Cours d'intégration et de théorie de Fourier

Yves Coudène

24 novembre 2017

Table des matières

Introduction

Ces notes proviennent d'un cours de licence troisième année à l'université de Brest en 2016. Le cours était composé de dix séances de trois heures et portait sur l'intégrale de Lebesgue et la théorie de Fourier.

Notations

Les ensembles des nombres entiers, entiers relatifs, rationnels, réels et complexes sont notés respectivement $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

$\mathbf{1}_A$	fonction indicatrice de A
$B(x,r)$	boule ouverte de centre x de rayon r
C^∞	ensemble des fonctions indéfiniment différentiables
δ_ω	mesure de Dirac au point ω
L^p	espace des classes de fonctions L^p
$\overline{\lim}$	limite supérieure
$\underline{\lim}$	limite inférieure
μ	mesure
$\mathbf{N}^*$	nombres entiers non nuls
$\circ$	composition
$\emptyset$	ensemble vide
$\mu \otimes \nu$	produit des mesures μ et ν
$p.p.$	presque partout
$\mathcal{T}$	tribu
$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$	produit des tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$
$\langle f, g \rangle$	produit scalaire dans L^2
$\|f\|_p$	norme L^p de f

Chapitre 1

Théorie de la mesure

Ce chapitre a deux objectifs : d'une part introduire le concept abstrait d'espace mesuré qui va servir de base à la théorie de l'intégrale de Lebesgue, d'autre part, montrer comment les espaces topologiques usuels comme $\mathbf{R}^d$ possèdent une structure naturelle d'espace mesuré qui permet de généraliser les concepts de longueur, d'aire et de volume.

1.1 Tribus

Définition 1 *Soit X un ensemble. Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X est appelé une tribu ou σ-algèbre s'il vérifie les propriétés suivantes :*
- $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- *pour tout $A \in \mathcal{T}$, $A^c \in \mathcal{T}$,*
- *pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i \in \mathcal{T}$.*

On a alors $X \in \mathcal{T}$ car X est le complémentaire de l'ensemble vide et $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i \in \mathcal{T}$ en vertu de la relation

$$\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i = \Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i^c\Big)^c.$$

La plus grande tribu de parties de X est l'ensemble de toutes les parties de X, noté $\mathcal{P}(X)$. La plus petite ne contient que deux éléments, l'ensemble vide et X lui-même.

Proposition 1 *Soit X un ensemble et $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ une famille de tribus de parties de X. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu.*

Preuve
Pour tout $i \in I$, nous avons $\emptyset \in \mathcal{T}_i$ car $\mathcal{T}_i$ est une tribu. Par conséquent $\emptyset \in \cap\mathcal{T}_i$.

De même, si A appartient à $\mathcal{T}_i$ pour tout i, il en va de même de A^c et A^c est dans l'intersection des $\mathcal{T}_i$.

Soit $(A_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments appartenant à $\cap\mathcal{T}_i$. Les A_j appartiennent à tous les $\mathcal{T}_i$, il en va de même de l'union $\cup A_j$ car les $\mathcal{T}_i$ sont des tribus. On a donc $\cup A_j \subset \cap\mathcal{T}_i$. L'intersection des tribus $\mathcal{T}_i$ est bien invariante par union dénombrable et passage au complémentaire.

Définition 2 *La tribu engendrée par un ensemble quelconque de parties de X est égale à l'intersection de toutes les tribus qui contiennent ces parties.*

Soit X un espace topologique. La tribu des boréliens *de X est la tribu engendrée par les sous-ensembles ouverts de X. On la note $\mathcal{B}(X)$.*

La tribu engendrée par un ensemble de parties est donc la plus petite tribu contenant ces parties. Notons que tous les ouverts de X sont boréliens, tout comme les intersections dénombrables d'ouverts de X, ainsi que les fermés, car leur complémentaire est ouvert.

Proposition 2 *La tribu des boréliens de $\mathbf{R}$ est engendrée par les intervalles ouverts. Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, la tribu des boréliens de $\mathbf{R}^d$ est engendrée par les boules ouvertes.*

Preuve
Il suffit de vérifier que tout ouvert U de $\mathbf{R}^d$ peut s'écrire comme union dénombrable de boules ouvertes. Montrons que U est union des boules centrées sur les points de coordonnées rationnelles et de rayon rationnel contenues dans U :

$$U = \bigcup_{\substack{(x,r)\in\mathbf{Q}^d\times\mathbf{Q}_+^* \\ tels\ que\ B(x,r)\subset U}} B(x,r).$$

Comme U est ouvert, nous savons qu'il existe une boule ouverte $B(y,s)$, $s > 0$, contenue dans U. Soit $r \in \mathbf{Q}_+^*$ inférieur à $s/2$ et x un point à coordonnées rationnelles dans $B(y,r)$. Nous avons alors

$$y \in B(x,r) \subset B(y,s) \subset U.$$

Tout point $y \in U$ est contenu dans une boule $B(x,r)$ incluse dans U avec (x,r) dans $\mathbf{Q}^d \times \mathbf{Q}_+^*$. La proposition est démontrée.

La preuve précédente fonctionne dans tout espace métrique qui admet un sous-ensemble dénombrable dense (ici $\mathbf{Q}^d$). Un tel espace métrique est dit *séparable.*

1.2 Mesures

Définition 3 *Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X. Une mesure μ définie sur $\mathcal{T}$ est une fonction $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu\Big(\coprod_{i\in\mathbf{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(A_i)$.

Cette dernière propriété est appelée σ-additivité. Elle implique l'additivité finie : pour tout $n \in \mathbf{N}$ et A_0, ..., A_n dans $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux,

$$\mu\Big(\coprod_{i=0}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i).$$

De fait, il suffit de poser $A_i = \emptyset$ pour $i > n$. On a alors

$$\coprod_{i\in\mathbf{N}} A_i = \coprod_{i=0}^{n} A_i, \quad \sum_{0}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{0}^{n} \mu(A_i).$$

Exemples
Soit X un ensemble, $x_0 \in X$. La *mesure de Dirac* au point x_0 est la mesure définie sur la tribu $\mathcal{P}(X)$ par

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour tout $A \subset X$.

Un autre exemple est donné par la *mesure de comptage*, qui associe à un sous-ensemble quelconque $A \subset X$ son nombre d'élément si A est fini et $+\infty$ sinon.

La proposition suivante est due à Henri Lebesgue (1901).

Théorème 1 *Il existe une unique mesure sur la tribu des boréliens de $\mathbf{R}$ qui associe à tout intervalle sa longueur. Elle est notée λ ou $\lambda_{\mathbf{R}}$, on l'appelle la* mesure de Lebesgue *de la droite réelle.*

En d'autres termes, il existe une unique mesure $\lambda : \mathcal{B}(\mathbf{R}) \to [0, +\infty]$ satisfaisant pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \leq b$,

$$\lambda([a, b]) = b - a.$$

Ce théorème montre qu'il existe une mesure qui étend la notion de longueur à l'ensemble des boréliens de $\mathbf{R}$. La démonstration sera faite au chapitre 4.

Il existe également pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ une mesure sur $\mathbf{R}^d$ qui étend les notions usuelles d'aire et de volume d-dimensionnel. On l'appelle encore mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$.

Proposition 3 *Il existe une unique mesure* $\lambda_{\mathbf{R}^d} : \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \to [0, +\infty]$ *satisfaisant*

$$\lambda_{\mathbf{R}^d}\Big(\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i]\Big) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$$

pour tout $a_1, ..., a_d$ *et* $b_1, ..., b_d$ *dans* $\mathbf{R}$ *tels que* $a_1 \leq b_1,\ ...,\ a_d \leq b_d$.

La mesure de Lebesgue des singletons est égale à 0 : $\lambda(\{x\}) = \lambda(\prod[x_i, x_i]) = 0$ pour tout $x = (x_1, ...x_d) \in \mathbf{R}^d$. On dit que cette mesure est *non-atomique.* Pour une telle mesure, tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle, car ils sont union dénombrable disjointe de singletons.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle important en théorie de la mesure, ce qui amène à la définition suivante.

Définition 4 *On dit qu'un ensemble est négligeable s'il est de mesure nulle.*

Nous pouvons maintenant introduire la notion d'espace mesuré.

Définition 5 *Un* espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est la donnée*

- *d'un ensemble* X*,*
- *d'une tribu* $\mathcal{T}$ *de parties de* X*,*
- *d'une mesure* μ *définie sur cette tribu.*

La mesure μ est dite *finie* si $\mu(X) < \infty$. On parle de *mesure de probabilité* ou d'*espace probabilisé* quand $\mu(X) = 1$. On parle de *mesure borélienne* lorsqu'elle est définie sur la tribu des boréliens d'un espace topologique.

1.3 Propriétés des mesures

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Voici quelques propriétés satisfaites par μ.

Monotonie : *soit* $A, B \in \mathcal{T}$*. Si* $A \subset B$*, alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$*.*

Pour démontrer cette propriété, on note que B peut s'écrire $B = A \coprod (B \setminus A)$ et on applique la propriété d'additivité :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Remarquons que si de plus $\mu(A)$ est fini, nous avons aussi

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Attention, cette formule n'a plus de sens lorsque $\mu(A)$ vaut $+\infty$ car l'expression à droite de l'égalité vaut $\infty - \infty$. Il n'est possible de soustraire une quantité aux deux termes d'une égalité que si cette quantité est finie.

Sous-additivité : *soit* $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{T}$. *Alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\Big) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\mu(A_i).$$

Montrons cette inégalité en posant $A'_0 = A_0$ et $A'_k = A_k \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i\Big)$. On a alors

$$\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i = \coprod_{i\in\mathbf{N}} A'_i, \qquad A'_i \subset A_i,$$

si bien que

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\Big) = \mu\Big(\coprod_{i\in\mathbf{N}} A'_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu(A'_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\mu(A_i).$$

Comme application immédiate, nous en déduisons qu'une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Convergence croissante : *soit* $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{T}$ *croissante pour l'inclusion :* $A_i \subset A_{i+1}$ *pour tout* i. *Alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty}\mu(A_i).$$

Pour montrer cette convergence, on procède comme plus haut à l'aide des ensembles A'_i.

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu(A'_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N}\mu(A'_i) = \lim_{N\to\infty}\mu\Big(\coprod_{i=0}^{N} A'_i\Big) = \mu(A_N),$$

cette dernière égalité découlant de la croissance des A_i : $\coprod_{i=0}^{N} A'_i = \bigcup_{i=0}^{N} A_i = A_N$.

Convergence décroissante : *soit* $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{T}$ *décroissante pour l'inclusion :* $A_{i+1} \subset A_i$ *pour tout* i. *On suppose de plus que* A_0 *est de mesure finie :* $\mu(A_0) < \infty$. *Alors*

$$\mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty}\mu(A_i).$$

On se ramène à la convergence croissante en posant $B_i = A_0 \setminus A_i$. La suite B_i est croissante et comme A_0 est de mesure finie,

$$\mu(B_i) = \mu(A_0) - \mu(A_i)$$

et cette suite converge vers $\mu(\cup_{i\in\mathbf{N}} B_i)$. L'union des B_i vaut $A_0 \setminus \bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i$, la limite de la suite vaut donc $\mu(A_0) - \mu(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i)$ et le résultat est démontré.

Illustrons les propriétés précédentes par un résultat de convergence sur les séries.

Définition 6 *On dit qu'une propriété portant sur les points d'un espace mesuré est vraie presque partout si l'ensemble des points pour lesquels cette propriété est satisfaite est de complémentaire négligeable.*

Proposition 4 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ satisfaisant*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

Alors presque tout $x \in X$ n'appartient qu'à un nombre fini de A_k.

Preuve
Il s'agit de montrer que l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de A_k est de mesure nulle. Un point $x \in X$ appartient à une infinité de A_k si on peut trouver pour tout entier n un entier $k \geq n$ tel que x appartienne à A_k. Traduisons cette propriété en termes ensemblistes.

$$\{x \in X \mid \forall n \in \mathbf{N},\ \exists\, k \geq n \text{ tel que } \ x \in A_k\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Big(\bigcup_{k\geq n} A_k \Big).$$

Par sous-additivité,

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k \Big) \ \leq \ \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La série tend vers 0 quand n tend vers l'infini car c'est le reste d'une série convergente. Posons $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$. Les ensembles B_n forment une suite de parties de X décroissante pour l'inclusion. Tous ces ensembles sont de mesure finie. Par convergence décroissante, nous avons donc

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n \Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

La proposition est démontrée.

La proposition précédente illustre une méthode générale. Pour démontrer qu'une propriété est vraie presque partout, on traduit cette propriété en termes ensemblistes et on estime la mesure des ensembles obtenus à l'aide des inégalités vues plus haut.

Corollaire 1 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, (c_k) une suite de nombres complexes et (A_k) une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ satisfaisant*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

Alors la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}} c_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$ converge pour presque tout $x \in X$.

De fait, pour presque tout $x \in X$, nous avons vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes de cette série qui sont non nuls.

1.4 Fonctions mesurables

Nous définissons une classe de fonctions qui généralise celle des fonctions continues. Ces fonctions sont celles que nous allons pouvoir intégrer relativement à une mesure.

Définition 7 *Soit X et Y deux ensembles, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X, $\mathcal{U}$ une tribu de parties de Y. Une fonction $f : X \to Y$ est dite* mesurable *relativement à ces tribus si l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{T}$:*

$$\forall\ B \in \mathcal{U}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{T}.$$

Remarquons que la composée de deux fonctions mesurables f, g est mesurable en vertu de la relation $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Pour démontrer la mesurabilité, on peut se contenter de regarder les images réciproques d'une famille de parties qui engendre la tribu $\mathcal{U}$.

Lemme 1 *Soit X, Y deux ensembles, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ des tribus de parties de X et Y. On se donne une famille $\mathcal{C}$ de parties de Y qui engendre $\mathcal{U}$ et $f : X \to Y$. Alors f est mesurable si et seulement si*

$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(C) \in \mathcal{T}.$$

Preuve
Posons $\mathcal{U}' = \{B \in \mathcal{U} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$, montrons que ce sous-ensemble de $\mathcal{U}$ est une tribu.

