00], [Bow95] :

Théorème
Soit M une surface à courbure strictement négative pincée. Sont équivalents :

- *la surface M est de volume fini,*
- *les horosphères sont denses ou compactes,*
- *La variété admet un nombre fini de bouts qui sont de type parabolique.*

Rappelons qu'une isométrie d'un espace simplement connexe à courbure négative est dite *parabolique* si elle possède un unique point fixe sur la compactification naturelle de cet espace. Le quotient de l'espace par une telle isométrie est un cylindre dont un des bouts possède un rayon d'injectivité qui tend vers zéro à l'infini. Un bout est *de type parabolique* s'il est isométrique à un tel demi-cylindre.

Une autre mesure souvent considérée est la mesure de Bowen-Margulis. Cette mesure est construite par G. A. Margulis pour des flots d'Anosov [Mar70] ; cette construction est étendue par R. Bowen au cas des flots Axiom A ; il montre que cette mesure est l'unique maximum de l'entropie [Bo72].

S. J. Patterson [Pa76] donne ensuite une construction dans le cadre des flots géodésiques à courbure négative, sans hypothèse de compacité sur la variété sous-jacente, qui redonne la mesure de Bowen-Margulis lorsque la variété est compacte. Lorsque la construction de Patterson donne une mesure finie, J. P. Otal et M. Peigné montrent que l'entropie possède un unique maximum donné par cette mesure [OP04].

M. Peigné a produit des exemples de variété à courbure négative de volume fini pour lesquelles la mesure obtenue par la construction de S. J. Patterson est infinie totalement dissipative. Il a également montré l'existence de variétés de volume infini pour lesquelles cette mesure est finie. Si on veut obtenir des mesures finies mélangeantes, il faut élargir le cadre des constructions précédentes.

1.1 Notations

Expliquons comment construire un analogue des mesures de Gibbs utilisées en théorie des chaînes de Markov, en se basant sur la méthode de S. J. Patterson.

Commençons par quelques définitions. Dans la suite, M est une variété à courbure négative pincée, son revêtement universel est noté $\tilde{M}$ et son groupe fondamental Γ, si bien qu'on a un isomorphisme $M \simeq \tilde{M}/\Gamma$. Le bord visuel de $\tilde{M}$ est noté $\partial\tilde{M}$; il est composé de classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes entre eux.

Soit Δ la diagonale dans $\partial\tilde{M} \times \partial\tilde{M}$. L'ensemble des géodésiques de $\tilde{M}$ s'identifient naturellement avec le produit $\partial\tilde{M} \times \partial\tilde{M} - \Delta$. De fait, chaque géodésique est entièrement déterminée par ses deux points à l'infini, qui sont distincts. Ceci permet d'exprimer le fibré unitaire en terme du bord par la formule :

$$T^1\tilde{M} \simeq (\partial\tilde{M} \times \partial\tilde{M} - \Delta) \times \mathbf{R}$$

Fixons un point $x_0 \in \tilde{M}$; l'ensemble limite du groupe Γ est noté $\Lambda\Gamma$, il est composé des points de $\partial\tilde{M}$ qui sont dans l'adhérence de l'orbite de x_0 sous l'action de Γ. Cet ensemble correspond à l'ensemble non-errant du flot géodésique par le biais de la correspondance décrite plus haut :

$$\Omega \simeq \Big((\Lambda\Gamma \times \Lambda\Gamma - \Delta) \times \mathbf{R}\Big)/\Gamma$$

On aura besoin du concept de point conique. Il s'agit des points $\xi \in \partial\tilde{M}$ pour lesquels il existe une infinité de points de la forme γx_0, $\gamma \in \Gamma$, qui restent à distance bornée de la géodésique issue de x_0 aboutissant en ξ. L'ensemble de tous ces points est noté $\Lambda_c\Gamma$, il correspond aux vecteurs $x \in T^1M$ pour lesquels $\omega(x) \neq \emptyset$.

$$\{x \in T^1M \mid \omega(x) \neq \emptyset\} \ \simeq \ \Big((\partial\tilde{M} \times \Lambda_c\Gamma - \Delta) \times \mathbf{R}\Big)/\Gamma$$

L'enveloppe convexe de $\Lambda\Gamma \subset \partial\tilde{M}$ dans $\tilde{M}$ sera notée $Conv(\Lambda\Gamma)$.

1.2 Construction des mesures

On introduit maintenant le potentiel qui va servir à définir les mesures de Gibbs. Soit F une fonction borélienne positive définie sur l'ensemble des vecteurs de $T^1\tilde{M}$ qui se projettent sur $Conv(\Lambda\Gamma)$. On suppose F localement bornée et Γ-invariante. Posons, pour $x,\ y, w \in Conv(\Lambda\Gamma)$:

$$\rho^F_{x,w}(y) = \int_y^w F - \int_x^w F$$

L'intégrale $\int_y^w F$ doit être prise le long de la géodésique reliant y à w dans le fibré unitaire. Pour simplifier, on va supposer que F est invariante par l'involution canonique $v \mapsto -v$ définie sur $T^1_x M$ pour tout x. Ceci garantit l'égalité $\int_y^w F = \int_w^y F$. Définissons à présent les constantes :

$$C^F_r = sup\{|\rho^F_{x_0,w}(y)|,\ y \in \bar{B}(x_0, r) \cap Conv(\Lambda\Gamma), w \in Conv(\Lambda\Gamma)\ \}$$

$$\bar{C}^F_r = inf\{C^F_{r'} \mid r' > r\}$$

Ces constantes sont finies dès que F satisfait une condition de type Holder. Enfin, définissons la série de Poincaré comme suit :

$$P_{x_0}(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\int_{x_0}^{\gamma x_0} F}$$

Son exposant de convergence est noté δ_F. L'idée est maintenant de s'intéresser aux limites faibles dans $\mathcal{M}^1(\Lambda\Gamma)$ de la suite :

$$\mu^F_{x,s} = \frac{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\int_x^{\gamma x_0} F} Dirac(\gamma x_0)}{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\int_{x_0}^{\gamma x_0} F}}$$

Si la série de Poincaré diverge à l'exposant critique, on peut espérer récupérer une mesure sur $\partial\tilde{M}$, qui permette de construire une mesure sur T^1M invariante par le flot géodésique. C'est bien ce qui se produit. Il est même possible de modifier la série de Poincaré de façon à obtenir une mesure portée par $\partial\tilde{M}$ même si cette série converge. Ce point sera détaillé dans la suite.

Introduisons une dernière définition. L'ombre $\mathcal{O}_{x_0}(x, r)$ est la partie de $\partial\tilde{M}$ composée des extrémités des géodésiques issues de x_0 et passant par la boule de centre x et de rayon r.

Théorème [C03]
Soit M une variété complète connexe à courbure négative pincée, soit $\bar{F}$: $T^1M \to \mathbf{R}$ une fonction borélienne positive localement bornée invariante par l'involution $v \mapsto -v$ de T^1M et soit F son relevé à $T^1\tilde{M}$. On suppose que l'exposant critique δ_F et les constantes C_r^F, $r \geq 0$, sont finies. Alors il existe une mesure μ_F portée par $\Lambda\Gamma$, quasi-invariante sous l'action de Γ, et satisfaisant la propriété suivante :

$\exists\, C > 0,\ \exists\, r_0 \geq 0,\ \forall\, r \geq r_0,\ \forall\, \gamma \in \Gamma,$

$$C^{-1} e^{-\delta_F \int_{x_0}^{\gamma x_0} F - 2\,\delta_F\, \bar{C}_r^F} \leq \mu_F(\mathcal{O}_{x_0}(\gamma x_0, r)) \ \leq C e^{-\delta_F \int_{x_0}^{\gamma x_0} F + 2\,\delta_F\, \bar{C}_r^F}$$

Toute mesure de probabilité satisfaisant ces inégalités est absolument continue relativement à μ_F en restriction à $\Lambda_c\Gamma$.

Expliquons brièvement la preuve. La quasi-invariance découle de la divergence de la série de Poincaré et du caractère borné du cocycle. Les inégalités s'obtiennent par simple passage à la limite. Remarquons que la quasi-invariance donne naissance à un module d'absolue continuité qui prolonge (presque) le cocycle $\rho_{x,w}^F$ au bord. Il est nécessaire d'étudier en détail les propriétés de ce prolongement pour mener à bien la construction de la mesure sur T^1M. On renvoie à l'article [C03] pour éviter d'alourdir la présentation.

Enfin, pour démontrer que l'encadrement caractérise la mesure en restriction à $\Lambda_c\Gamma$, on utilise un lemme de recouvrement dû à A. S. Besicovitch. Ce lemme montre que tout sous-ensemble mesurable de $\Lambda_c\Gamma$ peut être presque recouvert par une union dénombrable disjointe d'ensembles de la forme $\mathcal{O}_{x_0}(\gamma x_0, r)$, $\gamma \in \Gamma$.

On peut maintenant construire une mesure sur T^1M en lien avec cette mesure conforme. Il faut à nouveau considérer des sommes pondérées de Dirac, cette fois-ci portées par des éléments de $\tilde{M} \times \tilde{M}$ de la forme $(\gamma x_0, \gamma' x_0)$, avec $\gamma,\ \gamma' \in \Gamma$, et comparer les valeurs d'adhérence faibles dans $\partial\tilde{M} \times \partial\tilde{M}$ avec la mesure $\mu_F \otimes \mu_F$.

Théorème [C03]
Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une mesure localement finie sur T^1M, invariante par le flot géodésique, dont le relevé à $T^1\tilde{M}$ est absolument continu relativement à $\mu_F \otimes \mu_F$, et pour laquelle les propriétés suivantes sont équivalentes :

– *la série de Poincaré diverge à l'exposant critique,*

– $\mu_F(\Lambda_c\Gamma) > 0$,

– $m_F(\{x \in T^1M \mid \omega(x) \neq \emptyset\}) > 0$,

– *la mesure m_F est conservative relativement au flot géodésique,*

– *La mesure m_F est ergodique relativement au flot géodésique.*

Si de plus le flot géodésique est topologiquement mélangeant, alors la mesure m_F est mélangeante dès qu'elle est de masse totale finie.

La mesure m_F est appelée mesure de Gibbs associée au potentiel $\bar{F}$. La preuve du théorème suit les arguments de D. Sullivan [Su79], [Su80]. L'ergodicité découle de l'argument de Hopf [K94], [C07bis]. Le mélange peut être obtenu en faisant appel à un résultat de M. Babillot [B02].

Il faut maintenant chercher à quelles conditions cette mesure m_F est finie. Lorsque la variété est géométriquement finie, F. Dal'bo, M. Peigné et J. P. Otal ont donné un critère assurant cette finitude. On va donner un analogue de ce critère pour les mesures μ_F.

1.3 Critère de finitude

Une variété connexe complète à courbure négative est dite *géométriquement finie* si l'ensemble non-errant admet un voisinage de volume fini.

Il existe différentes caractérisations de la finitude géométrique. Pour simplifier, on énonce un résultat valide pour les surfaces :

Théorème [Bow95] [Da00]
Soit M une surface à courbure négative pincée. Sont équivalents :

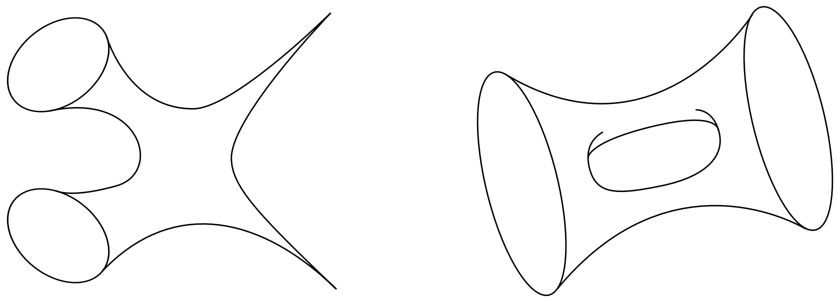
– *la variété M est géométriquement finie,*

– *le groupe fondamental de M est de type fini,*

– *les horosphères non errantes sont denses ou compactes,*

– *la variété M admet un nombre fini de bouts qui sont de type paraboliques ou évasés.*

Rappelons qu'une isométrie d'un espace simplement connexe à courbure négative est dite *hyperbolique* si elle possède deux points fixes sur la compactification naturelle de cet espace. Le quotient de l'espace par une telle isométrie est un cylindre dont les deux bouts sont de volume infini. Un bout est *évasé* s'il est isométrique à un de ces demi-cylindres.