- $\emptyset \in \mathcal{U}'$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Soit $B \in \mathcal{U}'$. Nous avons $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c \in \mathcal{T}$, donc $B^c \in \mathcal{U}'$.
- Soit $B_i \in \mathcal{U}'$, $i \in \mathbf{N}$. $f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i) = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}$. Donc $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i \in \mathcal{U}$.

Par hypothèse, $\mathcal{C}$ est incluse dans la tribu $\mathcal{U}'$. Comme $\mathcal{U}$ est la plus petite tribu contenant les éléments de $\mathcal{C}$, elle est incluse dans $\mathcal{U}'$ si bien que $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

La preuve précédente illustre une méthode générale : pour démontrer qu'une propriété vraie pour un ensemble de parties s'étend à la tribu engendrée par cet ensemble, il suffit de montrer que l'ensemble des parties satisfaisant cette propriété est une tribu.

Lorsque X et Y sont des espaces topologiques, on peut considérer la tribu des boréliens sur chacun de ces espaces. Rappelons que c'est la tribu engendrée par les sous-ensembles ouverts de l'espace.

Définition 8 *Soit X et Y deux espaces topologiques, une fonction $f : X \to Y$ est dite* borélienne *si elle est mesurable relativement aux tribus boréliennes de X et de Y.*

D'après le lemme précédent, pour montrer qu'une fonction est borélienne, il suffit de vérifier que les images réciproques des ouverts de Y sont des boréliens de X. Comme l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit X et Y deux espaces topologiques. Toute fonction continue définie de X dans Y est borélienne.*

On s'intéresse maintenant aux fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un espace mesuré quelconque.

Définition 9 *Soit f une fonction définie sur X à valeurs dans $[0,\infty]$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}^d$. Une telle fonction est dite $\mathcal{T}$-*mesurable*, ou juste mesurable s'il n'y a pas d'ambiguité concernant la tribu considérée sur X, si les images réciproques des boréliens de l'espace d'arrivée sont dans $\mathcal{T}$.*

Nous avons vu au premier chapitre que la tribu des boréliens de $\mathbf{R}^d$ est engendrée par les boules ouvertes. On en déduit qu'une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ est mesurable si et seulement si les images réciproques des boules ouvertes sont dans $\mathcal{T}$. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$, il suffit de vérifier que les images réciproques des intervalles sont dans $\mathcal{T}$. On peut même se restreindre aux images réciproques des intervalles de la forme $[a,\infty[$ (ou $]a,\infty[$) car tous les intervalles de $\mathbf{R}$ s'expriment à partir de ceux-là comme suit.

$$]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \left[a+\frac{1}{n},\infty\right[\ \setminus\ [b,\infty[, \quad]a,b[=]a,\infty[\setminus \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \left]b-\frac{1}{n},\infty\right[.$$

La notion de mesurabilité est très souple, elle est préservée par la plupart des opérations usuelles sur les fonctions. En particulier, une limite simple de fonctions mesurables est mesurable. Cette propriété, qui n'est pas vraie pour les fonctions continues, permettra de passer aisément à la limite dans les intégrales.

Proposition 6 *On se place sur un espace mesuré $(X,\mathcal{T},\mu)$.*
Soit $f,g : X \to \mathbf{R}$ des fonctions mesurables et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\lambda f+g, \quad fg, \quad min(f,g), \quad max(f,g) \quad \textit{sont mesurables.}$$

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables définies de X dans $[-\infty,\infty]$. Alors

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} f_n \ \textit{et} \ \sup_{n\in\mathbf{N}} f_n \quad \textit{sont mesurables.}$$

L'ensemble des points où la suite (f_n) converge est dans $\mathcal{T}$:

$$\{x\in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \ \textit{est une suite convergente}\} \in \mathcal{T}.$$

Si la suite (f_n) converge simplement, sa limite est mesurable.

Preuve

• Commençons par montrer que la fonction $x \mapsto (f(x), g(x))$ définie de X dans $\mathbf{R}^2$ est mesurable si f et g sont mesurables. Pour cela, montrons que l'image réciproque des boules ouvertes de $\mathbf{R}^2$ pour la norme $||(y_1, y_2)||_\infty = \max(|y_1|, |y_2|)$ sont mesurables. Ces boules sont de la forme

$$B((y_1, y_2), r) =]y_1 - r, y_1 + r[\times]y_2 - r, y_2 + r[$$

avec $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ et $r \in \mathbf{R}_+$, ce qui donne

$$(f, g)^{-1}\Big(B((y_1, y_2), r)\Big) = f^{-1}(\,]y_1 - r, y_1 + r[\,) \cap g^{-1}(\,]y_2 - r, y_2 + r[\,) \in \mathcal{T}.$$

Les fonctions $(x, y) \mapsto \lambda x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ définies de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ sont continues donc mesurables. On obtient encore des fonctions mesurables en les composant avec $x \mapsto (f(x), g(x))$.

• Posons $F(x) = \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\} \in [-\infty, \infty]$. Soit $a \in \mathbf{R}$, remarquons que $F(x)$ est supérieur ou égal à a si et seulement si il en va de même pour tous les $f_n(x)$.

$$F^{-1}([a, \infty[) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} f_n^{-1}([a, \infty[) \in \mathcal{T}.$$

On en déduit que F est mesurable. On procède de manière similaire pour $\sup f_n$.

• La suite $(f_n(x))$ converge si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire si

$$\forall\, K \in \mathbf{N}^*,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall\, m, n \geq N, \quad |f_m(x) - f_n(x)| < 1/K.$$

$$\begin{aligned}
\{x \mid (f_n(x)) \text{ converge}\} &= \bigcap_{K \in \mathbf{N}^*} \bigcup_{N \in \mathbf{N}} \bigcap_{m,n \geq N} \{x \in X \mid |f_m(x) - f_n(x)| < 1/K\} \\
&= \bigcap_{K \in \mathbf{N}^*} \bigcup_{N \in \mathbf{N}} \bigcap_{m,n \geq N} \Psi_{m,n}^{-1}(\,]-1/K, 1/K[\,) \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

car $\Psi_{m,n} = f_m - f_n$ est mesurable.

• Enfin, si la suite (f_n) converge vers f, nous avons

$$\begin{aligned}
f^{-1}(]a, \infty[) &= \{x \in X \mid \forall\, N \in \mathbf{N},\ \exists\, n \geq N,\ f_n(x) > a\} \\
&= \bigcap_{N \in \mathbf{N}} \bigcup_{n \geq N} f_n^{-1}(\,]a, \infty[\,) \in \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

La proposition est démontrée.

1.5 Complément : mesure et topologie

Mêmes si les fonctions boréliennes ne sont pas continues en général, on va montrer qu'elles possèdent une certaine régularité lorsque l'espace sous-jacent est complet.

Définition 10 *Soit X un espace topologique et μ une mesure définie sur la tribu des boréliens de X. La mesure μ est dite* intérieurement régulière *si pour tout borélien $A \subset X$,* $\sup\{\mu(K) \mid K \textit{ compact inclu dans } A\} = \mu(A)$

Théorème 2 (Oxtoby-Ulam) *Toute mesure borélienne finie, définie sur un espace métrique séparable complet, est intérieurement régulière.*

Preuve
Soit $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite dense dans X et $n \in \mathbf{N}^*$. La famille de boules fermées $\{\overline{B}(x_i, 1/n)\}_{i\in\mathbf{N}}$ recouvre X si bien qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ dépendant de n tel que

$$\mu\Big(X \setminus \bigcup_{i=0}^{N} \overline{B}(x_i, 1/n)\Big) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Soit $K' = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{i=0}^{N} \overline{B}(x_i, 1/n)$. Cet ensemble est fermé, précompact donc compact. On a de plus l'inégalité : $\mu(K'^c) < \varepsilon$. Soit maintenant $A \subset X$ un borélien. Par régularité extérieure, on peut trouver $F \subset A$ fermé tel que $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$. Posons $K = K' \cap F \subset A$. Cet ensemble est compact et $\mu(A \setminus K) < 2\varepsilon$ comme souhaité.

Théorème 3 (Lusin) *Soit X un espace topologique séparé, μ une mesure finie intérieurement régulière, Y un espace métrique séparable et $f : X \to Y$ une fonction borélienne. Alors pour tout $A \subset X$ borélien, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $K \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ et $f_{|K}$ est continue.*

Preuve
Fixons $n \in \mathbf{N}^*$. Soit E_i une famille dénombrable disjointe de boréliens de diamètre plus petit que $2/n$ qui recouvre Y. On peut construire les E_i par récurrence à partir d'une suite $\{y_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ dense dans Y en posant : $E_i = B(y_i, 1/n) \setminus \cap_{j<i} E_j$.
Par régularité, pour tout i, on peut trouver un borélien A'_i et un compact K_i tel que

$$K_i \subset A'_i \subset A \cap f^{-1}(E_i), \quad \mu(A \cap f^{-1}(E_i) \setminus K_i) < \varepsilon/2^{i+n}.$$

On a alors $\mu(A \setminus \cup K_i) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ si bien qu'il existe $N \in \mathbf{N}$, dépendant de n, tel que :

$$\mu\Big(A \setminus \bigcup_{i=0}^{N} K_i\Big) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Définissons une fonction f_n sur $K'_n = \cup_0^N K_i$ en posant $f(x) = y_i$ pour tout $x \in K_i$. Les compacts K_i sont disjoints, la fonction f_n est donc continue. Elle vérifie de plus $d(f_n(x), f(x)) < 1/n$ sur K'_n. La suite f_n converge vers f uniformément sur $\cap_n K'_n$, ce qui montre que f est continue sur ce compact. Ceci termine la preuve.

1.6 Complément : un ensemble non borélien

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère la translation $t_\alpha(x) = x+\alpha$ et on note le translaté d'un ensemble $E \subset \mathbf{R}$ par $t_\alpha(E) = \alpha + E$. Remarquons que la mesure de Lebesgue est invariante par translation : pour tout borélien $A \subset \mathbf{R}$, $\lambda(A) = \lambda(\alpha + A)$. De fait, on vérifie sans difficulté que la fonction $A \mapsto \lambda(\alpha + A)$ est une mesure qui associe à un intervalle sa longueur. Cette propriété caractérise la mesure λ uniquement.

La proposition suivante *a priori* surprenante est de nature purement ensembliste. Elle va permettre d'exhiber un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ non borélien.

Proposition 7 *Il existe des ensembles $E_i \subset [0,1[$, $i \in \mathbf{Z}$, disjoints deux à deux et des réels $a_i \in [0,2[$ tels que*

$$[0,1[= \coprod_{i\in\mathbf{Z}} E_i, \quad [0,2[= \coprod_{i\in\mathbf{Z}} a_i + E_i.$$

En conséquence, il ne peut pas y avoir de mesure μ satisfaisant $0 < \mu([0,1[) < \infty$, invariante par translation et définie sur la tribu engendrée par les E_i et leurs translatés car pour une telle mesure,

$$\mu([0,1[) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \mu(E_i) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \mu(a_i + E_i) = \mu([0,2[) = 2\mu([0,1[).$$

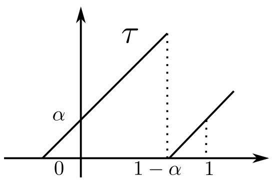
En particulier, on voit en prenant pour μ la mesure de Lebesgue λ qu'au moins un des ensembles E_i n'est pas borélien.

Preuve
Considérons un réel irrationnel α et posons $\tau(x) = x + \alpha \bmod 1$.

L'application itérée $n^{\text{ième}}$ de τ est une bijection de $[0,1[$ de la forme

$$\begin{aligned} \tau^n(x) &= x + 1 - \alpha_n \quad \text{sur } [0,\alpha_n[, \\ &= x - \alpha_n \quad \text{sur } [\alpha_n, 1[\end{aligned}$$

avec $\alpha_n = 1 + \text{partie entière}(n\alpha) - n\alpha$.



Notons que pour tout $x \in [0,1[$, les termes de la suite $\{\tau^n(x)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ sont tous distincts et l'ensemble de ces suites constitue une partition de $[0,1[$. Choisissons un point par suite dans cet ensemble afin de construire un nouvel ensemble A qui vérifie

$$[0,1[= \coprod_{n\in\mathbf{Z}} \tau^n(A) = \coprod_{k\in\mathbf{Z}} \tau^{2k}(A) \cup \coprod_{k\in\mathbf{Z}} \tau^{2k+1}(A).$$

Il suffit de translater $\tau^{2k}(A)$ par τ^{-k} de manière à l'envoyer sur $\tau^k(A)$ puis de translater $\tau^{2k+1}(A)$ par $t_1 \circ \tau^{-k-1}$ pour l'envoyer sur $t_1(\tau^k(A))$ afin de reconstituer les intervalles $[0,1[$ et $[1,2[$. On peut tout expliciter comme suit :

$$\begin{aligned} E_{4i} &= \tau^{2i}(A) \cap [0,\alpha_{-i}[, & E_{4i+2} &= \tau^{2i+1}(A) \cap [0,\alpha_{-i-1}[, \\ E_{4i+1} &= \tau^{2i}(A) \cap [\alpha_{-i},1[, & E_{4i+3} &= \tau^{2i+1}(A) \cap [\alpha_{-i-1},1[, \end{aligned}$$

$$a_{4i} = 1 - \alpha_{-i}, \quad a_{4i+1} = -\alpha_{-i}, \quad a_{4i+2} = 2 - \alpha_{-i-1}, \quad a_{4i+3} = 1 - \alpha_{-i-1}.$$

1.7 Exercices

exercice 1
On considère l'ensemble des parties A de $\mathbf{R}$ qui satisfont la propriété suivante :

$$x \in A \quad \text{implique} \quad -x \in A.$$

Montrer que cet ensemble de parties est une tribu. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui appartiennent à cette tribu ?

$$\mathbf{N},\ \mathbf{Z},\ [0,1],\ \mathbf{Q},\ \{x \in \mathbf{R} \mid x^6 - 9x^2 + 1 = 0\},\ \emptyset,\ ]-2,2[\ ,\ \{-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{2}\}$$

exercice 2
Soit X un ensemble, $f : X \to \mathbf{R}$ une application. Montrer que l'ensemble des parties de X de la forme $f^{-1}(B)$, avec B partie quelconque de $\mathbf{R}$, est une tribu. Quelle est la tribu obtenue lorsqu'on considère l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x) = x^2$? Faire le lien avec l'exercice précédent.

exercice 3
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour tout A, $B \in \mathcal{T}$,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

exercice 4
– Soit A et B deux sous-ensembles boréliens de $[0,1]$ tels que $\lambda(A) > \frac{1}{2}$ et $\lambda(B) > \frac{1}{2}$. Montrer que $A \cap B$ est non vide.