Lorsque la variété est géométriquement finie, il est possible de donner un critère de finitude pour les mesures de Gibbs m_F. Le théorème suivant généralise un résultat de M. Peigné et J. P. Otal [OP04] valide dans le cas d'un potentiel constant.

Rappelons qu'un sous-groupe de Γ est dit parabolique s'il ne contient que des éléments paraboliques. Il est maximal s'il n'est pas contenu dans un sous-groupe parabolique distinct de lui-même. Pour une variété géométriquement finie, les classes de conjugaison de sous-groupe paraboliques maximaux sont en bijection avec les bouts paraboliques.

Théorème
Soit M une variété géométriquement finie, $F : T^1\tilde{M} \to \mathbf{R}$ un potentiel tel que δ_F, C_r^F, $r > 0$, sont finis. Supposons que pour tout sous-groupe parabolique maximal $\mathcal{P} \subset \Gamma$, l'exposant de convergence de la série :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} e^{-s \int_{x_0}^{px_0} F}$$

soit strictement inférieur à δ_F. Alors la mesure m_F est ergodique relativement au flot géodésique. Si de plus la série suivante est convergente :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(x_0, px_0)\ e^{-\delta_F \int_{x_0}^{px_0} F}$$

alors la mesure μ_F est finie.

Les conditions de ce théorème sont satisfaites dès que la fonction F est continue et tend vers l'infini dans les bouts paraboliques.

Ceci se vérifie comme suit. Remarquons d'abord que l'exposant critique ne dépend pas de l'origine x_0 fixée. Considérons un bout parabolique et fixons un voisinage convexe du bout sur lequel la fonction F est supérieure à une certaine constante C. On peut supposer que x_0 appartient à ce voisinage, ce qui donne la majoration :

$$\int_{x_0}^{px_0} F \geq C \int_{x_0}^{px_0} \mathbf{1}$$

Ceci montre que, pour tout $C > 0$, l'exposant de la série $\sum_p exp(-s \int_{x_0}^{px_0} F)$ est majoré par $C^{-1}\delta_{\mathbf{1}}$, où $\delta_{\mathbf{1}}$ est l'exposant critique du groupe Γ. On en déduit que les deux séries convergent pour tout $s > 0$, ce qui démontre l'assertion.

On peut par exemple prendre pour F le relevé de la fonction suivante définie sur M :

$$\bar{F}(x) = 1 + d(x_0, x)$$

Ceci implique le résultat attendu :

Théorème [C03]
Soit M une variété géométriquement finie, possédant au moins un bout parabolique. Alors le flot géodésique sur T^1M admet une mesure de probabilité invariante mélangeante de support total dans l'ensemble non-errant.

Il est en fait possible de construire un potentiel borné pour lequel la mesure m_F est finie. Ceci nécessite une étude plus fine de la mesure dans les bouts paraboliques ; les détails sont dans l'article [C03].

Questions :
– Peut-on supprimer l'hypothèse de finitude géométrique dans le théorème précédent ?
– Sur une variété géométriquement finie, est-il possible de construire une mesure canonique sur l'ensemble non-errant en montrant que le volume renormalisé sur un voisinage de cet ensemble possède une limite lorsque ce voisinage décroît vers l'ensemble non-errant ?

2. Unique ergodicité du feuilletage stable

2.1 Le flot horocyclique

On a vu comment caractériser la densité des feuilles stables d'un flot admettant une structure de produit local. Peut-on donner un analogue mesurable de ce résultat ?

Lorsqu'on est sur une surface compacte à courbure -1, le feuilletage stable du flot géodésique est de dimension un, orientable. Il peut donc être paramétré par la longueur d'arc afin d'obtenir un flot, appelé *flot horocyclique*.

En 1973, par des techniques issues de l'analyse harmonique, H. Furstenberg démontre que ce flot horocyclique est uniquement ergodique [F73]. Ceci implique l'équidistribution et la densité de toutes les feuilles stables relativement au volume canonique sur le fibré unitaire.

Lorsque la courbure est variable, il existe plusieurs manières de paramétrer les feuilles stables et le paramétrage par la longueur d'arc n'est pas le plus naturel. En s'appuyant sur l'existence de la mesure de Bowen-Margulis, B. Marcus [M75] construit un autre paramétrage pour lequel la relation de commutation entre le flot géodésique et le flot horosphérique est encore vrai :

$$g_t \circ h_s = h_{se^{-t}} \circ g_t$$

Il montre ensuite que la mesure de Bowen-Margulis est invariante par le flot horocyclique et que c'est la seule mesure de probabilité invariante par ce flot. Sa preuve est de nature dynamique et repose sur le mélange du flot géodésique.

Voici une généralisation de ces résultats à des systèmes g_t partiellement hyperboliques définis sur des espaces qui ne sont pas nécessairement compacts. Pour simplifier, on suppose que le feuilletage stable du flot g_t peut être paramétré par un flot continu, noté h_s, et on introduit les définitions suivantes. La feuille instable faible passant par le point x est donnée par :

$$W_\varepsilon^{wu}(x) = \{y \in X \mid \forall\, t \geq 0,\ d(g_{-t}(x), g_{-t}(y)) < \varepsilon\}$$

Une mesure μ est dite *absolument continue relativement au feuilletages stable et instable* s'il existe en chaque point un système de coordonnées continu dont les horizontales et les verticales sont données par les ensembles W_ε^{wu} et W^{ss}, et si la mesure μ est absolument continue relativement à une mesure produit dans ce système de coordonnée.

Théorème [C08]
Soit X un espace métrique séparable, g_t et h_s deux flots continus sur X qui satisfont la relation de commutation :

$$g_t \circ h_s = h_{se^{-t}} \circ g_t$$

Soit μ une mesure de probabilité borélienne invariante par les deux flots, de support total, et qui est absolument continu relativement au feuilletages stables et instables. Supposons que le flot h_s admet une orbite dense. Alors μ est la seule mesure de probabilité qui est ergodique, invariante relativement au flot h_s et qui satisfait la condition :

$$\mu(\ \{x \in X \mid \omega(x) = \phi\}\ ) = 0.$$

L'ensemble $\omega(x)$ est l'ensemble limite du point x relativement au flot g_t.

2.2 Équidistribution des feuilles sous l'action du flot

Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue bornée ; introduisons les moyennes sur un bout d'horocycle :

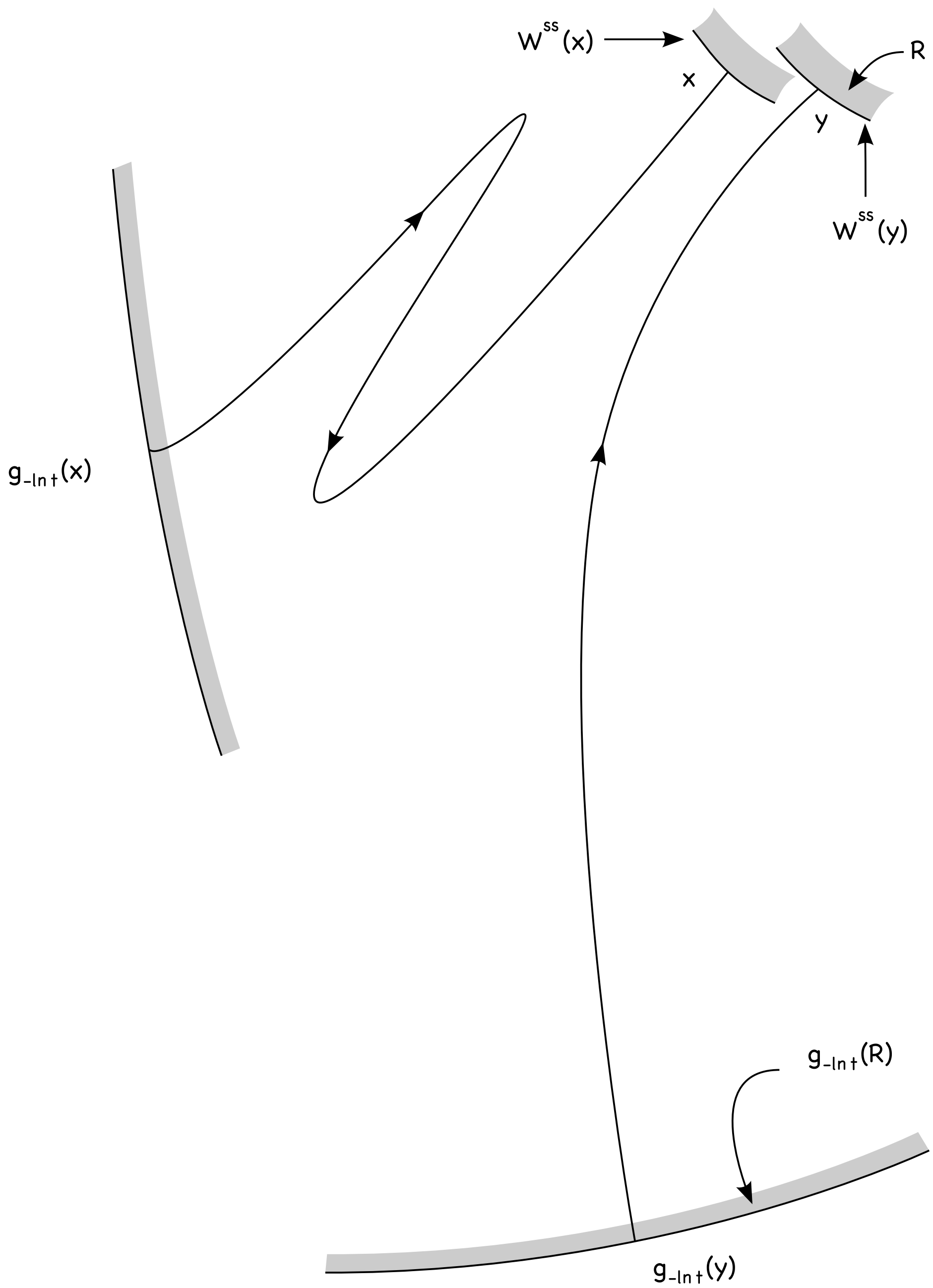
$$M_1(f)(x) = \int_0^1 f(h_s(x))ds, \quad M_t(f) = M_1(f \circ g_{-\ln t})$$

Lemme
La famille $\{M_t(f)\}_{t \in \mathbf{R}_+}$ est équicontinue.

Preuve du lemme
On se donne deux points x et y proches l'un de l'autre et on pousse en arrière la feuille de taille un en x et y par le flot $g_{\ln t}$. Il s'agit de vérifier que les moyennes de f sur les deux morceaux de feuilles obtenues sont proches, indépendamment de t.

Pour cela, on épaissit la feuille en x et en y ; dans les coordonnées données par le produit local en x et en y, on considère un rectangle R qui s'appuie sur le morceau de feuille stable de taille un, et dont l'épaisseur est de taille ε. La fonction f est supposée uniformément continue, son intégrale sur le rectangle relativement à la mesure μ normalisée est proche de $M_1(f)(x)$ ou $M_1(f)(y)$.

Par invariance de la mesure μ, cette intégrale est égale à l'intégrale de f sur $g_{-\ln t}(R)$. Comme il n'y a pas eu de dilatation transversalement au feuilletage stable, cette intégrale est proche de $M_t(f)(x)$ et $M_t(f)(y)$, indépendamment de t. Ceci démontre le lemme.


$W^{ss}(x)$
x
R
y
$W^{ss}(y)$
$g_{-\ln t}(x)$
$g_{-\ln t}(R)$
$g_{-\ln t}(y)$

2.3 Preuve de l'unique ergodicité

On remarque que les moyennes $M_t(f)$ sont obtenues en translatant par $g_{-\ln t}$ les sommes de Birkhoff $\frac{1}{t}S_t(f)$ du flot horocyclique :

$$\frac{1}{t}\, S_t(f)(g_{-\ln t}(x)) = M_t(f)(x)$$

Montrons que $M_t(f)$ converge uniformément sur les compacts vers $\int f\, d\mu$.

Par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence, pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est constante. Une telle valeur d'adhérence $\bar{f}$ est continue. C'est aussi une valeur d'adhérence pour la topologie L^2, car la suite de fonctions $M_t(f)$ est uniformément bornée indépendamment de t.

D'après le théorème ergodique L^2, nous savons que la suite $\frac{1}{t}S_t(f)$ converge vers une fonction Pf invariante par le flot horocyclique. La suite $Pf \circ g_{-\ln t}$ admet donc une sous-suite qui converge en norme L^2 vers $\bar{f}$. Comme c'est une suite de fonctions h_s-invariantes, $\bar{f}$ est h_s-invariante, continue, donc constante car le flot h_s admet une orbite dense. On a montré que la suite $M_t(f)$ converge vers $\int f\, d\mu$. De même, $\frac{1}{t}S_t(f)$ converge en norme L^2, donc μ est ergodique.