– On considère trois sous-ensembles boréliens A, B et C tous de mesure de Lebesgue strictement supérieure à $2/3$. Montrer que $A \cap B \cap C$ est non vide.

– Généraliser à un nombre fini quelconque de sous-ensembles boréliens de $[0,1]$.

– Généraliser à un ensemble mesuré quelconque $(X, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\mu(X) < \infty$.

exercice 5
On note $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Montrer que $\lambda(\mathbf{Q}) = 0$.

exercice 6
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \subset X$ mesurable tel que $\mu(A^c) < \varepsilon$ et f est bornée sur A.

exercice 7
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f et f' sont des fonctions boréliennes. Donner un exemple de fonction f dérivable dont la dérivée n'est pas continue.

Chapitre 2

L'intégrale de Lebesgue

Ce chapitre est consacré à la construction de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives. Étant donnés un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et une fonction mesurable $f : X \to [0, \infty]$, on définit l'intégrale $\int_X f\, d\mu$ par un processus de limites. Pour mesurer la partie qui se trouve sous le graphe de la fonction f, on la découpe en rectangles de hauteur uniforme et on fait tendre cette hauteur vers zéro. Cette approche rend la monotonie de l'intégrale aisée à démontrer. La linéarité nécessite plus de calculs et donne un théorème général d'interversion somme intégrale.

2.1 Intégration des fonctions positives

On commence par définir l'intégrale d'une fonction $f : X \to [0, \infty]$ relativement à une mesure μ définie sur X. Pour alléger les notations, on pose

$$(f > a) = \{x \in X \mid f(x) > a\} = f^{-1}(\,]a, \infty]).$$

La fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset X$ est notée $\mathbf{1}_A$, elle vaut 1 sur A et 0 sur son complémentaire.

Définition 11 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable positive. L'intégrale de f sur X relativement à la mesure μ, notée $\int_X f\, d\mu$ ou $\int_X f(x)\, d\mu(x)$, est définie par :*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(f > \frac{k}{2^n}\Big).$$

Cette limite existe, elle appartient à $[0, \infty]$. On pose de plus pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f\, \mathbf{1}_A\, d\mu.$$

Commençons par vérifier que la limite qui apparaît dans la définition a bien un sens. On pose

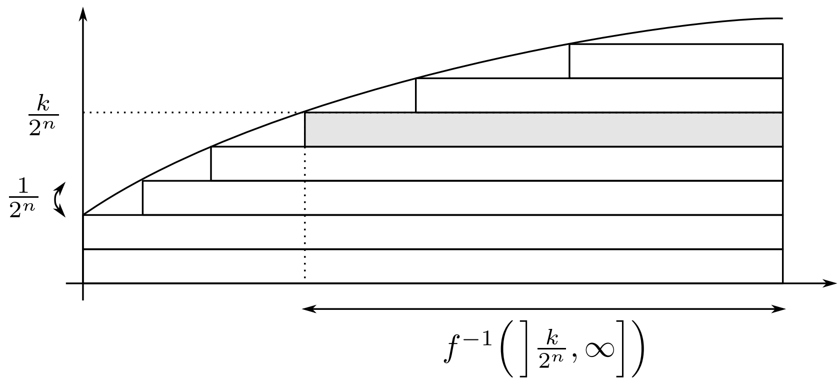
$$s_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(f > \frac{k}{2^n}\Big) \in [0, \infty].$$

Montrons que $(s_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante en groupant les termes deux à deux.

$$\begin{aligned} s_{n+1}(f) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2}\Big(\mu\Big(f > \frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big) + \mu\Big(f > \frac{2k}{2^{n+1}}\Big)\Big) \\ &\geq \frac{1}{2^n} \sum_{k\geq 1} \mu\Big(f > \frac{k}{2^n}\Big) = s_n(f). \end{aligned}$$

La suite $(s_n(f))$ possède donc bien une limite, éventuellement infinie.

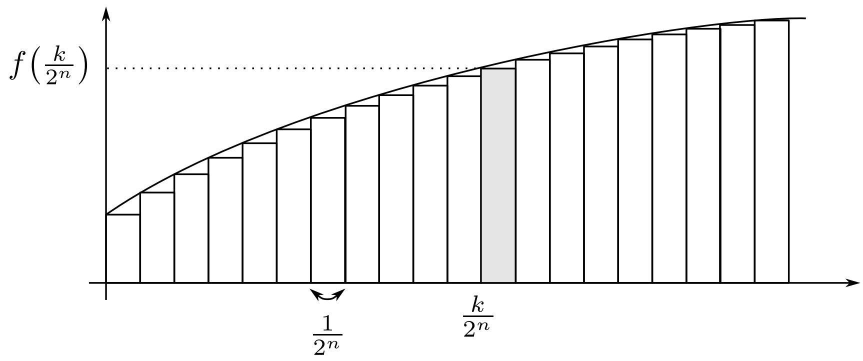
Donnons maintenant une interprétation géométrique de cette suite. Plaçons nous sur $[0,1]$ et considérons une fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui est croissante. La quantité $s_n(f)$ est égale à la somme des aires des rectangles horizontaux qui apparaissent dans le dessin qui suit. Chaque rectangle est de hauteur $\frac{1}{2^n}$. L'aire du rectangle grisé vaut $\frac{1}{2^n}\mu(f > \frac{k}{2^n})$.



Nous avons supposé f croissante, une telle fonction est intégrable au sens de Riemann. On peut comparer la définition précédente avec l'intégrale de Riemann de f, qui peut s'obtenir comme limite des sommes de Riemann associées.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{k}{2^n}\Big).$$

Là encore, la limite existe car la suite apparaissant à droite de l'expression précédente est croissante. Cette fois-ci, on approche l'aire qui se situe sous la courbe par la somme des aires de rectangles verticaux, chacun de largeur $\frac{1}{2^n}$. Le rectangle grisé a pour aire $\frac{1}{2^n}f(\frac{k}{2^n})$.



Nous verrons dans la suite que ces deux manières d'approcher l'aire sous le graphe de f donnent le même résultat, pour toute fonction intégrable au sens de Riemann. L'intégrale de Lebesgue sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ apparaît donc comme une extension de l'intégrale de Riemann. Pour cette raison, il est d'usage d'utiliser la notation $\int_A f(x)\,dx$ pour l'intégrale $\int_A f(x)\,d\lambda(x)$ lorsque A est un intervalle.

Exemples
Pour se familiariser avec la définition de l'intégrale, calculons $\int_{[0,1]} x\,d\lambda(x)$.

$$s_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k\geq 1}\lambda\Big(\Big]\frac{k}{2^n}, 1\Big]\Big) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} 1 - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} k = \frac{1}{4^n}\frac{2^n(2^n-1)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Comme attendu, nous obtenons $\int_{[0,1]} x\,d\lambda(x) = \frac{1}{2}$.

Calculons l'intégrale de la fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{T}$.

$$(\mathbf{1}_A > k/2^n) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k \geq 2^n, \\ A & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$s_n(\mathbf{1}_A) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\mathbf{1}_A > k/2^n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\mu(A) = \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)\,\mu(A).$$

Nous obtenons $\displaystyle\int_X \mathbf{1}_A\,d\mu = \int_A d\mu = \mu(A)$.

On s'intéresse maintenant aux propriétés de l'intégrale en lien avec les ensembles négligeables. L'énoncé suivant se déduit directement de la définition que nous avons prise pour l'intégrale.

Proposition 8 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0,\infty]$ une fonction mesurable.*
– *si $\mu(N) = 0$, alors $\int_N f\,d\mu = 0$ et $\int_{X\setminus N} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.*
– *Si $f = g$ presque partout, alors $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.*
– *$\int_X f\,d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle presque partout.*
– *Si $\int_X f\,d\mu < \infty$, alors f est finie presque partout.*

Preuve
– Nous avons $\mu(f\,\mathbf{1}_{N^c} > \frac{k}{2^n}) = \mu((f > \frac{k}{2^n}) \setminus N) = \mu(f > \frac{k}{2^n}) - \mu(N) = \mu(f > \frac{k}{2^n})$ ce qui implique $s_n(f\,\mathbf{1}_{N^c}) = s_n(f)$ et on passe à la limite. Pour l'autre égalité, $\mu(f\,\mathbf{1}_N > \frac{k}{2^n}) \leq \mu(N) = 0$ et $s_n(f\,\mathbf{1}_N) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

– L'ensemble $(f = g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est de complémentaire négligeable. Nous avons donc $\int_X f\,d\mu = \int_{(f=g)} f\,d\mu = \int_{(f=g)} g\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

– Pour tout n, nous avons $2^{-n}\mu(f > 1/2^n) \leq s_n(f) \leq \int_X f\,d\mu = 0$. Par convergence croissante, $\mu(f > 0) = \lim \mu(f > 1/2^n) = 0$.

– Par contraposée, supposons $\mu(f = \infty) > 0$. Nous avons $\mu(f > k) \geq \mu(f = \infty)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ ce qui montre que $s_0(f) = \infty$.

2.2 Monotonie

Détaillons les propriétés de l'intégrale en relation avec l'ordre sur $\mathbf{R}$.

Proposition 9 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to [0, \infty]$ deux fonctions mesurables telles que $f \leq g$. Alors $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.*

Preuve
L'inégalité $f \leq g$ implique l'inclusion $(f > a) \subset (g > a)$ pour tout $a \in \mathbf{R}$ et $\mu(f > a) \leq \mu(g > a)$. Ceci implique $s_n(f) \leq s_n(g)$ pour tout n.

Théorème 4 (convergence croissante) *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $[0, \infty]$:*

$$\forall\, x \in X, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}, \quad f_k(x) \leq f_{k+1}(x).$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu \;=\; \int_X \lim_{k\to\infty} f_k \;\; d\mu.$$

Preuve
Posons $s_{n,N} = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu\Big(f > \frac{k}{2^n}\Big)$. Nous avons $\int_X f\,d\mu = \sup_{n,N} s_{n,N} f$.
Remarquons que l'ensemble $(f > k/2^n)$ est l'union croissante des $(f_j > k/2^n)$, si bien que pour tout k et n, $\mu(f > k/2^n) = \lim_j \mu(f_j > k/2^n)$. On en déduit

$$s_{n,N}(f) = \lim_j s_{n,N}(f_j) = \sup_j s_{n,N}(f_j).$$

Par monotonie de l'intégrale, la suite $\int_X f_j \, d\mu$ est croissante.

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \int_X f_j \, d\mu &= \sup_j \int_X f_j \, d\mu \\
&= \sup_j \sup_{n,N} s_{n,N}(f_j) \\
&= \sup_{n,N} \sup_j s_{n,N}(f_j) \\
&= \sup_{n,N} s_{n,N}(f) \\
&= \int_X f \, d\mu.
\end{aligned}$$

Exemple
Considérons une fonction continue $h : [0,1] \to \mathbf{R}_+$ et cherchons la limite quand n tend vers l'infini de l'intégrale

$$\int_{[0,1]} \frac{nh(x)}{1+nh(x)} \, d\lambda(x).$$

La suite qui apparaît sous le signe intégral est croissante. Elle tend vers 1 si $h(x)$ est strictement positif, elle est constante égale à 0 si $h(x)$ est nul. Posons $(h \neq 0) = \{x \in [0,1] \mid h(x) \neq 0\}$, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nh(x)}{1+nh(x)} = \mathbf{1}_{(h\neq 0)}(x).$$

D'après le théorème de convergence croissante,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nh(x)}{1+nh(x)} \, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{(h\neq 0)} \, d\lambda(x) = \lambda(h \neq 0).$$

L'ensemble des points sur lequel une fonction continue s'annule est un fermé. Il est facile de voir que tout fermé $F \subset [0,1]$ est l'ensemble des zéros d'une certaine fonction continue h. Par exemple, on peut prendre la distance au fermé, $h(x) = d(x, F)$. Pour cette fonction, l'intégrale ci-dessus, qui a un sens du point de vue de l'intégrale de Riemann, converge vers $\lambda(F^c)$. Nous voyons donc qu'on ne peut pas se passer de la notion de mesure, même dans des problèmes très simples liés à des passages à la limite dans les intégrales de fonctions continues.

2.3 Linéarité

On veut maintenant montrer que l'intégrale est linéaire.

Théorème 5 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to [0,\infty]$ deux fonctions mesurables. Alors*

$$\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Preuve

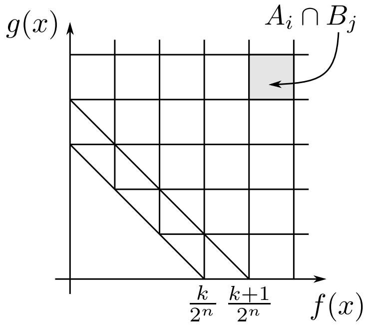
On pose

$A_i = (\frac{i+1}{2^n} \geq f > \frac{i}{2^n})$ pour $i > 0$,

$A_0 = (\frac{1}{2^n} \geq f \geq 0)$,

$B_j = (\frac{j+1}{2^n} \geq g > \frac{j}{2^n})$ pour $j > 0$,

$B_0 = (\frac{1}{2^n} \geq g \geq 0)$.