Pour ce qui est de l'unicité, soit ν une mesure de probabilité ergodique invariante par h_s qui satisfait $\nu(\ \{x \in X \mid \omega(x) = \phi\}\ ) = 0$. Choisissons $x \in X$ et t_k tels que $g_{\ln t_k}(x)$ reste dans un compact K et $\frac{1}{t_k}S_{t_k}(f)(x)$ converge vers $\int f\, d\nu$. La suite $M_t(f)$ converge uniformément sur K vers $\int f\, d\mu$, si bien que :

$$\frac{1}{t_k}S_{t_k}f(x) = M_{t_k}(f)(g_{\ln t_k}(x)) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int f d\mu$$

Ceci montre que $\int f d\mu = \int f d\nu$, comme désiré.

Remarques :

– L'unique ergodicité du flot h_s implique l'ergodicité de h_s relativement à la mesure invariante. Ceci implique également le mélange du flot g_t relativement à cette mesure, et donc l'ergodicité de ce flot. Ce résultat ne découle pas de l'argument de Hopf puisque nous n'avons fait aucune hypothèse de contraction le long de W^{wu}.

– L'exemple le plus simple de flot partiellement hyperbolique satisfaisant les hypothèses du théorème est donné par la suspension d'un automorphisme du tore avec une unique valeur propre de module plus petite que un, et des valeurs propres sur le cercle unité. D'autres exemples sont donnés par l'action des flots d'Anosov sur le fibré des repères.

2.4 Le cas multidimensionnel

Remarquons d'abord que le lemme n'utilise pas vraiment le caractère unidimensionnel du feuilletage stable. Lorsque celui-ci est régulier, on peut choisir en chaque point une boule "unité" dans la feuille stable, ainsi qu'un opérateur de moyennisation sur la boule qui remplace la quantité $M_1(f)$.

Ces boules donnent un "paramétrage" naturel sur la feuille $W^{ss}(x)$, obtenu en prenant l'image réciproque par g_t de la boule unité du point $g_t(x)$. Pour avoir compatibilité entre le "paramétrage" et la mesure, Il suffit que la moyenne sur le rectangle tende vers la moyenne sur la boule dans la feuille, lorsque la hauteur du rectangle tend vers zéro. Le lemme précédent est alors vérifié.

La condition de compatibilité revient à paramétrer les feuilles par les conditionnelles de la mesure le long des feuilles stables dans des ouverts de produit local, ou bien à construire cette mesure à partir du paramétrage et d'un choix judicieux de mesure sur les transversales.

Passons maintenant à la preuve du théorème. Lorsqu'on n'a pas de flot qui engendrent les feuilles stables, il faut trouver un autre argument pour obtenir l'invariance par le feuilletage stable des valeurs d'adhérence de la suite $M_t(f) = M_1(f \circ g_{-\ln t})$.

On sait que les valeurs d'adhérence faibles de la suite $f \circ g_{-\ln t}$ sont invariantes à la fois par le feuilletage stable et instable. Comme l'opérateur $f \mapsto M_1(f)$ est L^2-continu et qu'il moyenne le long des feuilles stables, toute valeur d'adhérence de $f \circ g_{-\ln t}$ est aussi valeur d'adhérence de $M_1(f \circ g_{-\ln t})$. On peut donc extraire de toute sous-suite de $M_t(f)$ faiblement convergente, une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction W^{ss}-invariante. Les valeurs d'adhérence faibles ou L^2 de la suite $M_t(f)$ sont bien W^{ss}-invariantes.

On montre comme précédemment la convergence uniforme sur les compacts de la suite $M_t(f)$ vers $\int f \, d\mu$, ainsi que l'ergodicité de μ. Pour ce qui est de l'unique ergodicité, il faut définir ce qu'on entend par mesure ergodique invariante relativement au "paramétrage" des feuilles. Sans doute la notion la plus naturelle ici est de demander à ce que les moyennes sur les boules convergent presque partout vers l'intégrale relativement à la mesure. De fait, la convergence des moyennes de Birkhoff d'un flot vers l'intégrale de la mesure ne rend pas seulement compte de l'ergodicité de la mesure mais aussi de son invariance. L'argument précédent s'applique alors et donne un équivalent de l'unique ergodicité.

Là encore, on a un résultat analogue pour des transformations plutôt que des flots. On peut en particulier appliquer le théorème à des systèmes symboliques donnés par des chaînes de Markov. Dans ce cadre, les quantités $M_t(f)$ s'identifient aux puissances de l'opérateur de transfert $L(f)$. La relation entre $M_t(f)$ et les sommes de Birkhoff de h_s correspond à l'égalité classique entre l'opérateur de transfert et les images réciproques de l'espérance conditionnelle relativement à la tribu passée de la chaîne $\xi = \vee_{k\leq 0}\, \sigma^{-k}\{[a] \mid a \in I\}$:

$$Lf = E(f \mid \sigma^{-1}\xi) \circ \sigma^{-1}$$

Question
A-t-on encore unicité pour les mesures supportées par les points horosphériques ?

3. Produits semi-directs

3.1 Un produit gauche au-dessus d'une translation du tore

On a vu comment en présence de récurrence, on peut obtenir des résultats sur le feuilletage stable d'un flot ou d'une transformation.

De manière surprenante, il est possible d'avoir un feuilletage stable transitif et ergodique, même si le flot est totalement dissipatif. Nous allons construire un exemple en nous basant sur la construction donnée plus haut dans le paragraphe intitulé *Flot hyperbolique errant*.

On considère le flot défini sur $\hat{X} = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ par :

$$\hat{\phi}_t(x, s) = (x, t + s)$$

Ce flot est certainement dissipatif.

Soit $T : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ un automorphisme hyperbolique ; on peut prendre par exemple l'action de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur le tore. Soit $r : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction de classe C^1. On pose $\tilde{r}(x) = r(x) - r(0,0)$. Quotientons le produit $\hat{X} = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ par l'action de la transformation :

$$\hat{T}(x, s) = (T(x), s - r(x))$$

Le quotient est noté X. Munissons la variété X d'une métrique riemannienne et relevons cette métrique à $\hat{X}$.

Proposition [C01]
On suppose que :

$$\overline{< \tilde{r}^n(x) \mid x \in \mathbf{T}^2 \ \ et \ \ n \in \mathbf{N} \ \ \ tels\ que\ T^n x = x >} \ = \ \mathbf{R}$$

Alors le feuilletage stable de $\hat{\phi}_t$ est conservatif, ergodique relativement à la mesure de Lebesgue sur $\hat{X}$.

Les sommes de Birkhoff de l'application $\tilde{r}$ ont été notées $\tilde{r}^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{r}(T^k(x))$.

La condition sur l'application r est générique. C'est une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'ergodicité du feuilletage stable. Elle est équivalente à l'existence d'une feuille stable dense sur $\hat{X}$.

Considérons le cas $T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Le point $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ est périodique de période 2, le point $(\frac{1}{2}, 0)$ est périodique de période 3. Pour construire un exemple explicite d'application r satisfaisant la condition de la proposition précédente, il suffit de choisir r telle que :

$$r(\tfrac{1}{2}, 0), \ r(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \ , r(0, \tfrac{1}{2}) \text{ et } r(0,0) \text{ sont rationnels}$$

$$r(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}) + r(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}) \text{ est irrationnel}$$

Ces conditions impliquent $\tilde{r}^3(\frac{1}{2}, 0) \in \mathbf{Q}$ et $\tilde{r}^2(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \notin \mathbf{Q}$. Voici un choix possible :

$$r(x_1, x_2) = 2 + \cos(2\pi x_1)$$

On a alors : $\tilde{r}^3(\frac{1}{2}, 0) = -4$, $\tilde{r}^2(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 2 = \frac{\sqrt{5}-5}{2}$.

Le feuilletage n'est pas ergodique si l'application r est constante. En effet, les feuilles sont contraintes à rester dans les horizontales $\mathbf{T}^2 \times \{t\}$. Plus généralement, on n'a pas ergodicité si r est cohomologue à une constante, mais cette condition n'est pas équivalente à l'absence d'ergodicité.

Construisons un paramétrage des feuilles stables sur $\hat{X}$. Le nombre d'or est noté $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$. Le sous-espace stable de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est dirigé par le vecteur $\mathbf{e}_s = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)$, qui est associé à la valeur propre λ^{-2}.

Pour $x, y \in \mathbf{T}^2$ tels que $x - y \in \mathbf{R}e_s$, on définit un cocycle par la formule :

$$c(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} r(T^k x) - r(T^k y)$$

Cette série est convergente car la fonction r est Lipschitzienne et la distance entre $T^k x$ et $T^k y$ tend exponentiellement vite vers 0.

L'expression suivante définit un flot sur l'espace $\hat{X} = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$:

$$\hat{h}_s(x,t) = (x + s\mathbf{e}_s,\ t + c(x + s\mathbf{e}_s, x))$$

Ce flot vérifie les relations de commutation suivantes :

$$\hat{h}_s \circ \hat{\phi}_t = \hat{\phi}_t \circ \hat{h}_s$$

$$\hat{T} \circ \hat{h}_s = \hat{h}_{\lambda^{-2}s} \circ \hat{T}$$

Lemme
Les feuilles stables du flot $\hat{\phi}_t$ s'identifient aux orbites du flot $\hat{h}_s$.

Preuve
Appliquons la transformation $\hat{T}$ afin de se ramener dans le domaine fondamental $\{(x,t) \mid 0 \leq t \leq r(x)\}$ pour mesurer les distances. Pour tout $x \in \mathbf{T}^2$ et $t \in \mathbf{R}$, il existe un unique $n \in \mathbf{Z}$ tel que $0 \leq t - r^n(x) \leq r(T^n x)$.

$\hat{\phi}_t(x, \alpha) = (x, \alpha + t) \simeq (T^n x, \alpha + t - r^n x)$

$\hat{\phi}_t(x + u\mathbf{e}_s, \beta) = (x + u\mathbf{e}_s, \beta + t) \simeq (T^n x + u\lambda^{-2n}\mathbf{e}_s, \beta + t - r^n(x + u\mathbf{e}_s))$

Cette dernière quantité peut se réécrire :

$$\alpha + t - r^n(x) + \sum_{k \geq n} (r(T^k(x + u\mathbf{e}_s) - r(T^k x))) + \beta - \alpha - c(x + u\mathbf{e}_s, x)$$

Elle tend vers $\quad \alpha + t - r^n(x) \quad$ si $\quad \beta = \alpha + c(x + u\mathbf{e}_s, x)$.

Remarquons que ce paramétrage des feuilles stables est très différent du paramétrage donné par la longueur d'arc ou par la mesure de Bowen-Margulis. La proposition précédente est équivalente à la suivante :

Proposition
Le flot $\hat{h}_s : \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ est ergodique relativement à la mesure de Lebesgue si et seulement si il est transitif.

Ce résultat est à rapprocher d'un théorème de Furstenberg :

Théorème [F]
Soit T une transformation continue uniquement ergodique définie sur un espace compact X, G un groupe compact, et $r : X \to G$ une application continue. Alors la transformation $\hat{T}(x,t) = (Tx, t - rx)$ définie sur $X \times G$ est uniquement ergodique si et seulement si elle est transitive.

Dans notre cas, le groupe n'est pas compact, on n'a pas unique ergodicité. Le résultat de Furstenberg démontre tout de même l'unique ergodicité du quotient de la transformation $\hat{h}_1$ sur $(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R})/ < \hat{\phi}_1 > = \mathbf{T}^2 \times S^1$, modulo une hypothèse *ad hoc*. Un tel quotient n'existe que si le flot $\hat{\phi}_t$ est totalement dissipatif.

3.2 Flots hyperboliques sur les revêtements

Rappelons la définition d'un ensemble et d'un flot hyperbolique :

Définition
Soit ϕ_t un flot C^1 défini sur une variété C^∞ riemannienne M. Un ensemble $\Lambda \subset M$ est dit *hyperbolique* pour ϕ_t s'il est compact, invariant par ϕ_t et si il existe un ouvert U contenant Λ, ainsi qu'une métrique riemannienne sur U et des réels positifs C, λ, tels que l'on puisse trouver pour tout $x \in \Lambda$ une décomposition $T_xM = E_x^0 \oplus E_x^s \oplus E_x^u$ vérifiant :
- E^0 est de dimension 1 tangent au flot ;
- $D\phi_t E_x^s = E_x^s$, $D\phi_t E_x^u = E_x^u$;
- $\forall t > 0$, $\| D\phi_{t|E_x^s} \| \leq Ce^{-\lambda t}$ et $\| D\phi_{-t|E_x^u} \| \leq Ce^{-\lambda t}$.

Définition [Bo73]
Soit ϕ_t un flot C^1 défini sur une variété C^∞ riemannienne M, $\Lambda \subset M$ un compact ϕ_t-invariant. Le flot ϕ_t est dit *hyperbolique sur* Λ si :
- Λ est hyperbolique pour ϕ_t , Λ ne contient pas de points fixes hyperboliques ,
- Les orbites périodiques de Λ sont denses dans Λ ,
- Le flot ϕ_t est transitif sur Λ :
  il existe un point de Λ dont l'orbite est dense dans Λ ,
- Maximalité locale : il existe un ouvert U contenant Λ tel que $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbf{R}} \phi_t(U)$.

Les flots d'Anosov transitifs, les flots Axiom A en restriction à une pièce basique, sont des exemples de flots hyperboliques.

Considérons un flot hyperbolique ϕ_t en restriction à un compact invariant Λ. On fixe un revêtement régulier $\pi : \hat{X} \to X$, son groupe d'automorphisme est noté G. Le relèvement du flot au revêtement ϕ_t est noté $\hat{\phi}_t$. On a vu que ce relèvement peut être totalement dissipatif. A quelle condition le feuilletage stable $\hat{W}^{ss}$ du flot $\hat{\phi}_t$ est-il ergodique sur le revêtement ?

Revêtements abéliens

Commençons par considérer le cas où le groupe du revêtement est abélien. Rappelons qu'on peut associer à chaque point périodique p de période $l(p)$ du flot ϕ_t son déplacement dans la fibre, noté $[p]$. Cet élément de G vérifie, pour tout relevé $\hat{p}$ de p :

$$\hat{\phi}_{l(p)}(\hat{p}) = [p]\,(\hat{p})$$

Théorème [C01]
Soit M une variété C^∞, Λ un compact de M, ϕ_t un flot hyperbolique C^1 sur Λ, $\pi : \hat{M} \to M$ un revêtement galoisien de M de groupe d'automorphisme G abélien, μ une mesure de Gibbs sur Λ. Soit $\hat{\phi}_t$ le relevé G-équivariant de ϕ_t à $\hat{M}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

– *transitivité du feuilletage stable :* $\exists\, \hat{x} \in \pi^{-1}(\Lambda)$ *tel que* $\pi^{-1}(\Lambda) \subset \overline{\hat{W}^{ss}(\hat{x})}$

– *densité des périodes et des éléments de Frobenius des orbites périodiques :*

$$\overline{< \{(l(p), [p]) \mid p \text{ point périodique de } \phi_t \text{ sur } \Lambda\} >} = \mathbf{R} \times G$$

– *ergodicité du feuilletage stable de $\hat{\phi}_t$: $\hat{W}^{ss}$ est ergodique en restriction à $\pi^{-1}(\Lambda)$ pour toute mesure dans la classe de $\mu \times Haar$.*

La condition portant sur les orbites périodique peut s'exprimer sous la forme d'une *équation cohomologique* : il n'existe pas de fonction $h : \hat{X} \to S^1$ continue non constante ni de caractère $\chi : \mathbf{R} \times G \to S^1$ tels que :

$$\forall\,(t,g) \in \mathbf{R} \times G, \quad h\Big(g\hat{\phi}_t(\hat{x})\Big) = \chi(t,g)\; h(\hat{x})$$

Revêtement canonique d'une suspension

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour la transitivité du feuilletage stable en terme des orbites périodiques du flot. Cette condition peut être satisfaite même si le flot est totalement dissipatif. Voici une construction à base de suspension qui généralise celle du paragraphe précédent.

On part d'un difféomorphisme hyperbolique T défini sur un compact K et d'une transformation r de classe C^1 sur K à valeurs réelles strictement positives. Posons $\hat{T}(x,s) = (Tx, s - r(x))$ et définissons comme précédemment :

$$\hat{X} = K \times \mathbf{R} \ , \qquad X = (K \times \mathbf{R}) / < \hat{T} >$$

Le flot $\hat{\phi}_t : \hat{X} \to \hat{X}$ défini par $\hat{\phi}_t(x,s) = (x, s+t)$ passe au quotient et donne un flot hyperbolique ϕ_t sur X. Les orbites périodiques de ce flot sont en bijection avec celles de T. A chaque point périodique x de période n sur K est associé le point périodique $p = (x,0)$ de ϕ_t. Rappelons La notation $r^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r(T^k x)$. La période et le déplacement dans la fibre sont donnés par :

$$(\, l(p), [p] \,) = (r^n(x), n) \ \in \ \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$$

La condition sur les orbites périodiques de ϕ_t devient :

$$\overline{< \{(r^n(x), n) \mid x \in K \text{ et } n \in \mathbf{N} \text{ tels que } T^n x = x\} >} \ = \ \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$$

Si la transformation T admet un point fixe x_0, on peut remplacer l'application r par $\tilde{r} = r - r(x_0)$. La condition devient :

$$\overline{< \{\tilde{r}^n(x) \mid x \in K \text{ et } n \in \mathbf{N} \text{ tels que } T^n x = x\} >} \ = \ \mathbf{R}$$

Ceci équivaut à la condition cohomologique suivante : il n'existe pas de réel $\alpha \neq 0$ ni de fonction $g : K \to S^1$ continue satisfaisant l'équation

$$e^{i\alpha\tilde{r}} = \frac{g \circ T}{g}$$

En résumé, dans le cas du $\mathbf{Z}$-revêtement canonique d'une suspension, on a :

Proposition
Sont équivalents :

- *le feuilletage stable de $\hat{\phi}_t$ est ergodique*
- *le feuilletage stable de $\hat{\phi}_t$ est transitif*
- $\overline{< \{(l(p), [p]),\ p \text{ point périodique de } \phi_t \text{ sur } \ X\} >} = \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$
- $\overline{< \{\tilde{r}^n(x) \mid x \in K \text{ et } n \in \mathbf{N} \text{ tels que } T^n x = x\} >} \ = \ \mathbf{R}$
- *il n'existe pas de fonction $g : K \to S^1$ ni de $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tels que : $e^{i\alpha\tilde{r}} = \frac{g \circ T}{g}$*

Revêtements nilpotents

Il est possible de traiter le cas de certains revêtements non abéliens, modulo quelques hypothèses supplémentaires. Voici un énoncé dans le cas nilpotent :

Théorème [C03bis]
Soit M une variété C^∞, Λ un compact de M, ϕ_t un flot hyperbolique C^1 sur Λ, $\pi : \hat{M} \to M$ un revêtement galoisien de M de groupe d'automorphisme G virtuellement nilpotent, μ une mesure de Gibbs sur Λ. Soit $\hat{\phi}_t$ le relevé G-équivariant de ϕ_t à $\hat{M}$.

On suppose que le flot $\hat{\phi}_t$ est topologiquement mélangeant. Alors son feuilletage stable est ergodique.

Le cas d'un flot hyperbolique dissipatif sur un revêtement nilpotent n'est pas entièrement élucidé.

Le flot géodésique en courbure négative

Le flot géodésique en courbure négative donne un exemple de flot hyperbolique auquel on peut appliquer le théorème précédent. La compacité de la base n'est pas nécessaire pour obtenir l'ergodicité.

Théorème [C03bis]
Soit M une variété connexe complète à courbure négative pincée. Soit μ une mesure de Gibbs finie sur T^1M et $\pi : \hat{M} \to M$ un revêtement galoisien de $\hat{M}$ dont le groupe de revêtement est virtuellement nilpotent. On suppose que le flot géodésique sur $T^1\hat{M}$ est topologiquement mélangeant en restriction à son ensemble non-errant, qui est supposé non vide. Alors le feuilletage stable sur $T^1\hat{M}$ est ergodique relativement au relevé de la mesure μ.

La condition de mélange topologique est satisfaite par exemple si tous les points de M sont non-errants [Eb73], si M est une surface ou si le groupe fondamental de $\hat{M}$ possède un élément parabolique [Da00]. On a vu que cette condition pouvait s'exprimer en fonction des longueurs des géodésiques sur $\hat{M}$. Il est conjecturé qu'elle est toujours vérifiée si l'ensemble non-errant n'est pas vide ou restreint à une orbite périodique.

Voici pour terminer ce que donne le théorème précédent lorsque le volume est fini :

Corollaire [C03bis]
Soit M une variété complète de volume fini, à courbure négative pincée, et telle que les dérivées partielles d'ordre un de la courbure sont bornées. Soit $\hat{M}$ un revêtement nilpotent connexe de M. Alors le feuilletage stable du flot géodésique sur $T^1\hat{M}$ est ergodique relativement à la mesure de Liouville.

Lien avec le feuilletage stable faible

Plutôt que d'étudier le feuilletage stable W^{ss}, on aurait pu s'intéresser au feuilletage stable faible :

$$W^{ws}(x) = \bigcup_{t\in\mathbf{R}} \phi_t\Big(W^{ss}(x)\Big)$$

L'ergodicité du feuilletage W^{ss} implique l'ergodicité de W^{ws}. On peut montrer qu'elle est en fait équivalente à l'ergodicité de W^{ws} sur une certaine extension. Soit $\phi_t : X \to X$ un flot et $\hat{\phi}_t : X \times \mathbf{R} \to X \times \mathbf{R}$ l'extension donnée par $\hat{\phi}_t(x,s) = (\phi_t(x), s+t)$. L'espace $X \times \mathbf{R}$ est muni de la distance obtenue en faisant la somme de la distance sur X et sur $\mathbf{R}$. On vérifie que la trace de la feuille stable faible de $\hat{\phi}_t$ sur $X \times \{0\}$ donne la feuille stable de ϕ_t :

$$W^{ws}_{\hat{\phi}_t}(x,0) \ \cap\ X \times \{0\} \ = \ W^{ss}_{\phi_t}(x) \times \{0\}$$

Ceci permet de transférer les propriétés du feuilletage stable faible de $\hat{\phi}_t$ au feuilletage stable fort de ϕ_t. On aurait donc pu déduire les résultats portant sur le feuilletage stable W^{ss} de ceux portant sur le feuilletage stable faible.

On se contente d'énoncer un résultat portant sur W^{ws}.

Théorème
Soit M une variété C^∞, Λ un compact de M, ϕ_t un flot hyperbolique C^1 sur Λ, $\pi : \hat{M} \to M$ un revêtement galoisien de M de groupe d'automorphisme G abélien, μ une mesure de Gibbs sur Λ. Soit $\hat{\phi}_t$ le relevé G-équivariant de ϕ_t à $\hat{M}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

– *transitivité du feuilletage : $\exists\ \hat{x} \in \pi^{-1}(\Lambda)$ tel que $\pi^{-1}(\Lambda) \subset \overline{\hat{W}^{ws}(\hat{x})}$*

– *densité du groupe engendré par les éléments de Frobenius :*

$$\overline{<\{\ [p] \mid p \text{ point périodique de } \phi_t \text{ sur } \ \Lambda\} >} = G$$

– *ergodicité du feuilletage stable faible de $\hat{\phi}_t$: $\hat{W}^{ws}$ est ergodique en restriction à $\pi^{-1}(\Lambda)$ pour toute mesure dans la classe de $\mu \times Haar$.*

Remarquons pour finir que l'ergodicité du feuilletage faible d'un flot géodésique défini sur une variété à courbure négative est équivalente à l'ergodicité de l'action du groupe fondamental de la variété sur le bord du revêtement universel. Ce bord s'identifie en effet à l'ensemble des feuilles stables faibles du flot sur le revêtement universel. On parle parfois de dualité pour caractériser ce lien entre feuilletage faible et action du groupe fondamental sur le bord.

3.3 Cocycles et chaînes de Markov

Les énoncés précédents ont un analogue pour les produits semi-directs au dessus des chaînes de Markov.

Dans ce cadre, il est plus naturel d'étudier le feuilletage stable faible du décalage. On a expliqué plus haut comment en déduire des résultats sur le feuilletage W^{ss}. On se contente de regarder le cas d'un décalage unilatère.