Remarquons que X est égal à l'union des A_i, ainsi qu'à l'union des B_j. La démonstration repose sur les inclusions suivantes.

$$\Big(f+g > \frac{k+1}{2^n}\Big) \subset \coprod_{\substack{i\geq 0,\ j\geq 0\\ tels\ que\ i+j\geq k}} A_i \cap B_j \ \subset \ \Big(f+g > \frac{k}{2^n}\Big).$$

Calculons la somme sur k des mesures de l'union qui apparaît ci-dessus.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\geq k}} \mu(A_i\cap B_j) &= \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\neq 0}}\sum_{1\leq k\leq i+j} \mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i,j}(i+j)\,\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i\geq 1} i\,\mu(A_i\cap \coprod_{j\geq 0} B_j) + \sum_{j\geq 1} j\,\mu(\coprod_{i\geq 0} A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i\geq 1} i\,\mu(A_i) + \sum_{j\geq 1} j\,\mu(B_j).\end{aligned}$$

Si nous prenons $g = 0$ ou $f = 0$ dans le calcul précédent, nous obtenons

$$\sum_{k\geq 1}\mu\Big(f > \frac{k}{2^n}\Big) = \sum_{i\geq 1} i\,\mu(A_i), \quad \sum_{k\geq 1}\mu\Big(g > \frac{k}{2^n}\Big) = \sum_{j\geq 1} j\,\mu(B_j)$$

et les inclusions se traduisent par les inégalités

$$\sum_{k\geq 1}\mu\Big(f+g-\frac{1}{2^n} > \frac{k}{2^n}\Big) \leq \sum_{k\geq 1}\mu\Big(f > \frac{k}{2^n}\Big) + \sum_{k\geq 1}\mu\Big(g > \frac{k}{2^n}\Big) \leq \sum_{k\geq 1}\mu\Big(f+g > \frac{k}{2^n}\Big).$$

Nous avons $(f+g-\frac{1}{2^n} > \frac{k}{2^n}) = (\max(0, f+g-\frac{1}{2^n}) > \frac{k}{2^n})$ si bien que pour $m \leq n$,

$$s_n\Big(\max\Big(0, f+g-\frac{1}{2^m}\Big)\Big) \leq s_n\Big(\max\Big(0, f+g-\frac{1}{2^n}\Big)\Big) \leq s_n(f)+s_n(g) \leq s_n(f+g)$$

et en passant à la limite quand n tend vers l'infini,

$$\int_X \max\Big(0, f+g-\frac{1}{2^m}\Big)\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \leq \int_X (f+g)\,d\mu.$$

Le terme de gauche tend vers $\int_X f+g\,d\mu$ quand m tend vers l'infini par convergence croissante. Ceci conclut la preuve du théorème.

Proposition 10 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $a \in [0, \infty]$ et $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Alors*

$$\int_X af \; d\mu = a \int_X f \, d\mu$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$ si a ou l'intégrale de f est infinie.

Preuve
Lorsque $a \in \mathbf{Q}_+$, $a = \frac{k}{n}$, par linéarité, $n \int_X \frac{k}{n} f \, d\mu = \int_X n \frac{k}{n} f \, d\mu = k \int_X f \, d\mu$.
Le cas général s'obtient en encadrant c par des rationnels et en utilisant la monotonie de l'intégrale ou la convergence croissante.

Corollaire 2 *Si $f \leq g$ et $\int_X f \, d\mu < \infty$ alors $\int_X (g - f) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu$.*

Par linéarité, nous avons $\int_X g - f \, d\mu + \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$. Si la quantité $\int_X f \, d\mu$ est finie, on peut la soustraire aux deux termes de cette égalité.

Théorème 6 (interversion somme intégrale) *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors*

$$\int_X \sum_{n \in \mathbf{N}} f_n \; d\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

Ce théorème important est une conséquence immédiate du théorème de convergence croissante appliqué à la suite des sommes partielles de la série :

$$\int_X \lim_N \sum_{n=0}^{N} f_n \; d\mu = \lim_N \int_X \sum_{n=0}^{N} f_n \, d\mu = \lim_N \sum_{n=0}^{N} \int_X f_n \, d\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

Exemples
Illustrons ce résultat par un petit calcul. Pour $x \geq 0$, posons $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Anticipant sur le fait que $\int_{[0,t]} x^n \, d\lambda(x) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ qui sera démontré plus loin,

$$\int_{[0,t]} e^x \, d\lambda(x) = \int_{[0,t]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,t]} \frac{x^n}{n!} \, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = e^t - 1.$$

La fonction exponentielle est donc égale à son intégrale, à une constante près. De manière remarquable, il n'y a pas besoin de savoir que la série définissant l'exponentielle converge pour arriver à cette conclusion.

Donnons une autre application du théorème d'interversion somme intégrale. Soit $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. La mesure μ_f de densité f relativement à la mesure de Lebesgue est définie par

$$\mu_f(A) = \int_A f d\lambda \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d).$$

Montrons que c'est bien une mesure. Nous avons $\mu_f(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = 0$, il faut vérifier la σ-additivité. Soit (A_i) une suite d'ensembles appartenant à $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux. Nous avons $\mathbf{1}_{\coprod A_i} = \sum_i \mathbf{1}_{A_i}$, ce qui donne

$$\mu_f(\coprod A_i) = \int_X \mathbf{1}_{\coprod A_i} \, f\,d\lambda = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i} f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_i} f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(A_i).$$

On dit que μ_f est *absolument continue* relativement à la mesure de Lebesgue.

Comme troisième exemple, calculons l'intégrale d'une fonction $f : \mathbf{N} \to [0, \infty]$ relativement à la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$. Rappelons que cette mesure, qu'on note ici μ, associe à un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ son nombre d'éléments. Écrivons $f(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}}$.

$$\int_{\mathbf{N}} f\,d\mu = \int_{\mathbf{N}} \sum_{k\in\mathbf{N}} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}}\,d\mu = \sum_{k\in\mathbf{N}} f(k) \int_{\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{k\}}\,d\mu = \sum_{k\in\mathbf{N}} f(k)\mu(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbf{N}} f(k).$$

Les séries apparaissent donc comme un cas particulier d'intégrale.

2.4 Exercices

exercice 1
Soit λ la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}$. Pour tout borélien A de $\mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$, on note

$$x_0 + A = \{x_0 + x \in \mathbf{R} \mid x \in A\}.$$

Montrer que $A \mapsto \lambda(x_0 + A)$ est une mesure et calculer $\lambda(x_0 + A)$ lorsque A est un intervalle. En déduire que $\lambda(x_0 + A) = \lambda(A)$.

Montrer à partir de la définition de l'intégrale que pour toute fonction borélienne $f : \mathbf{R} \to [0, \infty]$,

$$\int_A f(x + x_0)\, d\lambda(x) = \int_{A+x_0} f(x)\, d\lambda(x).$$

exercice 2
Calculer directement à partir de la définition l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(x)\, d\lambda(x)$.

exercice 3
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une énumération des nombres rationnels de $[0, 1]$. On pose

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(|x - x_n|) \ \in [0, \infty].$$

Montrer que f tend vers l'infini en tous les points rationnels de $[0, 1]$.

Montrer que $\int_0^1 f(x)\, d\lambda(x) < \infty$, en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \ln(|x - x_n|)$ converge pour λ-presque tout $x \in [0, 1]$.

exercice 4
Calculer les limites des expressions suivantes, pour n tendant vers l'infini.

$$\int_0^1 x^n\, dx \qquad \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx \qquad \int_0^2 \frac{x^n}{1 + x^n}\, dx \qquad \int_0^\infty \frac{nx}{1 + nx}\, dx$$

$$\int_0^2 \frac{x^n}{1 + x^2}\, dx \qquad \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{n + x}\, dx \qquad \int_0^1 1 - x^n e^{-nx}\, dx \qquad \int_{-1}^1 \operatorname{atan}^2(nx)\, dx$$

exercice 5
Soit $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ borélienne. Que vaut la limite de la suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + nf(x)}\, dx$?

exercice 6
Donner un exemple de suite de fonctions continues $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ qui converge simplement vers 0 mais telle que $\int_0^1 f_n(x)\, dx \longrightarrow +\infty$.

exercice 7
Donner un exemple de suite de fonctions continues $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}_+$ telle que $\int_0^1 f_n(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais telle que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pour aucune valeur de x.

Chapitre 3

Propriétés de l'intégrale

On détaille dans ce chapitre quelques propriétés importantes de l'intégrale de Lebesgue.

Après avoir brièvement exposé une définition alternative de l'intégrale de Lebesgue en faisant usage des fonctions étagées, on définit l'intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes et on montre les théorèmes fondamentaux de passage à la limite : convergence dominée, interversion somme intégrale, lemme de Fatou, etc. Ces théorèmes permettent entre autre d'intégrer les fonctions classiques à partir de leurs développements en série. On montre également que l'intégrale de Lebesgue est bien une généralisation de l'intégrale de Riemann. Le lien entre dérivée et intégrale est exposé en fin de chapitre.

3.1 Densité des fonctions étagées

Nous introduisons la notion de fonction étagée.

Définition 12 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ est* étagée *si elle est mesurable et si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

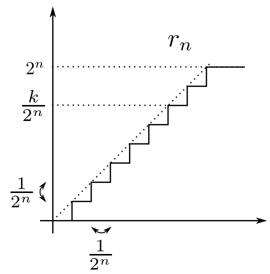
Notons que les fonctions étagées sont précisément les combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables. De fait, si f est étagée, on peut l'exprimer sous la forme $f = \sum_{y \in f(X)} y\,\mathbf{1}_{f^{-1}(\{y\})}$. Remarquons aussi qu'elles sont bornées.

Théorème 7 *Toute fonction mesurable positive est limite croissante de fonctions étagées positives.*

Preuve
Notons par $k_n(y)$ la partie entière de $2^n y$. Définissons $r_n : [0, \infty] \to [0, \infty[$ par

$$r_n(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{4^n} \mathbf{1}_{[k/2^n, \infty]}(y) = \min\Big(2^n, \frac{k_n(y)}{2^n}\Big).$$

On vérifie sans difficulté que la suite $(k_n(y)/2^n)$ converge en croissant vers y. La suite $(r_n \circ f)$ est donc une suite croissante de fonctions étagées qui converge vers la fonction f. La proposition est démontrée.



Par monotonie, l'intégrale de toute fonction étagée plus petite que f est inférieure à celle de f. Nous avons donc, pour toute fonction mesurable $f : X \to [0, \infty]$:

Proposition 11

$$\int_X f\, d\mu = \sup\Big\{\int_X h\, d\mu \mid h \textit{ fonction étagée telle que } 0 \leq h \leq f\Big\}.$$

On aurait pu définir l'intégrale de Lebesgue d'abord pour les fonctions étagées puis ensuite utiliser la formule précédente pour l'étendre à toutes les fonctions mesurables positives. Nous allons illustrer l'usage des fonctions étagées en montrant la formule de changement de variables dans le cas affine.

Proposition 12 *Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to [0, \infty]$ borélienne, pour tout $a \neq 0$,*

$$\int_{\mathbf{R}} f(ax+b)\, d\lambda(x) = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbf{R}} f(x)\, d\lambda(x).$$

On commence par le cas où f est une fonction indicatrice. Considérons la mesure

$$\mu(A) = \int_{\mathbf{R}} |a|\, \mathbf{1}_A(ax+b)\, d\lambda(x) = |a|\, \lambda(\{x \in \mathbf{R} \mid ax+b \in A\})$$

Pour tout u, v dans $\mathbf{R}$ tels que $u \leq v$, nous avons

$$\mu([u,v]) = a\lambda([(u-b)/a, (v-b)/a]) = v - u = \lambda([u,v]) \quad \text{si } a > 0,$$

$$\mu([u,v]) = -a\lambda([(v-b)/a, (u-b)/a]) = v - u = \lambda([u,v]) \quad \text{si } a < 0.$$

Par unicité de la mesure de Lebesgue, on en déduit $\mu = \lambda$, ce qui démontre la formule pour toutes les fonctions indicatrices de boréliens. Par linéarité, elle est aussi vraie pour toutes les fonctions étagées. Et par convergence croissante, pour toute fonction borélienne positive. La formule est démontrée.

Exemple

Comme application, montrons qu'on ne peut pas toujours intervertir une limite et une intégrale. On considère sur $[0, \infty[$ les fonctions $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ ainsi que $f_n(x) = nf(nx)$, $n \in \mathbf{N}^*$. D'après le résultat précédent,

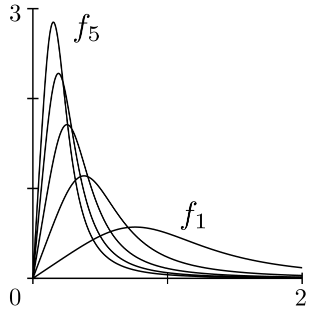
$$\int_{\mathbf{R}_+} f_n\, d\lambda = \int_{\mathbf{R}} f_n\, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}\, d\lambda = n \int_{\mathbf{R}} f(nx)\, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(nx)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}_+} f(x)\, d\lambda(x).$$

La suite $\int_{\mathbf{R}} f_n \, d\lambda$ est constante. Elle est non nulle car, par exemple, on peut minorer f par $x/2$ sur $[0,1]$ et on a vu que $\int_{[0,1]} x dx = 1/2$. Par contre, la suite $(f_n(x))$ tend vers 0 pour tout $x \in \mathbf{R}_+$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x}{1+n^4x^4} = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}_+.$$

On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}_+} \frac{n^2 x}{1+n^4x^4}\, dx \neq \int_{\mathbf{R}_+} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x}{1+n^4x^4}\, dx.$$



3.2 Limites inférieures et supérieures

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $[-\infty, \infty]$. On pose

$$u_n' = \inf\{u_k \mid k \geq n\} = \inf_{k\geq n} u_k,$$

$$u_n'' = \sup\{u_k \mid k \geq n\} = \sup_{k\geq n} u_k.$$

La suite u_n' est une suite croissante, elle admet donc une limite dans $[-\infty, \infty]$ qu'on appelle *limite inférieure* de la suite (u_n). De même, la suite u_n'' est décroissante, sa limite est appelée *limite supérieure* de la suite (u_n).

$$\underline{\lim}\ u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{k\geq n} u_n$$

$$\overline{\lim}\ u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{k\geq n} u_n$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $k \geq n$, nous avons l'encadrement $u_n' \leq u_k \leq u_n''$. On en déduit que la suite (u_n) converge si et seulement si ses limites inférieure et supérieure coïncident.