Soit A une matrice $\ell \times \ell$ dont les éléments sont égaux à 0 ou 1. Le décalage de type fini unilatère de matrice de transition A est défini sur l'espace :

$$\Sigma_A^+ := \{\ \{x_k\}_{k\in\mathbf{N}} \in \{1..\ell\}^{\mathbf{N}} \mid \forall\ k \in \mathbf{N},\ A_{x_k x_{k+1}} = 1\}$$

Il décale les termes de la suite $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ vers la gauche :

$$\sigma(\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}) = \{x_{k+1}\}_{k\in\mathbf{N}}$$

L'espace Σ_A^+ est muni de la distance suivante :

$$d(\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbf{N}}) = 2^{-min\{i\in\mathbf{N}\ \mid\ x_i\neq y_i\}}$$

Pour cette distance, la feuille stable de $x \in \Sigma_A^+$ se décrit comme suit :

$$W^{ss}(x) = \{y \in \Sigma_A^+ \mid \exists\, n \in \mathbf{N}\ tel\ que\ \sigma^n x = \sigma^n y\}$$

$$W^{ws}(x) = \{y \in \Sigma_A^+ \mid \exists\, m, n \in \mathbf{N}\ tels\ que\ \sigma^m x = \sigma^n y\}$$

Soit G un groupe abélien localement compact métrique séparable. Soit $f : \Sigma_A^+ \to G$ une application Holderienne. L'application σ se relève à G en posant :

$$\tilde{\sigma}(x, g) = (\sigma x, g + f(x))$$

Deux points x, y de Σ_A^+ sont sur la même feuille stable faible de $\tilde{\sigma}$ s'ils vérifient la relation d'équivalence suivante :

$$(x,g) \sim (y,h) \leftrightarrow \; \exists\, m,n \geq 0 \;\; \textit{tels que} \;\; \sigma^m(x) = \sigma^n(y) \; , \; g+f^m(x) = h+f^n(y)$$

Il existe un formalisme général pour étudier les propriétés d'équivalence à classe dénombrable et leur extension à un produit par le biais d'un cocycle [FM77] et [Schm77]. Soit x, y deux éléments de Σ_A^+ sur la même feuille stable faible de σ. Choisissons deux entiers m, n qui satisfont $\sigma^m x = \sigma^n y$. On pose :

$$c(x,y) = \sum_{k=0}^{m} f(\sigma^k x) - \sum_{k=0}^{n} f(\sigma^k y)$$

Cette quantité ne dépend pas du choix des entiers m et n, dès l'instant où x n'est pas pré-périodique. On a alors :

$$(x,g) \sim (y,g') \quad \leftrightarrow \quad y \in W^{ws}(x) \;\; \text{et} \;\; g' = g + c(x,y)$$

On dit que la relation $\sim$ sur $\Sigma_A^+ \times G$ est obtenue à partir de la relation donnée par W^{ws} sur Σ_A^+ et du cocycle $c(x,y)$.

De manière générale, une relation $\sim$ est dite ergodique relativement à une mesure μ si tout ensemble mesurable qui est union de classes d'équivalence est négligeable ou de complémentaire négligeable. Remarquons que la relation d'équivalence définie par W^{ws} est ergodique relativement à toute mesure de Gibbs, car ses classes sont des ensembles invariants par le décalage σ. Voici une condition assurant l'ergodicité de la relation induite par le cocycle c sur $\Sigma_A^+ \times G$:

Théorème [FM77]
Un élément $g \in G$ est valeur essentielle *du cocycle si pour tout voisinage V de g, pour tout borélien $B \subset \Sigma_A^+$ de mesure strictement positive, on a :*

$$\mu(\{x \in B \mid \exists\, y \in W^{ws}(x),\; y \in B,\; c(x,y) \in V\}) > 0$$

Les valeurs essentielles forment un sous-groupe fermé de G ; la relation induite par le cocycle sur $\Sigma_A^+ \times G$ est ergodique si et seulement si tous les éléments de G sont valeurs essentielles du cocycle.

Le calcul des valeurs essentielles a été mené dans [C01]. Soit $p \in \Sigma_A^+$ un point périodique de période n. La quantité $f^n(p)$ est le *poids* associé à cette orbite périodique. Ces poids sont tous des valeurs essentielles du cocycle. En employant le théorème de Livsic [Liv72], on peut montrer que la relation n'est pas ergodique si ces poids n'engendrent pas un sous-groupe dense de G. Ceci implique le théorème suivant :

Théorème [C01]
Soit $(\Sigma_A^+, \sigma, \mu)$ un décalage de type fini unilatère transitif muni d'une mesure de Gibbs, soit G un groupe localement compact métrique séparable abélien, $f : \Sigma_A^+ \to G$ une application höldérienne. Considérons la relation d'équivalence sur $\Sigma_A^+ \times G$ donnée par :

$$(x, g) \sim (y, h) \leftrightarrow \exists\, m, n \text{ tels que } \sigma^m(x) = \sigma^n(y)\ ,\ g + f^m(x) = h + f^n(y)$$

On a équivalence entre les propositions suivantes :

– *transitivité de la relation ;*

– *ergodicité de la relation relativement à $\mu \times Haar$;*

– *densité du groupe des poids : $\overline{< \{f^n(p) \mid p \text{ et } n \text{ tels que } \sigma^p x = x\} >} = G$*

– *non-arithméticité : il n'existe pas de caractère $\chi : G \to S^1$ et de fonction höldérienne $g : \Sigma_A^+ \to S^1$ tels que $\chi \circ f = g \circ \sigma / g$.*

Ce théorème admet une extension au cas des groupes G nilpotents qui est discutée dans [C03bis]. Les hypothèses *ad hoc* sont discutées dans le paragraphe suivant.

Il y a bien sûr une analogie parfaite entre les poids des orbites périodiques et les éléments de Frobenius utilisé au paragraphe précédent. On peut d'ailleurs déduire le résultat portant sur les flots hyperboliques du théorème précédent en utilisant un modèle symbolique donné par une partition de Markov [C01].

Cette approche a l'inconvénient de limiter la portée du résultat à des systèmes uniformément hyperboliques définis sur des revêtements à base compacte. La preuve donnée dans [C03bis] est de nature géométrique et s'affranchit de ces limitations. Elle est présentée au paragraphe suivant.

3.4 Preuve de l'ergodicité du feuilletage stable

On décrit de manière succincte la preuve des résultats de ce chapitre. Les hypothèses les plus générales sont assez longues à décrire. On se contente de se placer dans le cadre qui suit, sans détailler les conditions les plus techniques.

On se donne :

– un espace X métrique séparable,

– un groupe G localement compact métrique séparable,

– un G-fibré principal $\pi : \hat{X} \to X$,

– un flot continu $\hat{\phi}_t$ sur $\hat{X}$ commutant avec G ; le quotient sur X est noté ϕ_t,

– une mesure de probabilité μ sur X invariante ergodique par ϕ_t,

On décrit de manière informelle les hypothèses satisfaites par ces données :

– il existe une structure de produit local $[\,,\,]$ sur X qui se relève à $\hat{X}$,

– La contraction le long des feuilles instables de $\hat{\phi}_t$ est uniforme relativement aux fibres,

– La mesure $\hat{\mu} = \mu \times Haar$ est invariante par $\hat{\phi}_t$.

– Pour tout point p ϕ_t-périodique, la mesure $\hat{\mu}$ est absolument continue relativement à la transformation définie au voisinage de la fibre de p par :

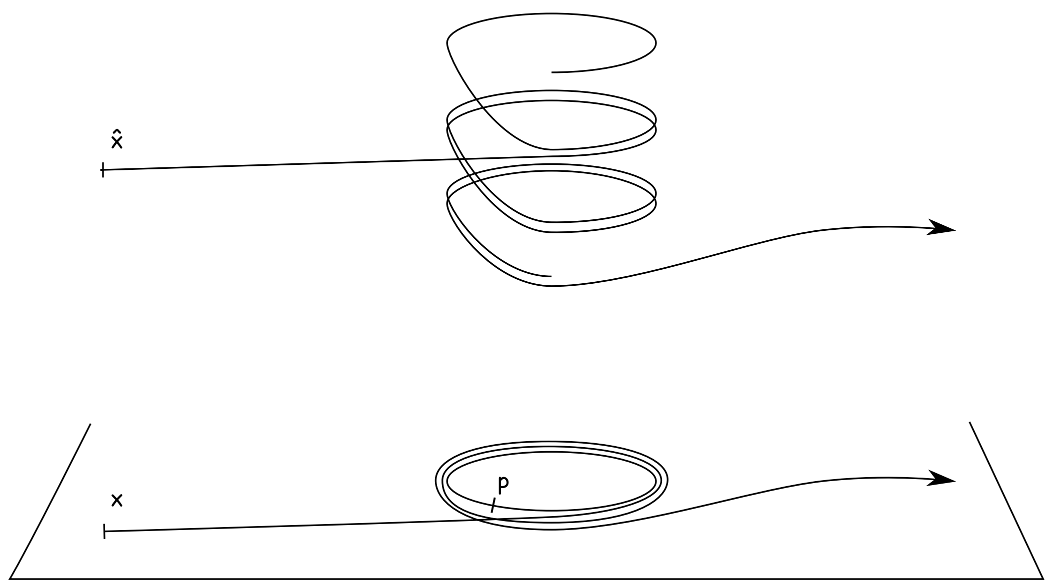
$$\hat{x} \mapsto [\, [p]^{-1} \hat{\phi}_{l(p)}(\hat{x}), \hat{x}\,]$$

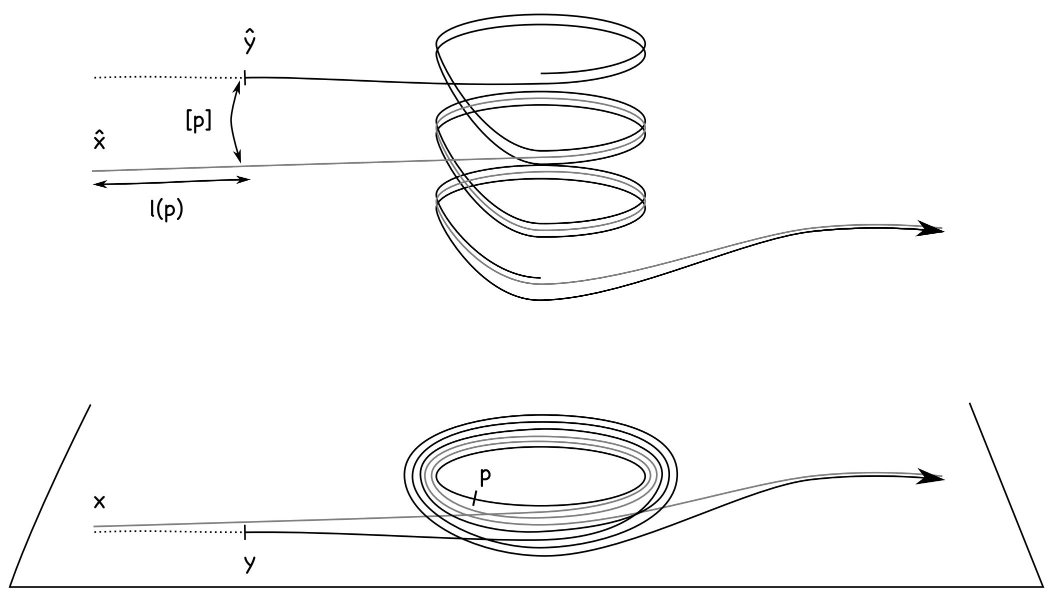
Le premier crochet fait référence au produit local, l'élément $[p]$ est défini par l'identité $\hat{\phi}_{l(p)}(\hat{p}) = [p]\,(\hat{p})$, avec $\hat{p}$ un relevé de p. On suppose de plus que le module de continuité est borné uniformément dans la fibre. Ces conditions découlent en pratique de l'absolue continuité du feuilletage stable et instable ; la formulation qui précède évite d'avoir à faire des hypothèses de régularité sur les feuilletages.

Preuve dans le cas abélien

Pour simplifier, on suppose G abélien. On cherche à montrer que le feuilletage stable est transitif, ergodique sur $\hat{X}$, modulo la densité du sous-groupe de $\mathbf{R} \times G$ engendré par les périodes et les déplacements dans la fibre le long des orbites périodiques. Il s'agit donc de prouver qu'on peut se déplacer dans les fibres tout en restant sur une feuille stable.