Les notions de limite inférieure et supérieure peuvent être utilisées pour donner des preuves courtes de certains résultats de convergence. Appliquons ces notions à des questions de mesurabilité.

Proposition 13 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies sur X à valeurs dans $[-\infty, \infty]$. Alors $\underline{\lim}\ f_n$ et $\overline{\lim}\ f_n$ sont mesurables.*

Preuve
Posons $f_n' = \inf_{k\geq n} f_k$. Nous avons vu que les bornes inférieures et supérieures d'une

suite de fonctions mesurables sont mesurables. Les f'_n sont donc mesurables et il en va de même pour $\underline{\lim}\, f_n = \sup_{k\geq n} f'_k$. On raisonne de manière similaire pour la limite supérieure.

Comme corollaire, on retrouve le fait qu'une limite de fonctions mesurables est mesurable. De fait si (f_n) est convergente, sa limite est égale à sa limite inférieure. On en déduit aussi que l'ensemble des points pour lesquels la suite (f_n) converge est dans $\mathcal{T}$ car c'est l'image réciproque de la diagonale $\{(x,x) \in [-\infty,\infty]^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$ par l'application mesurable $x \mapsto (\underline{\lim}\, f_n, \overline{\lim}\, f_n)$.

Lemme 2 (Fatou) *Soit* $(X,\mathcal{T},\mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions mesurables à valeurs dans* $[0,\infty]$. *Alors*

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu.$$

Preuve
Par convergence croissante, $\displaystyle\int_X \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\geq n} f_k \; d\mu.$

Par monotonie, $\displaystyle\int_X \inf_{k\geq n} f_k \; d\mu \leq \int_X f_m \, d\mu$ pour tout $m \geq n$,

d'où $\displaystyle\int_X \inf_{k\geq n} f_k \; d\mu \leq \inf_{m\geq n} \int_X f_m \, d\mu$. Le lemme s'obtient en passant à la limite.

Nous montrons à présent qu'il n'y a pas besoin que la convergence ait lieu de manière croissante dans le théorème de convergence croissante. Ce résultat se démontre aisément à partir du lemme précédent et c'est la seule application du lemme de Fatou que nous donnerons dans ce texte.

Corollaire 3 *Soit* $(X,\mathcal{T},\mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions mesurables définies sur* X *à valeurs dans* $[0,\infty]$ *qui converge presque partout vers une fonction* f. *Supposons* $f_n \leq f$ *presque partout pour tout* $n \in \mathbf{N}$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \;=\; \int_X f \, d\mu.$$

Preuve
On se place sur $X' = \{x \mid f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \;\text{ et } \forall\, n,\; f_n(x) \leq f(x)\}$ qui est de complémentaire négligeable si bien que l'intégrale de f sur X et X' sont égales, et il en va de même pour toutes les fonctions f_n. On a alors

$$\int_{X'} f \, d\mu = \int_{X'} \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_{X'} f_n \, d\mu \leq \overline{\lim} \int_{X'} f_n \, d\mu \leq \int_{X'} f \, d\mu.$$

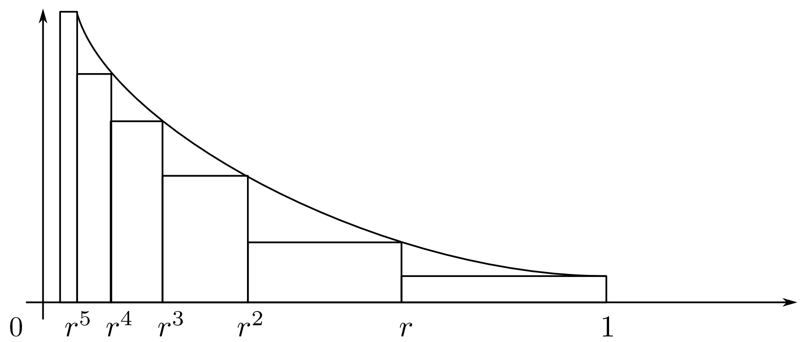
Ces inégalités sont donc des égalités et on a la convergence.

Lorsque l'intégrale de f est finie, ce corollaire est un cas particulier du théorème de convergence dominée que nous verrons au prochain chapitre.

Exemple
Comme application, calculons l'intégrale des monômes $x \mapsto x^\alpha$ sans passer par le fait que l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée. La méthode, due à Pierre de Fermat, permet d'exprimer sous forme de série l'intégrale de toute fonction décroissante $f :]0,1] \to [0,\infty[$.

Pour tout $r \in]0,1[$, posons $f_r(x) = f(r^n)$ pour $n \geq 0$ et $x \in]r^{n+1}, r^n]$.

$$f_r = \sum_{n=0}^{\infty} f(r^n)\, \mathbf{1}_{]r^{n+1},\, r^n]}$$



Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous avons l'encadrement $x \leq r^n \leq x/r$ lorsque $x \in]r^{n+1}, r^n]$ ce qui implique $f(\frac{x}{r}) \leq f_r(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in]0,1]$. En conséquence, les fonctions (f_r) tendent vers f lorsque r tend vers 1 en tout point où f est continue. Comme f est décroissante, ces points forment un ensemble dont le complémentaire est dénombrable, donc négligeable relativement à la mesure de Lebesgue. On en déduit

$$\lim_{r\to 1} \int_{]0,1]} f_r \, d\lambda = \int_{]0,1]} f \, d\lambda.$$

En intégrant l'expression de f_r sous forme de série donnée plus haut, on obtient

$$\int_{]0,1]} f \, d\lambda = \lim_{\substack{r \longrightarrow 1 \\ <}} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n f(r^n).$$

Appliquons cette formule à $f(x) = 1 - x^\alpha$, $\alpha \geq 0$.

$$\int_{]0,1]} (1-x^\alpha)\, dx = \lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (1 - r^{n\alpha}) = \lim_{r\to 1} 1 - \frac{1-r}{1-r^{\alpha+1}} = 1 - \frac{1}{\alpha+1}.$$

On peut faire un changement de variables ou raisonner sur un intervalle de la forme $]0,t] = \coprod\,]r^{n+1}t, r^n t]$ et intégrer $t^\alpha - x^\alpha$ pour obtenir la formule usuelle

$$\int_{]0,t]} x^\alpha \, dx = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

On peut aussi évaluer par cette méthode l'intégrale

$$\int_{]0,1]} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{r\to 1} (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^{n/2} = \lim_{r\to 1} \frac{1-r}{1-\sqrt{r}} = \lim_{r\to 1} 1 + \sqrt{r} = 2.$$

et plus généralement $\int_{]0,t]} x^\alpha \, dx$ pour tout $t \geq 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

3.3 Lien avec l'intégrale de Riemann

Étudions à présent le rapport entre l'intégrale de Riemann et de Lebesgue. Rappelons qu'une fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles. L'intégrale de Riemann d'une telle fonction coïncide avec son intégrale relativement à la mesure de Lebesgue. En effet, pour $f = \sum a_j \mathbf{1}_{I_j}$ avec I_j des intervalles en nombre fini,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum a_j\ l(I_j) = \sum a_j\ \lambda(I_j) = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

Une fonction bornée f définie sur un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* si ses intégrales inférieure et supérieure coïncident :

$$\sup\Big\{\int_a^b g(x)\,dx \mid g \text{ en escalier, } g \leq f\Big\} = \inf\Big\{\int_a^b h(x)\,dx \mid h \text{ en escalier, } h \geq f\Big\}$$

En particulier, il existe des suites g_n et h_n de fonctions en escalier telles que

$$g_n \leq f \leq h_n, \quad \lim \int_a^b g_n(x)\,dx = \lim \int_a^b h_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Quitte à remplacer g_n par $\max(g_1, ..., g_n)$ et h_n par $\min(h_1, ..., h_n)$, on peut supposer (g_n) croissante et (h_n) décroissante. Posons $g = \sup\, g_n$ et $h = \inf\, h_n$. Ces fonctions sont boréliennes et nous avons $g \leq f \leq h$. Par convergence croissante,

$$\int_{[a,b]} g\,d\lambda = \lim \int_a^b g_n(x)\,dx = \lim \int_a^b h_n(x)\,dx = \int_{[a,b]} h\,d\lambda.$$

On en déduit $\int (h-g)\,d\lambda = 0$, puis $h = g = f$ presque partout.

La fonction f coïncide avec les fonctions boréliennes h et g presque partout. Cela n'implique pas que f est borélienne, mais suffit à assurer que son intégrale de Lebesgue est bien définie. Ce point sera détaillé dans la suite. Pour l'instant, on se contente de dire que $f : \mathbf{R} \to [0, \infty]$ est Lebesgue-mesurable si elle coincïde presque partout avec une fonction borélienne $\tilde{f}$ et on pose $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \tilde{f} d\lambda$. On a alors $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} g\,d\lambda = \int_{[a,b]} h\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx$ ainsi que les implications

$$\begin{tikzcd}
 & \text{continue} \arrow[d] & \\
 & \text{continue par morceaux} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{borélienne} \arrow[dr] & & \text{Riemann intégrable} \arrow[dl] \\
 & \text{Lebesgue mesurable} &
\end{tikzcd}$$

Proposition 14 *Toute fonction positive intégrable au sens de Riemann est Lebesgue-mesurable et son intégrale de Riemann coïncide avec son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue.*

3.4 Intégrale des fonctions à valeurs complexes

Nous avons défini l'intégrale des fonctions à valeurs positives, nous passons maintenant au cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Définition 13 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction $f : X \to [-\infty, \infty]$ ou $\mathbf{C}$ est dite* intégrable *si elle est mesurable et si l'intégrale de sa valeur absolue ou de son module est finie :*

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty.$$

Dans le cas où f est à valeurs dans $[-\infty, \infty]$, on pose

$$f_+(x) = \max(0, f(x)), \quad f_-(x) = \max(0, -f(x)).$$

Ces fonctions sont mesurables positives et nous avons $f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-$. La fonction f est intégrable si et seulement si les intégrales $\int_X f_+\, d\mu$ et $\int_X f_-\, d\mu$ sont finies. On définit alors son intégrale comme suit.

Définition 14 *Soit f une fonction intégrable à valeurs réelles. On pose*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu.$$

Lorsque f est à valeurs complexes, ses parties réelle et imaginaire sont notées $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Re}(f)$. Si f est intégrable, ces fonctions sont aussi intégrables.

Définition 15 *Soit f une fonction intégrable à valeurs complexes. On pose*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X Re(f)\, d\mu + i \int_X Im(f)\, d\mu.$$

Sans surprise, cette intégrale est linéaire.

Proposition 15 *Soit f, g deux fonctions intégrables à valeurs complexes et $a, b \in \mathbf{C}$. Alors*

$$\int_X af + bg\, d\mu = a \int_X f\, d\mu + b \int_X g\, d\mu.$$

Attention, ce résultat n'est pas vrai en général dans le cas non intégrable. Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}\, dx \neq \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx - \int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}\, dx.$$

Le premier terme vaut $\ln(2)$, le second est de la forme $\infty - \infty$ et n'a pas de sens.

Preuve de la linéarité
Pour le cas réel, l'égalité $\int_X af\, d\mu = a \int_X f\, d\mu$ vient des relations

$$\begin{aligned} (af)_+ &= af_+, & (af)_- &= af_- & &\text{si } a \geq 0, \\ (af)_+ &= -af_-, & (af)_- &= -af_+ & &\text{si } a \leq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas f à valeurs complexes, a réel, cela provient des égalités

$$\mathrm{Re}(af) = a\,\mathrm{Re}(f), \quad \mathrm{Im}(af) = a\,\mathrm{Im}(f).$$

Il faut également vérifier que $\int_X if\,d\mu = i\int_X f\,d\mu$, ce qui découle des égalités

$$\mathrm{Re}(if) = -\mathrm{Im}(f), \quad \mathrm{Im}(if) = \mathrm{Re}(f).$$

Pour la somme, dans le cas réel, nous écrivons

$$f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_- = (f+g)_+ - (f+g)_-,$$
$$f_+ + g_+ + (f+g)_- = f_- + g_- + (f+g)_+$$

puis en intégrant et en soustrayant les quantités $\int_X (f+g)_-\,d\mu$, $\int_X f_-\,d\mu$, $\int_X g_-\,d\mu$ qui sont finies,

$$\int_X f_+\,d\mu + \int_X g_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu + \int_X g_-\,d\mu = \int_X (f+g)_+\,d\mu - \int_X (f+g)_-\,d\mu.$$

Dans le cas complexe, la linéarité est une conséquence immédiate des relations

$$\mathrm{Re}(f+g) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Re}(g), \quad \mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).$$

La propriété est démontrée.

De là on en déduit que $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$ si f et g sont deux fonctions intégrables à valeurs réelles telles que $f \leq g$. Dans le cas à valeurs complexes, nous avons également les propriétés suivantes.

Proposition 16 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable.*
- *$Re\Big(\int_X f\,d\mu\Big) = \int_X Re(f)\,d\mu$, $Im\Big(\int_X f\,d\mu\Big) = \int_X Im(f)\,d\mu$,*
- *$\int_X \bar{f}\,d\mu = \overline{\int_X f\,d\mu}$,*
- *$\Big|\int_X f\,d\mu\Big| \leq \int_X |f|\,d\mu$.*

Preuve
Les deux premières propriétés sont immédiates. Pour la troisième, nous posons $a = \overline{\int_X f\,d\mu}$, ce qui entraîne $|a| = |\int_X f\,d\mu|$ et on majore comme suit.

$$\Big|\int_X f\,d\mu\Big|^2 = a\int_X f\,d\mu = \mathrm{Re}(a\int_X f\,d\mu) = \int_X \mathrm{Re}(af)\,d\mu \leq \int_X |af|\,d\mu = |a|\int_X |f|\,d\mu$$

La proposition s'ensuit.

Les propriétés relatives aux ensembles négligeables se généralisent sans difficultés aux fonctions à valeurs complexes :
- $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$ si $f = g$ presque partout,
- $\int_N f\,d\mu = 0$ et $\int_{N^c} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu$ si N est négligeable.

On arrive au résultat clef en ce qui concerne les interversions limite intégrale.

Théorème 8 (convergence dominée) *On considère un espace mesuré* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *et une suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de fonctions mesurables à valeurs complexes qui converge presque partout. On suppose qu'il existe une fonction* $g : X \to [0, \infty]$ intégrable *qui domine la suite* (f_n) *:*

$$\textit{pour presque tout } x \in X, \textit{ pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Preuve
Notons f la limite de la suite (f_n) et remarquons que la suite $2g - |f_n - f|$ est positive, tend vers $2g$ en restant inférieure à $2g$. Nous pouvons appliquer le corollaire du lemme de Fatou pour en déduire

$$\int_X 2g \, d\mu - \int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_X 2g - |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X 2g \, d\mu.$$

Comme g est intégrable, son intégrale est finie et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.
Le théorème est démontré.

Rappelons qu'une suite (f_n) est uniformément bornée s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \ \forall\, x \in X, \ |f_n(x)| \leq C.$$

Une suite uniformément bornée définie sur un espace X de mesure finie est automatiquement dominée. C'est une situation qu'on rencontre fréquemment en pratique, et qui rend l'usage du théorème particulièrement aisée.

Nous avons également un énoncé concernant l'interversion somme intégrale.

Théorème 9 (interversion somme intégrale) *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions mesurables définies sur* X *à valeurs complexes. Supposons que*

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Alors

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \; \int_X f_n \, d\mu.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles de la série, qui est dominée par la fonction intégrable $g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \, d\mu$. Remarquons que nous avons l'égalité

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu.$$

même si ces séries sont divergentes. C'est une conséquence du théorème d'inversion somme intégrale pour les fonctions positives.

Exemples
Comme application, nous pouvons définir les fonctions usuelles par un développement en série et calculer leurs intégrales. Par exemple,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\int_0^x \sin(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} = 1 - \cos(x),$$

l'interversion étant justifiée pour $x \geq 0$ par la convergence de l'intégrale

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^{2k+1}}{(2k+1)!}\,dt \leq \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!}\,dt = \exp(x) - 1.$$

On résume quelques résultats classiques qui s'obtiennent par cette méthode.

$f(x)$	Série associée	$\int_0^x f(t)\,dt$	Notes
x^α		$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha > 0$
$\exp(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\exp(x) - 1$	
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$1 - \cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\sin(x)$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathrm{ch}(x) - 1$	
$\mathrm{ch}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathrm{sh}(x)$	
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$	$\ln(1+x)$	$0 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$	$\mathrm{atan}(x)$	$0 < x < 1$

Dans le cas du logarithme et de l'arctangente, les séries associées ne convergent que pour $-1 < x < 1$. Il paraît plus judicieux de définir ces fonctions par leurs expressions intégrales

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad \mathrm{atan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

On retrouve alors les développements en série de ces fonctions pour $-1 < x < 1$ en intégrant le développement de $\frac{1}{t}$ en 1 ou $\frac{1}{1+t^2}$ en 0.

3.5 Lien entre dérivée et intégrale

Proposition 17 *Soit a, $b \in \mathbf{R}$ tels que $a \leq b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dérivable de dérivée intégrable sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Attention, il est crucial que f soit dérivable en tout point de $[a,b]$. Il existe des fonctions dérivables presque partout, dont la dérivée est nulle là où elle est définie, mais qui ne sont pas constantes. Ces fonctions ne sont donc pas égales à l'intégrale de leur dérivée.

Preuve
On commence par le cas où f' est bornée. On pose

$$f_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} \text{ si } x \leq b - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

La suite de fonctions (f_n) converge vers f' sur $[a,b[$ qui est donc borélienne. Pour $x \leq b - \frac{1}{n}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $\xi_n \in [x, x+1/n[$ tel que $f_n(x) = f'(\xi_n)$. La fonction f' est bornée, il existe donc une constante C telle que $|f_n(x)| \leq C$ pour tout n et x. Par convergence dominée,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{b-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx &= n\Big(\int_a^{b-\frac{1}{n}} f\Big(x+\frac{1}{n}\Big)\,dx - \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx\Big)\\
&= n\Big(\int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)\,dx - \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx\Big)\\
&= n\int_{b-\frac{1}{n}}^b f(x)\,dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de faire un changement de variable $x = a + \frac{t}{n}$ et d'appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure.

$$n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx = \int_0^1 f\Big(a+\frac{t}{n}\Big)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(a)\,dt = f(a).$$

De même à l'autre extrémité b. Le résultat est démontré dans le cas où la dérivée est bornée. La preuve dans le cas où la dérivée est intégrable est plus longue, elle est proposée en complément. Un exemple de fonction définie sur $[-1,1]$ dont la dérivée est intégrable mais pas bornée est donné par $f(x) = x^{\frac{3}{2}}\sin\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

3.6 Complément : fonctions de dérivée intégrable

On démontre la proposition précédente en toute généralité : une fonction dérivable dont la dérivée est intégrable est égale à l'intégrale de sa dérivée. Pour faire fonctionner l'argument donné plus haut, il suffit de trouver une fonction $\tilde{g}$ positive intégrable telle que
$$\left|\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}\right| \leq \tilde{g}(x)$$
pour tout $n > N$, N indépendant de x. L'emploi du théorème de convergence dominée est alors justifié.

Commençons par montrer qu'on peut trouver une fonction g positive semi-continue inférieurement telle que $f' \leq g$ sur $[a,b]$ et $\int g\,d\lambda < \infty$. Notons A_k, $k \in \mathbf{Z}$, l'ensemble des réels positifs dont le $k^{\text{ième}}$ chiffre en base 2 vaut 1. Nous avons la décomposition
$$y = \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^k\, \mathbf{1}_{A_k}(y).$$
Si $f'(x) \geq 0$, on peut donc écrire $f'(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^k\, \mathbf{1}_{(f'\in A_k)}(x)$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Anticipant sur la définition de la mesure de Lebesgue, donnée au prochain chapitre, on peut trouver pour chaque k un ouvert U_k union finie d'intervalles tel que
$$(f' \in A_k) \subset U_k, \qquad \lambda(U_k) \leq \lambda(f' \in A_k) + 1/4^{|k|}.$$
Posons
$$g = \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^k\, \mathbf{1}_{U_k}, \qquad \tilde{g} = g + \varepsilon.$$
La fonction g est semi-continue inférieurement car c'est un sup de fonctions semi-continues inférieurement. Elle est plus grande que f' et son intégrale est majorée par $\int |f'|\,d\mu + 2(b-a)$.

Comme l'intervalle $[a,b]$ est compact et g est semi-continue, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in [0,\delta[$ et tout $x \in [a,b]$, $g(x+h) \leq g(x)+\varepsilon$. D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver pour tout $n > \frac{1}{\delta}$ un réel $h \in [0,\delta[$ tel que
$$\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n} = f'(x+h) \leq g(x) + \varepsilon = \tilde{g}(x).$$
La minoration s'obtient en appliquant le même raisonnement à la fonction $-f$.

3.7 Exercices

exercice 1
On définit la fonction logarithme pour $x \geq 1$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Montrer par un changement de variable que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tout $x, y \geq 1$.
Indication : couper l'intégrale en x.

exercice 2
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Montrer que

$$f_r = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^n \ \mathbf{1}_{f^{-1}([\,r^n,\, r^{n+1}[)}$$

converge vers f simplement quand r tend vers 1 par valeurs supérieures. Montrer la formule

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{r \overset{>}{\to} 1} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^n \, \mu\Big(f^{-1}([r^n, r^{n+1}[\,)\Big).$$

Calculer à partir de cette formule $\int_{]0,1]} x^\alpha \, dx$ pour $\alpha > 0$.

exercice 3
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $a_n : X \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que pour tout $x \in X$, la série $\sum a_n(x)$ est alternée : les $|a_n(x)|$ forment une suite décroissante de réels qui tend vers 0, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a_k(x)$ et $a_{k+1}(x)$ sont de signes opposés. Alors

$$\int_X \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \Big) \ d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X a_n(x) \ d\mu(x).$$

exercice 4
Calculer la limite lorsque n tend vers l'infini des expressions suivantes :

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{nx^2}{nx+1} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{n+1}{x^2+nx+n} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{n}{nx^2+x+n} \, dx$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{n}{nx^2+nx+1} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^\infty \frac{n}{nx^2+x+n} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, dx$
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{n+1}{n+x} \, e^{-x} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^\infty \frac{nx+1}{n+1} \, e^{-x} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^\infty \frac{n \ e^{-nx}}{n+x} \, dx$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{nx+1}{nx^3-1} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}+1}{nx+1} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \, e^{\frac{x}{n}} \, dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+nx^2} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{n\sin(x)}{x+n} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x(n+x)} \, dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin x)^n}{\sqrt{x}} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\sin x)^n}{1+x^2} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\sin x)^n}{x(1+x)} \, dx$
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{n+x} \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 nx^n(1+x) \, dx$ $\qquad \displaystyle\int_0^\infty n^2 x \ e^{-nx} \, dx$

Chapitre 4

La mesure de Lebesgue

On construit la mesure de Lebesgue, qui généralise la notion de longueur sur $\mathbf{R}$, par une méthode due à C. Carathéodory. On montre ensuite que c'est la seule mesure borélienne qui coïncide avec la longueur sur les intervalles.

4.1 Généralisation de la notion de longueur

Pour mesurer la taille d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, nous allons partir des intervalles et de leurs longueurs. On pose pour $a, b \in \mathbf{R}$ et $a < b$,

$$l([a,b]) = l(\,]a,b[\,) = b - a.$$

On généralise alors la longueur à un sous-ensemble arbitraire $A \subset \mathbf{R}$ en considérant tous ses recouvrements par un nombre dénombrable d'intervalles.

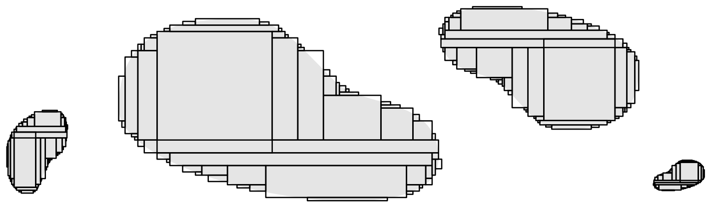
$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} l(I_j) \;\middle|\; (I_j)_{j\in\mathbf{N}} \text{ intervalles ouverts tels que } A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j \right\}$$

La borne inférieure est prise sur tous les recouvrements de A par des familles dénombrables d'intervalles ouverts. On procède de même pour le volume dans $\mathbf{R}^d$ en utilisant des pavés. Rappelons qu'un pavé est un produit d'intervalles. Son volume est égal au produit des longueurs de ses côtés.

$$P = \prod_{k=1}^{d} I_k, \quad vol(P) = \prod_{k=1}^{d} l(I_k).$$

Pour estimer le volume d'un sous-ensemble $A \subset \mathbf{R}^d$, on considère tous ses recouvrements par un nombre dénombrable de pavés.

$$\lambda^*_{\mathbf{R}^d}(A) = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} l(P_j) \;\middle|\; (P_j)_{j\in\mathbf{N}} \text{ pavés ouverts tels que } A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} P_j \right\}$$



On va se restreindre au cas de la droite réelle $\mathbf{R}$, le cas de $\mathbf{R}^d$ se traitant de manière similaire. Commençons par montrer que λ^* est bien une généralisation de la notion de longueur : $\lambda^*([a,b]) = l([a,b])$. Ceci découle de la proposition suivante.

Proposition 18 *Soit I_j, $j \in \mathbf{N}$, des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et a, b des réels. Si $[a,b]$ est inclu dans l'union des I_j, alors : $l([a,b]) \le \sum_{j\in\mathbf{N}} l(I_j)$.*

Preuve
Comme $[a,b]$ est compact, on peut passer à un sous-recouvrement et supposer que les $I_j =]a_j, b_j[$ sont en nombre fini. Démontrons le résultat par récurrence sur le nombre d'intervalles. Soit j_0 tel que $b_{j_0} = \max\{b_j\}$. Si I_{j_0} contient $[a,b]$ ou est disjoint de $[a,b]$, on conclut aisément. On peut donc supposer $a \le a_{j_0} \le b$. Comme b_{j_0} est supérieur à b, on a $[a,b]\backslash I_{j_0} = [a, a_{j_0}]$. L'intervalle $[a,b]\backslash I_{j_0}$ est recouvert par les n intervalles ouverts I_j, $j \ne j_0$. Par hypothèse de récurrence,
$$a_{j_0} - a \le \sum_{j\ne j_0} l(I_j)$$
Le résultat s'obtient en ajoutant la quantité $l(I_{j_0})$ aux deux termes de l'inégalité.

Vérifions à présent que la fonction $A \mapsto \lambda^*(A)$ est sous-additive.

Proposition 19 *pour tout $A \subset \mathbf{R}$ et $A_n \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, tels que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$,*
$$\lambda^*(A) \le \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda^*(A_n).$$

Preuve
Si $\lambda^*(A_n) = \infty$ pour un entier $n \in \mathbf{N}$, il n'y a rien à démontrer. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut trouver un recouvrement $(I_{j,n})_{j\in\mathbf{N}}$ de A_n tel qu'on ait la majoration $\sum_j l(I_{j,n}) - \varepsilon/2^n \le \lambda^*(A_n)$. Comme l'ensemble des $I_{j,n}$ recouvre A,
$$\lambda^*(A) \le \sum_{j,n} l(I_{j,n}) \le \sum_n (\lambda^*(A_n) + \varepsilon/2^n) \le \sum_n \lambda^*(A_n) + 2\varepsilon.$$
La proposition est démontrée.