Donnons-nous un point périodique p pour ϕ_t. D'après l'hypothèse de densité, il suffit de montrer que deux ensembles ouverts ou de mesure positives qui se déduisent l'un de l'autre par l'action de $[p]^{-1} \circ \phi_{l(p)}$ peuvent être joints par une feuille stable.


x̂
x
p


ŷ
[p]
x̂
l(p)
x
p
y

Comme le flot ϕ_t est transitif ou ergodique, on sait que la plupart des points $x \in X$ ont une orbite sous l'action de ϕ_t qui passe arbitrairement proche de p. On peut utiliser la structure de produit local en p pour obtenir une nouvelle orbite qui fait un tour de plus autour de p. Sur cette orbite, le point sur la feuille stable de x est noté y, il se trouve proche de $\phi_{-l(p)}(x)$.

On peut faire le même raisonnement sur $\hat{X}$. Soit $\hat{x} \in \hat{X}$ un point dans la fibre de X. Sa trajectoire s'approche d'une pré-image de p et le recollement donne une nouvelle trajectoire asymptotique à celle de $\hat{x}$. Le point $\hat{y}$ sur cette orbite qui se trouve sur la feuille stable de $\hat{x}$ est proche de $[p]\hat{\phi}_{-l(p)}(\hat{x})$. On a donc pu relier par une feuille stable tout ensemble de mesure positive et un petit voisinage de son image par $[p]\,\phi_{-l(p)}$. Ceci implique la transitivité. Pour démontrer l'ergodicité, il faut utiliser l'hypothèse sur $\hat{\mu}$, qui assure que le recollement des orbites n'altère pas trop la mesure.

Le cas nilpotent

Lorsque le groupe n'est pas abélien, l'élément $[p]$ n'est défini qu'à conjugaison près, ce qui induit des difficultés au niveau du recollement. Le déplacement dépend maintenant de la position du point dans la fibre, ce qui ne permet pas de se déplacer comme souhaité. Lorsque le groupe est nilpotent, il est malgré tout possible de raisonner par récurrence sur la série centrale du groupe. Pour remonter le long de la série, il faut disposer à chaque étape d'orbites périodiques. Les quotients intermédiaires doivent donc être transitifs et il n'est pas possible de traiter par cette méthode le cas d'une succession de quotients dissipatifs. Voici les conditions qu'on obtient dans [C03bis] : soit $\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$ la série centrale de G ; on suppose pour tout i,

$$\overline{< \{[p] \mid p \text{ orbite périodique de } \phi_t \text{ telle que } [\tau] \in G_i\} >} = G_i/G_{i-1}$$

$$\{0\}\times G_i/G_{i-1} \subset \overline{< \{(l(\tau), [\tau]) \mid \tau \text{ orbite périodique de } \phi_t \text{ telle que } [\tau] \in G_i\} >}$$

$$\overline{< \{l(\tau) \mid \tau \text{ orbite périodique de } \phi_t\} >} = \mathbf{R}$$

Remarquons que si les périodes des points périodiques de $\hat{\phi}_t$ forment un sous-ensemble dense de $\mathbf{R}$, les conditions précédentes se réduisent à :

$$\overline{< \{[\tau] \mid [\tau] \in G_i\} >} = G_i/G_{i-1}$$

Question

La transitivité du feuilletage stable implique-t-elle son ergodicité lorsque le groupe est nilpotent ? Est-il possible d'aller au delà du cas nilpotent ?

Appendice 1

Semi-groupes de réels

On montre dans cet appendice qu'un semi-groupe de $\mathbf{R}$ est dense à l'infini si le groupe qu'il engendre est dense dans $\mathbf{R}$. Soit u, v deux nombres réels non nuls ; posons :

$$\operatorname{pgcd}(u,v) = \mathit{volume}\left(\mathbf{R}/\overline{u\mathbf{Z}+v\mathbf{Z}}\right) = \inf\ (u\mathbf{Z}+v\mathbf{Z}) \cap \mathbf{R}_+^*$$

Cette définition généralise la notion de pgcd de deux entiers, en affectant la valeur 0 au pgcd de deux réels dont le rapport est irrationnel.

Lemme
Soit E une partie de $\mathbf{R}_+^*$, qui engendre un sous-groupe dense dans $\mathbf{R}$. Pour tout $u \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $v \in E$ tel que :

$$\operatorname{pgcd}(u,v) < \ \varepsilon$$

Preuve
S'il existe un v tel que le rapport $\frac{u}{v}$ soit irrationnel, $\operatorname{pgcd}(u,v) = 0$. Si tous les rapports sont rationnels, les dénominateurs de ces rapports ne peuvent constituer une famille bornée d'entiers, car alors le sous-groupe engendré par E serait inclus dans $\frac{u}{q}\mathbf{Z}$, avec q égal au produit de tous les dénominateurs.

Lemme
Soit u, v deux réels strictement positifs. On a l'égalité :

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ d(x,\ u\mathbf{N}+v\mathbf{N}) \ = \ \tfrac{1}{2}\ \operatorname{pgcd}(u,v)$$

Preuve
Considérons le cas où u, v sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit $n \in \mathbf{Z}$, on peut trouver deux entiers a, b tels que $n = au+bv$. Quitte à diviser a par v, on peut supposer $0 \leq a < v$. Supposons $n \geq uv$. Ceci implique $n \geq au$, b est donc positif. Ceci montre que n appartient à $u\mathbf{N} + v\mathbf{N}$.

Si maintenant u, v sont deux entiers positifs, on peut se ramener au cas précédent en factorisant le pgcd. Ceci donne :

$$\mathrm{ppcm}(u,v) + \mathrm{pgcd}(u,v)\,\mathbf{N} \;\subset\; u\mathbf{N} + v\mathbf{N}$$

L'entier $\mathrm{ppcm}(u,v)$ n'est pas le meilleur possible. Cependant, l'expression précédente est homogène en u et v. Celle-ci se généralise donc à u et v rationnels, et plus généralement lorsque le rapport u/v est rationnel.

Il reste à traiter le cas où le rapport u/v est irrationnel. On peut supposer $u = 1$. Décomposons v en fraction continue, cela va permettre d'obtenir une vitesse de convergence explicite. Soit donc v un nombre positif irrationnel et p_n, q_n ses réduites. Le rapport p_n/q_n approche v au sens suivant :

$$\left|v - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Montrons que si x est un nombre réel compris entre p_n et p_{n+1}, on peut trouver deux entiers positifs a et b tels que : $\quad |a + bv - x| \,<\, 2/q_n$.
Les entiers p_n et q_n sont premiers entre eux, ce qui implique :

$$p_n + \frac{1}{q_n}\mathbf{N} \;\subset\; \mathbf{N} + \frac{p_n}{q_n}\mathbf{N}$$

Tous les réels compris entre p_n et p_{n+1} sont à distance inférieure à $\frac{1}{2q_n}$ d'un rationnel de la forme $p_n+\frac{k}{q_n}$, avec k entier compris entre 0 et $q_n p_{n+1} - q_n p_n$. Un tel entier k étant donné, on peut trouver $a,\ b \in \mathbf{N}$ tel que : $p_n + \frac{k}{q_n} = a + b\,\frac{p_n}{q_n}$.
L'entier b peut être majoré comme suit :

$$b\,\frac{p_n}{q_n} \leq p_n + \frac{k}{q_n} \leq p_{n+1}$$

Cela entraîne la majoration :

$$\left|a + bv - p_n - \frac{k}{q_n}\right| = \left|a + bv - a - b\,\frac{p_n}{q_n}\right| \;\leq\; \frac{b}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n}\,\frac{p_{n+1}}{p_n}\,\frac{q_n}{q_{n+1}}$$

Cette dernière quantité peut être majorée par $3/(2q_n)$, en vertu de l'égalité $p_{n+1}q_n = p_n q_{n+1} + (-1)^n$. On obtient la relation attendue.

Appendice 2

Isomorphisme et espace de Lebesgue

Définition d'un isomorphisme :
Deux espaces mesurés $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ *sont dits* isomorphes *si on peut trouver deux ensembles mesurables* $X_0 \subset X$*,* $Y_0 \subset Y$ *tels que* $\mu(X_0^c) = 0$*,* $\nu(Y_0^c) = 0$*, ainsi qu'une application mesurable bijective* $f : X_0 \to Y_0$*, dont la réciproque est mesurable, et qui vérifie :* $f_*\mu = \nu$*.*

Exemple :
Soit μ une mesure de probabilité borélienne non atomique, définie sur [01]. Montrons que $([0,1], \mathcal{B}([0,1], \mu)$ est isomorphe à $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. L'application f est donnée par la fonction de répartition de μ :

$$f(x) = \mu([0, x[)$$

Comme μ est sans atome, f est une application continue croissante surjective.
– Montrons que $f_*\mu = \lambda$. Soit $y \in [0,1]$ et $x = \min\{x' \in [0,1] \mid f(x') = y\}$. On a $f(x) = y$. $f_*\mu([0,y[) = \mu(f^{-1}([0, f(x)[)) = \mu([0,x[) = f(x) = y = \lambda([0,y[)$.
– f n'est en général pas injective. Construisons un borélien $X_0 \subset [0,1]$ en restriction duquel f est injective. Pour cela, remarquons que tout ouvert de $]0,1[$ est union dénombrable disjointe d'intervalles ouverts. On peut donc trouver des $a_i, b_i \in]0,1[$, $a_i < b_i$, tels que

$$]0,1[\setminus \mathit{supp}\ \mu = \coprod_{i \in \mathbf{N}}]a_i, b_i[$$

Posons $X_0 =]0,1[\setminus (\bigcup [a_i, b_i]) = \mathit{supp}\ \mu \setminus \bigcup \{a_i, b_i\} \cup \{0,1\}$ et $Y_0 = f(X_0) =]0,1[\setminus \bigcup \{f(a_i)\}$. f est alors une bijection strictement croissante entre X_0 et Y_0. Comme $f : X_0 \to Y_0$ et $f^{-1} : Y_0 \to X_0$ sont strictement croissantes, elles sont boréliennes ; comme $f_*\mu = \lambda$, elles sont mesurables.

Lemme de mesurabilité

Soit X un espace topologique, μ une mesure borélienne finie définie sur X, intérieurement régulière. Soit Y un espace métrique séparable, $\phi : X \to Y$ une application borélienne. Soit $A \subset X$ un borélien satisfaisant l'égalité :

$$\phi(A) \cap \phi(A^c) = \phi.$$

Alors $\phi(A)$ est un ensemble mesurable relativement à la mesure $\phi_*\mu$.

En particulier, si ϕ est injective, c'est un isomorphisme mesurable :

$$\phi \;:\; (X, \overline{\mathcal{B}(X)}, \mu) \xrightarrow{\sim} (Y, \overline{\mathcal{B}(Y)}, \phi_*\mu)$$

Preuve

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $K \subset A$ compact tel que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. D'après le théorème de Lusin, on peut trouver $K' \subset K$ compact tel que $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ et $\phi_{|K}$ est continue. En particulier, $\phi(K)$ est compact donc borélien, $\phi_*\mu-$mesurable.

On construit alors par récurrence des compacts K_i disjoints deux à deux, en restriction desquels ϕ est continue et dont l'union donne presque tout A : il existe $N \subset A$, $\mu(N) = 0$, tel que :

$$A = \coprod K_i \amalg N$$

On peut appliquer le même raisonnement à A^c et écrire : $A^c = \coprod K'_i \amalg N'$

Calculons la mesure de $\phi(\cup K_i)$, qui est borélien :
$\phi_*\mu(\phi(\cup K_i)) = \mu(\phi^{-1}(\phi(\cup K_i)) \geq \mu(\cup K_i) = \mu(A)$.
Le même raisonnement montre que : $\phi_*\mu(\phi(\cup K'_i)) \geq \mu(A^c)$;
Comme $\phi(\cup K_i) \subset \phi(A)$ et $\phi(\cup K'_i) \subset \phi(A^c)$, ces deux ensembles sont disjoints.

$$\phi_*\mu(\phi(\cup K_i)\amalg\phi(\cup K'_i)) = \phi_*\mu(\phi(\cup K_i)) + \phi_*\mu(\phi(\cup K'_i)) \geq \mu(A) + \mu(A^c) = \phi_*\mu(Y)$$

Par conséquent, $\phi(\cup K_i) \cup \phi(\cup K'_i)$ est de mesure totale. Son complémentaire est négligeable, il contient l'ensemble $\phi(A) \setminus \phi(\cup K_i)$, qui est donc mesurable. On en déduit que $\phi(A)$ est mesurable.

Remarques :

– On a bien sûr $\phi(X) \cap \phi(X^c) = \phi$. Ceci montre que ϕ est presque surjective : $\phi(X)$ est mesurable, $\phi_*\mu(\phi(X)^c) = 0$.