La longueur est invariante par translation, il en va de même de la mesure extérieure λ^*. On a vu dans un complément précédent qu'il n'existe pas de mesure sur $\mathcal{P}(X)$ invariante par translation et donnant mesure 1 à l'intervalle $[0,1[$. la fonction λ^* n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbf{R})$. On peut malgré tout construire une tribu contenant les intervalles en restriction de laquelle λ^* est σ-additive.

4.2 Construction de Carathéodory

La construction de Carathéodory fonctionne pour toute fonction sous-additive. Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes ses parties.

Définition 16 *Une* mesure extérieure μ^* *est une fonction définie de* $\mathcal{P}(X)$ *dans* $[0,\infty]$ *telle que* $\mu^*(\emptyset)=0$*, et qui satisfait, pour tout* $A\subset X$ *et* $A_i\subset X$*,* $i\in\mathbf{N}$*, tels que* $A\subset\bigcup_{i\in\mathbf{N}}A_i$*,*

$$\mu^*(A)\leq\sum_{n\in\mathbf{N}}\mu^*(A_i).$$

La fonction λ^* vue auparavant est une mesure extérieure. Nous allons considérer une famille d'ensembles en restriction de laquelle on a l'additivité finie. On s'intéresse aux sous-ensembles $A\subset X$ tels que pour tout $B\subset X$ disjoint de A, $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$. Pour des raisons techniques, il vaut mieux prendre la définition suivante, un peu plus générale mais sans doute moins naturelle.

Définition 17 *Un ensemble* $A\subset X$ *est dit* mesurable *relativement à la mesure extérieure* μ^* *si pour tout* $E\subset X$*, on a l'égalité*

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\backslash A).$$

On obtient la propriété précédente en prenant $E=A\cup B$. Les ensembles mesurables relativement à λ^* sont appelés *ensembles Lebesgue-mesurables.* Nous verrons dans la suite que les intervalles sont de ce type.

Théorème 10 *L'ensemble des parties mesurables forme une tribu : l'ensemble vide est mesurable, le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable et une union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.*

Preuve
– Le premier point découle des égalités $E\backslash A^c=E\cap A$ et $E\cap A^c=E\backslash A$.
– Montrons que l'union de deux ensembles A et B mesurables est mesurable.

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\backslash A)\\ &= \mu^*(E\cap A)+\mu^*((E\backslash A)\cap B)+\mu^*(E\backslash A\backslash B)\\ &\geq \mu^*(E\cap(A\cup B))+\mu^*(E\backslash(A\cup B))\end{aligned}$$

car $E\cap(A\cup B)\subset(E\cap A)\cup((E\backslash A)\cap B)$ et $E\backslash A\backslash B=E\cap(A\cup B)$.
– On en déduit que $A\cup B$ et $A\backslash B$ sont mesurables si A et B sont mesurables.
– Soit A_i, $i\in\mathbf{N}$, une suite d'ensembles mesurables. Posons $B_i=A_i\backslash\cup_{j<i}A_j$. Les B_i sont mesurables, disjoints deux à deux et leur union coïncide avec celle des A_i. Il suffit donc de montrer que l'union des B_i est mesurable pour conclure.

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \backslash \coprod_{i \leq n} B_i) + \mu^*(E \cap \coprod_{i \leq n} B_i) \\
&= \mu^*(E \backslash \coprod_{i \leq n} B_i) + \mu^*(E \cap \coprod_{i \leq n-1} B_i) + \mu^*(E \cap B_n) \\
&= \mu^*(E \backslash \coprod_{i \leq n} B_i) + \sum_{i \leq n} \mu^*(E \cap B_i) \\
&\geq \mu^*(E \backslash \coprod_{i \in \mathbf{N}} B_i) + \sum_{i \leq n} \mu^*(E \cap B_i)
\end{aligned}
$$

Ceci est valide pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que l'union des B_i est mesurable :

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \backslash \coprod_{i \in \mathbf{N}} B_i) + \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu^*(E \cap B_i) \geq \mu^*(E \backslash \coprod_{i \in \mathbf{N}} B_i) + \mu^*(E \cap \coprod_{i \in \mathbf{N}} B_i).$$

Montrons à présent que la restriction de μ^* à la tribu de ses ensembles mesurables est une mesure.

Théorème 11 *Soit A_i, $i \in \mathbf{N}$, une suite d'ensembles μ^*-mesurables deux à deux disjoints. Alors :*

$$\mu^*\Big(\coprod_{i \in \mathbf{N}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu^*(A_i).$$

Preuve
Il suffit de passer à la limite en n dans les inégalités suivantes.

$$\sum_{i \leq n} \mu^*(A_i) = \mu^*\Big(\coprod_{i \leq n} A_i\Big) \leq \mu^*\Big(\coprod_{i \in \mathbf{N}} A_i\Big) \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} \mu^*(A_i).$$

4.3 Mesure de Lebesgue sur R

Nous pouvons maintenant définir la mesure de Lebesgue : c'est la restriction de λ^* à la tribu de ses ensembles mesurables, on la note λ. Il nous faut montrer que les intervalles sont mesurables, ce qui impliquera que tous les sous-ensembles boréliens de $\mathbf{R}$ sont des ensembles Lebesgue-mesurables.

Proposition 20 *Les intervalles et les boréliens de $\mathbf{R}$ sont Lebesgue-mesurables.*

Preuve
Commençons par montrer que si k intervalles disjoints I_1, ..., I_k sont inclus dans un intervalle $[a, b]$, alors $\sum l(I_i) \leq l([a, b])$. Soit a_i, b_i les extrémités de I_i. Réordonnons les a_i de façon à ce que $a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_k$. Comme les I_i sont disjoints, on a : $b_1 \leq a_2$, ..., $b_{k-1} \leq a_k$. Par conséquent,

$$\sum l(I_i) = -a_1 + b_1 - a_2 + b_2 ... + -a_k + b_k \leq -a_1 + b_k \leq b - a.$$

Ce résultat s'étend à un nombre dénombrable d'intervalles en passant à la limite.

Soit maintenant $E \subset \mathbf{R}$. Montrons que $\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap [a,b]) + \lambda^*(E \backslash [a,b])$. On peut se restreindre au cas où $\lambda^*(E)$ est fini. Soit $\varepsilon > 0$ et I_j une suite d'intervalles dont l'union recouvre E, et telle que $\lambda^*(E) \geq \sum l(I_j) - \varepsilon$. Quitte à redécouper les intervalles, on peut supposer qu'ils sont tous de longueur inférieure à ε. Enfin, on peut les supposer disjoints, quitte à remplacer I_j par les intervalles composant $I_j \backslash \cup_{i<j} I_i$. On distingue trois types d'intervalles :
– ceux qui sont contenus dans $[a,b]$;
– ceux qui intersectent $[a,b]$ et $[a,b]^c$; ils sont inclus dans $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$;
– ceux qui sont contenus dans $[a,b]^c$.
Les intervalles du premier et du second type recouvrent $E \cap [a,b]$, ceux de second et troisième type recouvrent $E \backslash [a,b]$. Enfin, la somme des longueurs des intervalles du second type est inférieure à 4ε. La proposition est démontrée.

Les résultats qui précèdent s'étendent à la mesure $\lambda_{\mathbf{R}^d}$, la mesurabilité des pavés est traitée en complément à l'aide d'un critère général dû à Carathéodory.

4.4 Tribus complètes

Remarquons, à partir de la définition, que tout ensemble de mesure extérieure nulle est mesurable et qu'il en va de même de tous ses sous-ensembles, qui sont eux aussi de mesure nulle. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $\mathcal{T}$ est *complète* relativement à μ si tout ensemble inclu dans un ensemble de $\mathcal{T}$ de mesure nulle est dans $\mathcal{T}$:

$$\{A \subset X \mid \exists\, B \in \mathcal{T} \text{ tel que } \mu(B) = 0 \text{ et } A \subset B\} \subset \mathcal{T}.$$

La tribu des ensembles mesurables par rapport à une mesure extérieure est donc complète. Il est possible de compléter une tribu $\mathcal{T}$ en posant

$$\bar{\mathcal{T}} = \{B \subset X \mid \exists\, A,\, C \in \mathcal{T} \text{ tels que } A \subset B \subset C \text{ et } \mu(C \backslash A) = 0\}.$$

On vérifie aisément que $\bar{\mathcal{T}}$ est bien une tribu contenant $\mathcal{T}$ et qu'elle est complète. La mesure μ s'étend à cette tribu en posant $\mu(B) = \mu(A) = \mu(C)$. Lorsque X est un espace topologique muni d'une mesure μ borélienne, on définit la tribu des *ensembles μ-mesurables* comme la complétion de la tribu des boréliens de X relativement à μ. Les ensembles λ^*-mesurables et λ-mesurables coïncident alors.

Proposition 21 *La tribu des ensembles λ^*-mesurables est la complétion de la tribu des boréliens relativement à la mesure de Lebesgue.*

Preuve
Soit A un ensemble Lebesgue-mesurable, posons $A_n = A \cap [n, n+1[$. Pour tout k, on peut trouver un ouvert $U_{n,k}$ contenant A_n tel que $\mu(U_{n,k} \backslash A_n) < 1/k$. Posons $C_n = \cap_k U_{n,k}$. Nous avons $A_n \subset C_n$ et $\mu(C_n \backslash A_n) = 0$. Finalement, on prend $C = \cup_N C_N$ et on en déduit $A \subset C$ et $\mu(C \backslash A) = 0$. On applique le même raisonnement à A^c pour obtenir un borélien $B \subset A$ tel que $\mu(A \backslash B) = 0$.

4.5 Unicité et approximation

Théorème 12 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ contenant l'ensemble vide et satisfaisant :*
- $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$ et $A^c \in \mathcal{A}$,
- pour $i \in \mathbf{N}$, il existe $X_i \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(X_i) < \infty$ et $X = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} X_i$.
On suppose que $\mathcal{A}$ engendre la tribu $\mathcal{T}$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{T}$ de mesure finie et tout $\varepsilon > 0$, il existe $A' \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A \triangle A') < \varepsilon$.

Preuve
On commence par le cas où X est de mesure finie. Posons

$$\mathcal{T}' = \{A \in \mathcal{T} \mid \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A' \in \mathcal{A} \text{ tel que } \ \mu(A \triangle A') < \varepsilon\}$$

Cet ensemble $\mathcal{T}'$ contient $\mathcal{A}$, il suffit de montrer que c'est une tribu pour conclure. L'invariance par passage au complémentaire vient de l'égalité $A^c \triangle A'^c = A \triangle A'$.

Il reste à vérifier l'invariance par union dénombrable. Soit $A_i \in \mathcal{T}'$, $i \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A'_i \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A_i \triangle A'_i) \leq \varepsilon/2^i$. L'inclusion

$$\bigcup_{i \in \mathbf{N}^*} A_i \ \triangle \bigcup_{i \in \mathbf{N}^*} A'_i \ \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}^*} A_i \triangle A'_i$$

montre que $\mu(\bigcup A_i \triangle \bigcup A'_i) \leq \sum \varepsilon/2^i = \varepsilon$. Enfin,

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A'_i \triangle \bigcup_{i \leq n} A'_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} A'_i\Big) - \mu\Big(\bigcup_{i \leq n} A'_i\Big)$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini et on conclut en notant que $\bigcup_{i \leq n} A'_i \in \mathcal{A}$.

Lorsque X est de mesure infinie, quitte à remplacer X_i par $\cup_{j \leq i} X_j$, on peut supposer les X_i croissants pour l'inclusion. Par convergence croissante, pour tout A de mesure finie, on peut trouver i tel que $\mu(A \cap X_i) > \mu(A) - \varepsilon$ et le raisonnement précédent s'applique en restriction à X_i.

Corollaire 4 *Sous les hypothèses précédentes, supposons qu'il existe une mesure ν sur $\mathcal{T}$ qui coïncide avec μ sur les éléments de $\mathcal{A}$ de μ-mesure finie. Alors $\mu = \nu$.*

Preuve
On peut supposer les X_i croissants comme précédemment. Soit $A \in \mathcal{T}$. Par convergence croissante, il suffit de montrer que $\mu(A \cap X_i) = \nu(A \cap X_i)$ pour tout i. Posons $A_i = A \cap X_i$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A' \in \mathcal{A}$ tel que $(\mu + \nu)(A' \triangle A_i) < \varepsilon$. Comme $\mu(A') = \nu(A')$, on conclut à l'aide des inégalités suivantes.

$$|\mu(A_i) - \nu(A_i)| \leq |\mu(A_i) - \mu(A')| + |\nu(A') - \nu(A_i)| \leq |\mu(A_i \triangle A')| + |\nu(A' \triangle A_i)| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit, en prenant pour $\mathcal{A}$ la famille des unions finies d'intervalles,

Corollaire 5 *La mesure de Lebesgue est l'unique mesure définie sur la tribu des boréliens de $\mathbf{R}$ qui coïncide avec la longueur usuelle sur les intervalles bornés.*

4.6 Complément : lemme de la classe monotone

Il est possible de démontrer l'unicité de la mesure de Lebesgue en utilisant un lemme de théorie des ensembles qui ne fait pas appel à la notion de mesure. Pour cela, considérons deux mesures μ et ν définies sur une tribu $\mathcal{T}$ de parties de X. Que peut-on dire des parties de $\mathcal{T}$ sur lesquelles μ et ν coïncident ? Supposons $\mu(X)$ et $\nu(X)$ finies et posons

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T} \mid \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Cet ensemble $\mathcal{M}$ satisfait les propriétés suivantes.

(1) Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{M}$ croissante pour l'inclusion, $\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i$ est dans $\mathcal{M}$.

(2) Pour tout $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{M}$ décroissante pour l'inclusion, $\bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}} A_i$ est dans $\mathcal{M}$.

Cela découle de la convergence croissante et décroissante :

$$\mu(\bigcup A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \lim_{i\to\infty} \nu(A_i) = \nu(\bigcup A_i),$$

de même pour l'intersection. Un ensemble de parties qui satisfait les propriétés (1) et (2) est appelé une *classe monotone*. On vérifie comme dans le cas des tribus qu'une intersection quelconque de classes monotones est encore une classe monotone, ce qui permet de parler de la classe monotone engendrée par un ensemble quelconque de parties.