– La condition $\phi(A) \cap \phi(A^c) = \phi$ équivaut à l'égalité $\phi^{-1}(\phi(A)) = A$, ou encore à $A = \bigcup_{y \in \phi(A)} \phi^{-1}(\{y\})$. Ceci revient à dire que A est union de lignes de niveau de ϕ.

Définition d'un espace de Lebesgue
Un espace de Lebesgue est un espace mesuré isomorphe à $([0,1], \overline{\mathcal{B}([0,1])}, \lambda)$.

Théorème d'isomorphisme
Soit X un sous-ensemble borélien d'un espace métrique séparable complet, μ une mesure de probabilité borélienne non atomique définie sur X. Alors $(X, \overline{\mathcal{B}(X)}, \mu)$ est un espace de Lebesgue.

Preuve
D'après le théorème d'Oxtoby-Ulam, μ est une mesure intérieurement régulière sur X. Tout sous-ensemble d'un espace métrique séparable étant métrique séparable, on peut trouver une base dénombrable d'ouverts $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ pour la topologie de X.

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : X & \hookrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ x & \longmapsto & \{\mathbf{1}_{U_i}(x)\}_{i\in\mathbf{N}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi_2 : \{0,1\}^{\mathbf{N}} & \hookrightarrow & [0,1] \\ a_i & \longmapsto & \sum \frac{a_i}{3^i} \end{array}$$

La composée $\phi_2 \circ \phi_1$ est une injection borélienne qui établit un isomorphisme entre $(X, \overline{\mathcal{B}(X)}, \mu)$ et $([0,1], \overline{\mathcal{B}([0,1])},\ \phi_2 \circ \phi_{1*}(\mu))$.

Proposition
Soit ϕ une application mesurable entre deux espaces de Lebesgue qui préserve la mesure et A un sous-ensemble mesurable satisfaisant $\phi^{-1}(\phi(A)) = A$. Alors $\phi(A)$ est mesurable. En particulier, si ϕ est injective, ϕ est un isomorphisme.

Preuve
on se ramène à $([0,1], \overline{\mathcal{B}([0,1])}, \lambda)$ par isomorphisme et on applique le lemme.

Voici une application des résultats précédents :

Théorème de Stone-Weierstrass mesurable [C02]
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de Lebesgue, $p \in [0, \infty[$, et $f_n : X \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions μ-mesurables bornées qui sépare les points :

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\ n \in \mathbf{N} \ \textit{ tel que } \ f_n(x) \neq f_n(y).$$

Alors l'algèbre engendrée par les fonctions f_n et les constantes, est dense dans $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Preuve
L'hypothèse de séparation montre que l'application suivante est injective :

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & X & \hookrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ & x & \mapsto & \{f_i(x)\}_{i\in\mathbf{N}} \end{array}$$

Elle réalise donc un isomorphisme de $(X, \mathcal{T}, \mu)$ sur $(\phi(X), \overline{\mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})}, \phi_*\mu)$. L'ensemble $\phi(X)$ est un sous-ensemble du compact $K = \prod_{i \in \mathbf{N}}[-||f_i||, ||f_i||]$; la mesure $\phi_*\mu$ est donc supportée par K. L'application ϕ induit donc une isométrie inversible de $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ sur $L^p(K, \overline{\mathcal{B}(K)}, \phi_*\mu)$, qui fait correspondre aux fonctions f_i les projections sur les coordonnées. Ces projections sont des fonctions continues sur K qui séparent les points de K. Par le théorème de Stone-Weierstrass usuel, elle est uniformément dense dans $C(K)$, et $C(K)$ est dense dans $L^p(K, \overline{\mathcal{B}(K)}, \phi_*\mu)$.

Remarque

Les espaces de Lebesgue présentés ci-dessus sont des espaces probabilisés sans atomes. On peut aussi définir des espaces de Lebesgue σ-fini avec atomes : un tel espace est isomorphe à l'union d'un intervalle de la forme $[0, a[$, $a \in [0, +\infty]$, muni de sa mesure de Lebesgue, et d'un nombre au plus dénombrable de points de mesure strictement positive. Un tel espace est déterminé à isomorphisme près par la suite des masses des atomes et par a. Le théorème d'isomorphisme s'étend sans difficulté : *Tout borélien d'un espace métrique séparable complet, muni d'une mesure borélienne σ-finie, est un espace de Lebesgue σ-fini avec atomes.*

Appendice 3

Algèbres et partitions

Partitions mesurables

Définition d'une partition mesurable
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé. Une partition ξ de X est la donnée d'un ensemble de parties de X, disjointes deux à deux, recouvrant X. L'élément de la partition qui contient le point $x \in X$ est noté $\xi(x)$.
La partition est dite mesurable *s'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $\{B_n\}$, chacun des B_n étant union d'éléments de la partition, et tel que : $\forall\ C_1, C_2 \in \xi,\ C_1 \neq C_2,\ \exists\ n$ tel que :*

$$C_1 \subset B_n \text{ et } C_2 \subset B_n^c \qquad ou \qquad C_1 \subset B_n^c \text{ et } C_2 \subset B_n.$$

On convient d'identifier deux partitions ξ et η s'il existe un ensemble mesurable $\Omega \subset X$, de mesure pleine, tel que $\xi(x) \cap \Omega = \eta(x) \cap \Omega,\ \forall x \in X$.

Les éléments d'une partition mesurable sont parfois appelés les *atomes* de la partition. Ce sont des ensembles mesurables. Il suffit de remarquer que les ensembles B_n qui interviennent dans la définition de la partition déterminent complètement cette partition : $\xi(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$.

On dira qu'une sous σ-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}$ est *complète* si elle contient les ensembles μ-mesurables négligeables relativement à la mesure μ. Il s'agit d'une complétion relative. Toute sous σ-algèbre $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ admet une complétion unique $\bar{\mathcal{A}}$: c'est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et les ensembles μ-négligeables. De manière équivalente, c'est l'ensemble des parties $\tilde{A} \in \mathcal{T}$ pour lesquelles il existe un ensemble $\Omega \in \mathcal{T}$ de mesure pleine, et un ensemble $A \in \mathcal{A}$ satisfaisant : $\tilde{A} \cap \Omega = A \cap \Omega$.

On va maintenant associer à chaque partition une σ-algèbre, et réciproquement.

σ-algèbre associée à une partition

A la partition ξ, on associe la complétion de la σ-algèbre engendrée par les ensembles mesurables saturés par ξ :

$$\hat{\xi} = \overline{\{A \in \mathcal{T} \mid A = \cup_{x \in A} \xi(x)\}}$$

Remarquons qu'une fonction mesurable est $\hat{\xi}$-mesurable si et seulement si elle coïncide presque partout avec une fonction constante sur les atomes de la partition ; il suffit d'approcher la fonction par des combinaisons linéaires d'indicatrices pour s'en convaincre.

Le lemme suivant va permettre de mettre en bijection partitions et σ-algèbres.

Lemme
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de Lebesgue, ξ une partition mesurable de X et B_n les ensembles qui interviennent dans sa définition. Alors la σ-algèbre $\hat{\xi}$ est engendrée par les B_n et les ensembles négligeables.

Preuve
Soit $\phi : X \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ la fonction définie par $\phi(x) = \{\mathbf{1}_{B_n}(x)\}$. Remarquons que l'image réciproque d'un borélien par ϕ est mesurable. De plus, l'image réciproque de la σ-algèbre des ensembles $\phi_*\mu$-mesurables est contenue dans la σ-algèbre engendrée par les B_n et les ensembles négligeables. Il s'agit donc de montrer qu'elle contient la σ-algèbre $\{A \in \mathcal{T} \mid A = \cup_{x \in A} \xi(x)\}$.

Considérons un ensemble $A \in \mathcal{T}$; on a l'égalité $\phi^{-1}\phi(A) = \cup_{x \in A} \xi(x)$. Par conséquent, si $A = \cup_{x \in A} \xi(x)$, on obtient : $\phi^{-1}\phi(A) = A$. Le lemme de mesurabilité montre que $\phi(A)$ est $\phi_*\mu$-mesurable, ce qui termine la démonstration.

Partition associée à une σ-algèbre

On dira qu'une σ-algèbre complète $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est *séparable* si c'est la complétion d'une σ-algèbre engendrée par une famille dénombrable de parties.

Lemme
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de Lebesgue. Toute σ-algèbre complète $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est séparable.

Preuve
L'espace $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ est séparable. Toute partie d'un espace métrique séparable étant séparable, l'ensemble $\{\mathbf{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ est séparable pour la norme L^1. Soit $\{\mathbf{1}_{A_n}\}$ une partie dénombrable dense ; montrons que les A_n engendrent $\mathcal{A}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut trouver une suite n_k telle que $\mathbf{1}_{A_{n_k}}$ converge presque partout vers $\mathbf{1}_A$. La différence symétrique de A et de $\underline{\lim}\, A_{n_k}$ est donc de mesure nulle. l'ensemble A est dans la complétion de la σ-algèbre engendrée par les A_n.

Soit $\mathcal{A}$ une sous σ-algèbre complète de $\mathcal{T}$, et $\{B_n\}$ un ensemble dénombrable de parties tels que $\mathcal{A}$ soit engendré par les B_n et les ensembles négligeables. On associe à $\mathcal{A}$ la partition $\xi_{\mathcal{A}}$ dont les atomes sont donnés par la formule :

$$\xi_{\mathcal{A}}(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \quad \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$$

Cette partition est mesurable ; les B_n séparent bien les éléments de la partition.

Lemme
La définition de la partition $\xi_{\mathcal{A}}$ ne dépend pas du choix des B_n.

Preuve
Soit B_n un ensemble de parties et $< B_n >$ la σ-algèbre engendrée. On a l'égalité :

$$\bigcap_{B_n \ni x} B_n \quad \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c \;=\; \bigcap_{\substack{A \ni x \\ A \in < B_n >}} A$$

Pour voir cela, on remarque que $< B_n >_{x,y} = \{A \in < B_n > \ \mid x \in A \leftrightarrow y \in A\}$ est une σ-algèbre qui contient les ensembles B_n, si $x \in B_n \leftrightarrow y \in B_n$, $\forall n$.

Soit B_n et B'_n deux familles dénombrables dont $\mathcal{A}$ est la complétion. Pour chaque n, il existe des ensembles $A_n^1,\ A_n^2\ \in < B_n >$ tel que $A_n^1 \subset B'_n \subset A_n^2$ et $\mu(A_n^2 - A_n^1) = 0$. De la même façon, il existe des ensembles $A_n'^1,\ A_n'^2\ \in < B'_n >$ tel que $A_n'^1 \subset B_n \subset A_n'^2$ et $\mu(A_n'^2 - A_n'^1) = 0$. Les partitions associées aux B_n et aux B'_n coïncident sur $\Omega = (\cup\, A_n^2 - A_n^1)^c \cap (\cup\, A_n'^2 - A_n'^1)^c$.

Facteurs et partitions

Définition d'un facteur
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace de Lebesgue. Un facteur de* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est la donnée d'un espace de Lebesgue* $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ *et d'une application mesurable* $\phi : X \to Y$ *satisfaisant :* $\phi_* \mu = \nu$.

Le lemme de mesurabilité montre que l'application ϕ est presque surjective. On dira que ϕ est la projection associée au facteur.

A tout facteur de $(X, \mathcal{T}, \mu)$, on peut associer une partition de X par la formule $\xi = \{\phi^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$. Cette partition est mesurable ; il suffit de prendre pour ensembles B_n les images réciproques d'une famille dénombrable de parties de Y séparant les points.

Réciproquement, à toute partition mesurable de $(X, \mathcal{T}, \mu)$, on peut associer un facteur en quotientant X par la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $y \in \xi(x)$. L'espace quotient est noté X/ξ et la projection canonique $\pi : X \to X/\xi$. Cet espace est muni de la tribu $\pi_* \mathcal{T} = \{A \subset X/\xi \mid \pi^{-1} A \in \mathcal{T}\}$ et de la mesure $\pi_* \mu$.

Lemme
L'espace $(X/\xi, \pi_* \mathcal{T}, \pi_* \mu)$ *est un espace de Lebesgue.*

Preuve
On vérifie immédiatement que $\pi_* \mathcal{T}$ est complète relativement à $\pi_* \mu$. Notons par B_n les ensembles intervenant dans la définition de la partition ξ. L'application $\phi : X \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ définie par $\phi(x) = \{\mathbf{1}_{B_n}(x)\}$ passe au quotient et donne une application mesurable injective $\bar{\phi} : (X/\xi, \pi_* \mathcal{T}, \pi_* \mu) \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Le lemme de mesurabilité montre que l'image des éléments de $\pi_* \mathcal{T}$ sont des ensembles $\phi_* \mu$-mesurables. L'application $\bar{\phi}$ est donc un isomorphisme :

$$\bar{\phi} : (X/\xi, \pi_* \mathcal{T}, \pi_* \mu) \xrightarrow{\sim} (\{0,1\}^{\mathbf{N}}, \overline{\mathcal{B}(\{0,1\}^{\mathbf{N}})}, \phi_* \mu).$$

On dira que deux facteurs sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre les facteurs qui commute aux deux projections.

Considérons un facteur $\phi : (X, \mathcal{T}, \mu) \to (Y, \mathcal{S}, \nu)$ et notons ξ la partition associée. Remarquons que l'application ϕ passe au quotient pour donner une injection mesurable de $(X/\xi, \pi_* \mathcal{T}, \pi_* \mu)$ dans $(Y, \mathcal{S}, \nu)$. Comme ces deux espaces sont des espaces de Lebesgue, cette injection est un isomorphisme.

On en déduit qu'il y a une bijection entre les facteurs et les partitions mesurables.

σ-algèbres et algèbres de fonctions

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé ; on note $L^0(X, \mathcal{T}, \mu)$ l'algèbre des fonctions mesurables à valeurs réelles. La convergence en probabilité fait de cet espace un espace métrique complet.

Il existe une bijection entre sous σ-algèbres complètes de $\mathcal{T}$ et sous-algèbres fermées de $L^0(X, \mathcal{T}, \mu)$ Cette bijection est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & L^0(X, \mathcal{A}, \mu) \\ \{A \in \mathcal{T} \mid \mathbf{1}_A \in \mathbf{A}^0\} & \longleftarrow & \mathbf{A}^0 \end{array}$$

L'égalité : $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} \mid \mathbf{1}_A \in L^0(X, \mathcal{A}, \mu)\}$ se démontre en approchant les fonctions $\mathcal{A}$-mesurables par des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'éléments de $\mathcal{A}$.

L'égalité : $\mathbf{A}^0 = L^0(X, \{A \mid \mathbf{1}_A \in \mathbf{A}^0\}, \mu)$ revient à montrer que si $f \in \mathbf{A}^0$, alors $\mathbf{1}_{f^{-1}(I)} \in \mathbf{A}^0$ pour tout intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$. Ceci provient du fait suivant, laissé en exercice : on peut trouver une suite de polynômes P_n définis sur $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers $\mathbf{1}_I$.

Correspondance de Rokhlin

On déduit des lemmes précédents :

Théorème
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de Lebesgue. Il existe une bijection entre :
– *les partitions mesurables de X ;*
– *les sous σ-algèbres complètes de $\mathcal{T}$;*
– *les sous-algèbres fermées de $L^0(X, \mathcal{T}, \mu)$;*
– *les facteurs de $(X, \mathcal{T}, \mu)$, à isomorphisme près.*

Bibliographie

[Aa96] J. Aaronson. An introduction to infinite ergodic theory, *Mathematical Surveys and Monographs* vol. **50** ed. AMS.

[AS87] T. Adachi, T. Sunada. Homology of closed geodesics in a negatively curved manifold. *J. Differ. Geom.* **26**, 81-99 (1987).

[An67] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov Inst. Math* **90**, (1967).

[AnSi67] D. V. Anosov, Y. G. Sinai. Some smooth ergodic systems, *Russian Math. Surveys* **22**, (1967), 103-167.

[Ar76] V. I. Arnold. Les méthodes mathématiques de la mécanique classique Traduit du russe par Djilali éditions Mir, Moscow, 1976. 470 pp.

[B02] M. Babillot. On the mixing property for hyperbolic systems. *Israel J. Math.* **129** (2002), 61–76.

[BL98] M. Babillot, F. Ledrappier. Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), n^o 1, 17–39.

[BL98] M. Babillot, F. Ledrappier. Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers. Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996), 1–32, *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, **14**, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1998.

[BGS85] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder. Manifolds of non-positive curvature, *Progress in Math.* **61**, Birkhauser, Boston, (1985).

[Bi99] P. Billingsley. Convergence of probability measures. 2nd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester : Wiley. x, 277 p. (1999).

[BH60] J. R. Blum, D. L. Hanson. On the mean ergodic theorem for subsequences, *Bull. A. M. S.* (1960), 308-311.

[Bow95] B. Bowditch. Geometrical finiteness with variable curvature, *Duke math. J.* **77** n^{o}1, (1995), 229-274.

[Bo72] R. Bowen. The equidistribution of closed geodesics, *Am. J. Math.* **94** (1972), 413-423.

[Bo73] R. Bowen. Symbolic dynamics for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.* **95**, (1973), 429-460.

[BM77] R. Bowen, B. Marcus. Unique ergodicity for horocycle foliations, *Israel J. math.* **13**, (1977), 43-67.

[Ba82] W. Ballmann. Axial isometries of manifolds of non-positive curvature, *Mathematische Annalen* **259**, (1982), 131-144.

[BBE85] W. Ballmann ; M. Brin ; P. Eberlein. Structure of manifolds of nonpositive curvature. I. *Ann. of Math.* (2) **122** (1985), n^{o}1, 171–203.

[C01] Y. Coudène. Cocycles and stable foliations of Axiom A flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), n^{o}3, 767–775.

[C02] Y. Coudène. Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass. *Gaz. Math.* **91** (2002), 10–17.

[C03] Y. Coudène. Gibbs measures on negatively curved manifolds. *J. Dynam. Control Systems* **9** (2003), n^{o}1, 89–101.

[C03bis] Y. Coudène. Hyperbolic systems on nilpotent covers. *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), n^{o}2, 267–287.

[C04] Y. Coudène. Topological dynamics and local product structure. *J. London Math. Soc.* (2) **69** (2004), n^{o}2, 441–456.

[C05] Y. Coudène. A note on horospherical points for flows with hyperbolic structure. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **25** (2005), n^{o}3, 793–798.

[C06] Y. Coudène. Pictures of hyperbolic dynamical systems. *Notices Amer. Math. Soc.* **53** (2006), n^{o}1, 8–13.

[C07] Y. Coudène. On invariant distributions and mixing. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), n^{o}1, 109–112.

[C07bis] Y. Coudène. The Hopf argument. *J. Mod. Dyn.* **1** (2007), n^{o}1, 147–153.

[C08] Y. Coudène. A short proof of the ergodicity of horocycle flows *Contemporary Math* A paraître.

[CS08bis] Y. Coudène, B. Schapira, Generic measures for hyperbolic systems on non-compact spaces *Preprint*.

[Da00] F. Dal'bo. Topologie du feuilletage fortement stable, *Annales de l'institut Fourier* **50** (2000), n^{o}3, 981–993.

[DOP00] F. Dal'bo, J. P. Otal, M. Peigné. Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis. *Israel J. Math.* **118** (2000), 109–124.

[D78] S. G. Dani. Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces. *Invent. Math.* **47** (1978), n^{o}2, 101–138.

[Eb72] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds 1, *Ann. of Math. II Ser.* **95**,492-510 (1972).

[Eb73] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds 2, *Trans. AMS* **178** (1973).

[Eb96] P. Eberlein. Geometry of nonpositively curved manifolds. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996. vii+449 pp.

[EP78] Ellis, Robert ; Perrizo, William Unique ergodicity of flows on homogeneous spaces. *Israel J. Math.* **29** (1978), n°2-3, 276–284.

[FM77] J. Feldman, C. M. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and Von Neumann algebras I, *Trans. A.M.S* **234**, t2, (1977), 289-307.

[F73] H. Furstenberg. The unique ergodicity of the horocycle flow, in *Recent advances in topological dynamics*, Springer Lectures Notes in Math. **318** (1973), 95-115.

[F] H. Furstenberg. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. xi+203 pp.

[Gu89] Y. Guivarc'h. Propriétés ergodiques en mesure infinie de certains systèmes dynamiques fibrées, *Erg. Th. Dyn. Syst.* **9** n3, (1989), 433-453.

[Had98] J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques (1898) dans Oeuvres. Tome 2, 729-775, Paris : Editions du Centre National de la Recherche Scientifique. 2296 p. (1968).

[Hed36] G. A. Hedlund. Fuchsian groups and transitive horocycles, *Duke Math. J.* , **2**, (1936), 530-542.

[HPS77] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub. Invariant manifolds, *Lectures Notes in Math.* **583**, Springer Verlag, (1977).

[Ho36] E. Hopf. Fuchsian groups and ergodic theory, *Trans. A.M.S.* **39**, (1936), 299-314.

[OP04] J. P. Otal, M. Peigné. Principe variationnel et groupes kleiniens. (French) *Duke Mathematical Journal* **125** n°1 (2004) 15–44

[K94] V. A. Kaimanovich, Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **455** (1994), 57–103.

[KH95] A. Katok, B. Hasselblatt, Introduction to the theory of dynamical systems, *Cambridge U. Press* **54** encyclopedia of mathematics and applications (1995).

[Kn02] G. Knieper. Hyperbolic dynamics and Riemannian geometry. Handbook of dynamical systems, Vol. 1A, 453–545, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Kr95] Krengel, U. Ergodic theorems. With a supplement by Antoine Brunel. de Gruyter Studies in Mathematics, 6.

[KrSu69] U. Krengel, L. Sucheston. On mixing in infinite measure spaces. *S. Warsch. u. v. Geb.* **13** (1969), 150-164.

[Led96] F. Ledrappier. Invariant measures for the stable foliation on abelian covers, *Proc. Steklov Inst. Math.* **216**, (1997), 322-335 .

[LY85] F. Ledrappier, L. S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Ann. of Math.* (2) **122** (1985), n°3, 509–539.

[Liv72] A. Livsic. Cohomology of dynamical systems, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.* **6**, (1972), 1278-1301.

[M75] B. Marcus. Unique ergodicity of the horocycle flow : variable negative curvature case, *Israel J. Math.* **21**, (1975), 133-144.

[M78] B. Marcus. The horocycle flow is mixing of all degrees. *Invent. Math.* **46** (1978), n°3, 201–209.

[Mar70] G. Margulis, Certain measures associated with U-flows on compact manifolds. *Funct. Anal. Appl.* **4**, 55-67 (1970) ; translation from *Funkts. Anal. Prilozh.* **4**, n°1, 62-76 (1970).

[Pa76] S. J. Patterson. The limit set of a fuchsian group, *Acta. Math.* **B6** (1976), 241-273.

[Po98] M. Pollicott. $\mathbf{Z^d}$-covers of horosphere foliations. *Discrete Contin. Dynam. Systems* **6** (2000), n°1, 147–154.

[PS00] M. Pollicott, R. Sharp. Asymptotic expansions for closed orbits in homology classes. *Geom. Dedicata* **87** (2001), n°1-3, 123–160.

[R91] M. Ratner. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows. *Duke Math. J.* **63** (1991), n°1, 235–280.

[RN90] Riesz, F. ; Sz.-Nagy, B. Functional analysis. Translated from the second French edition by Leo F. Boron. Reprint of the 1955 original. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1990. xii+504 pp.

[Ro52] V. A. Rokhlin. On the fundamental ideas of measure theory. *Amer. Math. Soc. Translation* 1952, (1952). n°71, 55 pp.

[Schm77] K. Schmidt. Lectures on cocycles of ergodic transformation groups, *MacMillan Lectures in Math.* **1**, Parthasathy, Narasimhan Eds. (1977).

[Shu87] M. Shub. Global stability of dynamical systems. With the collab. of Albert Fathi and Remi Langevin. Transl. du francais par Joseph Christy. *New York etc. : Springer-Verlag.* XII, 150p. (1987).

[Si72] K. Sigmund. On the space of invariant measures for hyperbolic flows, *Amer. J. Math.* **94** (1972), 31–37.

[Sm67] S. Smale. Differentiable dynamical systems, *Bull. AMS* **73**,(1967), 747-817.

[Su79] D. Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publ. Math. IHES* **50**,(1979), 491-512.

[Su80] D. Sullivan. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary group of hyperbolic motions, in *Riemann Surfaces and Related Topics, Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, Princeton University Press (1980),465-496.

[Va63] V. S. Varadarajan Groups of Automorphisms of Borel Spaces *Trans. A. M. S.* **109**, 1963, 191-220.

[Ve77] W. A. Veech, Unique ergodicity of horospherical flows. *Am. J. Math.* **99**, 827-859 (1977)

[Z04] Zweimüller, R. Hopf's ratio ergodic theorem by inducing. *Colloq. Math.* **101** (2004), n^{o}2, 289–292.