Lemme 3 (classe monotone) *Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X stable par union finie et passage au complémentaire. Alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ est une tribu.*

De là, on voit que si deux mesures finies coïncident sur un ensemble de parties de X stable par union finie et passage au complémentaire, elles coïncident en fait sur la tribu engendrée par cet ensemble de parties. Un ensemble de parties de X contenant l'ensemble vide et stable par union finie et passage au complémentaire est appelé un *clan* ou une *algèbre* de parties de X.

Preuve du lemme de la classe monotone
Notons $\mathcal{M}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A^c \in \mathcal{M}\}$. On vérifie que $\mathcal{N}$ est une classe monotone à partir de la définition. Comme $\mathcal{A}$ est inclu dans $\mathcal{N}$, nous avons $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Ceci montre que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire.

Soit $A \subset X$ et $\mathcal{M}_A = \{B \subset X \mid B \cap A \in \mathcal{M}\}$. Là encore, $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone. Si de plus A est dans $\mathcal{A}$, elle contient $\mathcal{A}$, elle doit donc aussi contenir $\mathcal{M}$. En conséquence, pour tout $B \in \mathcal{M}$ et tout $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ est dans $\mathcal{M}$. Cela montre que $\mathcal{M}_B$ contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$. La classe $\mathcal{M}$ est stable par intersection finie, et grâce au point (2), stable par intersection dénombrable. C'est donc une tribu et le théorème est démontré.

4.7 Complément : critère de Carathéodory

À quelle condition les sous-ensembles boréliens d'un espace métrique sont-ils mesurables relativement à une mesure extérieure donnée ? Le critère qui suit est dû à C. Carathéodory. Définissons une « distance » entre deux parties A et B d'un espace métrique par $d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

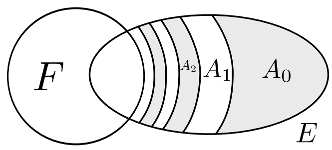
Théorème 13 *Soit X un espace métrique, μ^* une mesure extérieure sur $\mathcal{P}(X)$. Si pour tout A, $B \subset X$ tels que $d(A,B) > 0$ on a l'égalité*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

alors tous les sous-ensembles boréliens de X sont μ^*-mesurables.

Preuve
Il suffit de montrer qu'un fermé $F \subset X$ est μ^*-mesurable. Considérons $E \subset X$, on veut l'inégalité $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \backslash F)$. Découpons $E \backslash F$ en tranches.

$A_0 = \{x \in E \mid 1 \leq d(x,F)\}$
et pour $i > 0$,
$A_i = \{x \in E \mid 2^{-i} \leq d(x,F) < 2^{-i+1}\}$.



Nous avons $E \backslash F = \bigcup A_j$. Notons que $d(A_i, A_j) > 0$ si $i \leq j-2$ ce qui implique

$$\sum_{i=0}^{n} \mu^*(A_{2i}) = \mu^*\Big(\bigcup_0^n A_{2i}\Big) < \mu^*(E \backslash F).$$

On en déduit que la série $\sum \mu^*(A_{2i})$ est convergente et le même raisonnement montre la convergence de $\sum \mu^*(A_{2i+1})$. Par sous-additivité, on a l'encadrement

$$\mu^*\Big(\bigcup_0^n A_i\Big) \leq \mu^*(E \backslash F) \leq \mu^*\Big(\bigcup_0^n A_i\Big) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

et comme la dernière série tend vers 0, $\mu^*\Big(\bigcup_0^n A_i\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu^*(E \backslash F)$.
On a également $d\Big(E \cap F,\ \bigcup_0^n A_i\Big) > 0$ si bien que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\Big(E \cap F \cup \bigcup_0^n A_i\Big) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*\Big(\bigcup_0^n A_i\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \backslash F).$$

Le fermé F est bien μ^*-mesurable.

Ce critère s'applique par exemple aux mesures extérieures $\lambda_{\mathbf{R}^d}$. De fait, considérons un recouvrement de $A \cup B$ dont la somme des volumes est proche de la mesure de $A \cup B$. On peut redécouper les pavés de façon à ce qu'ils aient tous un diamètre inférieur à $d(A,B)/4$. Aucun pavé ne peut alors intersecter à la fois A et B. Ce recouvrement est donc composé de deux sous-recouvrements de A et B sans pavés en commun, dont la somme des volumes majorent les mesures de A et B.

4.8 Exercices

exercice 1
Montrer que toute fonction Lebesgue-mesurable coïncide presque partout avec une fonction borélienne.

exercice 2
Soit $F \subset [0,1]$ un sous-ensemble fermé tel que $\lambda(F) = 1$. Montrer que $F = [0,1]$.

exercice 3
Soit n intervalles ouverts I_1, ..., $I_n \subset \mathbf{R}$ qui recouvrent $\mathbf{Q} \cap [0,1]$. Montrer que la somme de leurs longueurs est plus grande que 1 : $\sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j) \geq 1$.

On se donne $\varepsilon > 0$. Construire une suite d'intervalles ouverts $(I_j)_{j\in\mathbf{N}}$ dont l'union recouvre $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ et dont la somme des longueurs est inférieure à ε.

exercice 4
On se place sur $\mathbf{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.

– Construire un ouvert non borné qui soit de mesure strictement positive finie.

– Pour tout $\varepsilon > 0$, construire un ouvert dense dont la mesure est inférieure à ε.

– Construire un ensemble de mesure nulle qui soit intersection dénombrable d'ouverts denses. Un tel ensemble peut-il être dénombrable ?

exercice 5
Soit ε un nombre réel positif, m un entier positif. Pourquoi les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants sont-ils Lebesgue-mesurables ? Calculer leur mesure de Lebesgue.

$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n, n+1/2^n[$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} [n^2, n^2+1/2^n[$

$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [1/2^n, 1-1/2^n]$

$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n, n+1/2^{n-1}]$

$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [n-\varepsilon, n+\varepsilon]$

$\{x \in [-4,4] \mid x^3 - x \geq 0\}$

$\bigcup_{n\in\mathbf{N}}]\sqrt{n}, \sqrt{n}+1/2^n[$

$\bigcup_{n=0}^{+\infty} [n-1/2^n, n+1/2^n[$

$\bigcup_{n=4}^{+\infty} \left[n, n+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [1-\operatorname{atan}(n), 1+e^{-n}]$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [-n-5, n^2-6n+6]$

$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [1-1/2^n, 3-1/2^n]$

$\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \leq \frac{x^2}{m} + 1\}$

$\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \leq \frac{x^2}{n} + 1\}$

$\{x \in \mathbf{R}_+ \mid x \leq \frac{e^x}{m} + 1\}$

$\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \{x \in \mathbf{R}_+ \mid x \leq \frac{e^x}{n} + 1\}$

$\bigcup_{x\in[0,1]} [x, 2]$

$\bigcap_{x\in[0,1]} [x, 2]$

Chapitre 5

Intégrales multiples

Ce chapitre est consacré à l'intégration des fonctions dépendant de plusieurs variables. On définit le produit de mesures et on démontre la formule de Fubini, permettant d'intervertir l'ordre d'intégration. La formule d'intégration par partie admet une preuve simple en passant par les intégrales multiples. On termine par la preuve de la formule de changement de variables dans le cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

5.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

On commence par deux applications du théorème de convergence dominée.

Théorème 14 (continuité sous le signe intégral) *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et T un espace métrique. Soit $f : X \times T \to \mathbf{C}$ une fonction telle que*

- pour tout $t \in T$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable,

- pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue,

- il existe $g : X \to [0, \infty]$ intégrable *tel que pour tout $t \in T$, $|f(x,t)| \leq g(x)$.*

Alors l'application $t \mapsto \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$ est continue pour tout $t \in T$:

$$\lim_{s \to t} \int_X f(x,s)\, d\mu(x) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

Preuve
Soit $t \in T$ et t_n une suite qui converge vers t. La suite $|f(x,t_n)|$ est majorée par $g(x)$ qui est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f(x,t_n)\, d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} f(x,t_n)\, d\mu(x) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

On peut aussi dériver sous le signe intégral.

Théorème 15 (dérivabilité sous le signe intégral) *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. Soit $f : X \times I \to \mathbf{C}$ une fonction telle que*

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable,

- pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable,

- il existe $g : X \to [0, \infty]$ intégrable *tel que pour tout $t \in I$, $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq g(x)$.*

Alors l'application $t \mapsto \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$ est dérivable pour tout $t \in I$ et

$$\frac{d}{dt} \int_X f(x,t)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x).$$

Preuve
Soit $t \in I$, (t_n) une suite qui tend vers t et $F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$. On cherche à montrer la convergence

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\, d\mu(x) \xrightarrow[t_n \to t]{} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x).$$

Posons $f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$. La suite (f_n) converge simplement vers $\frac{\partial}{\partial t} f$ et elle est bornée par $\sup_{t \in I} |\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq g(x)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On conclut en appliquant le théorème de convergence dominée.

Contre-exemple
Sans l'hypothèse de domination au niveau de la dérivée, l'interversion dérivée intégrale peut échouer. Considérons

$$f(x,t) = \frac{t^3 x}{(x^2 + t^2)^2} \text{ si } (x,t) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

On vérifie que $\int_0^1 f(x,t)\, dx = \frac{t}{2(1+t^2)}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$ si bien que

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 f(x,t)\, dx_{\,|\, t=0} \neq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\, dx.$$

5.2 Mesure produit

Définition 18 *Un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est dit σ-fini s'il existe des ensembles $X_i \in \mathcal{T}$, $i \in \mathbf{N}$, tous de mesure finie et qui recouvrent X tout entier : $X = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} X_i$.*

Remarquons qu'on peut supposer les X_i croissants pour l'inclusion si besoin est en les remplaçant par $\cup_{j \leq i} X_i$ ou encore disjoints en prenant $X_i \setminus \cup_{j<i} X_j$.

Notons $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ la tribu engendrée par les produits $A \times B$, $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{S}$.

Théorème 16 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors il existe une unique mesure notée $\mu \otimes \nu$ sur cette tribu qui satisfait pour tout $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{S}$,*

$$\mu \otimes \nu\,(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Preuve
On utilise la construction de Carathéodory. On part de la mesure extérieure définie sur $\mathcal{P}(X \times Y)$ par

$$\mu \otimes \nu^*(C) = \inf\Big\{ \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu(A_n)\,\nu(B_n) \;\Big|\; A_n \in \mathcal{T},\ B_n \in \mathcal{S} \text{ tels que } C \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \times B_n \Big\}$$

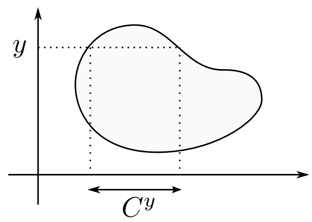
où la borne inférieure porte sur tous les recouvrements de C par un nombre dénombrable de rectangles $A_n \times B_n$ avec $A_n \in \mathcal{T}$ et $B_n \in \mathcal{S}$. On note $\mu \otimes \nu$ la mesure associée. Il faut vérifier que les rectangles $A \times B$ sont $\mu \otimes \nu$-mesurables et que leur mesure est bien égale au produit $\mu(A)\,\nu(B)$.

Introduisons quelques notations. Pour tout $C \subset X \times Y$, nous allons considérer la tranche $C^y = \{x \in X \mid (x, y) \in C\} \subset X$. Pour toute suite $(C_i)_{i \in \mathbf{N}}$, nous avons

$$\Big(\bigcup C_i\Big)^y = \bigcup C_i^y,$$

$$\Big(\coprod C_i\Big)^y = \coprod C_i^y,$$

$$\Big(\bigcap C_i\Big)^y = \bigcap C_i^y.$$



Pour un produit, $(A \times B)^y = A$ si $y \in B$ et $(A \times B)^y = \varnothing$ sinon. Posons

$$\rho(C) = \int_Y \mu(C^y)\, d\nu(y)$$

pour $C \subset X \times Y$ tel que $C^y \in \mathcal{T}$ pour tout $y \in Y$ et tel que la fonction $y \mapsto \mu(C^y)$ est $\mathcal{S}$-mesurable, afin que l'intégrale soit bien définie.

Enfin, notons $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ l'ensemble des parties de $X \times Y$ qui sont unions dénombrables de rectangles $A \times B$, $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{S}$. Remarquons qu'une telle partie peut s'écrire comme une union dénombrable de rectangles disjoints deux à deux. On obtient une telle décomposition par récurrence en notant d'une part que l'intersection de deux rectangles est un rectangle, et d'autre part qu'un rectangle privé d'un rectange est l'union disjointe d'un nombre fini de rectangles.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times B \ \coprod\ (A \cap C) \times (B \setminus D)$$

Le lemme suivant va nous permettre de calculer la mesure d'un produit.

Lemme 4 $\forall C \subset X \times Y, \quad \mu \otimes \nu^*(C) = \inf\{\rho(V) \mid V \in \mathcal{R} \text{ tel que } C \subset V\}.$

Preuve
Soit $V \in \mathcal{R}$ tel que $C \subset V$. L'ensemble V est de la forme $\coprod A_i \times B_i$. Nous avons

$$\rho(V) = \int_Y \mu(V^y)\, d\nu(y) = \int_Y \mu\Big(\coprod (A_i \times B_i)^y\Big)\, d\nu(y) = \int_Y \sum_i \mu\Big((A_i \times B_i)^y\Big)\, d\nu(y).$$

De l'égalité $\mu\Big((A_i \times B_i)^y\Big) = \mu(A_i)\mathbf{1}_{B_i}(y)$, nous en déduisons $\rho(V) = \sum_i \mu(A_i)\,\nu(B_i)$. Ceci montre que $\inf_V \rho(V) \geq \mu \otimes \nu^*(C)$. Le même calcul montre que si $C \subset \bigcup A_i \times B_i$, alors $\rho(V) \leq \sum_i \mu(A_i)\,\nu(B_i)$, ce qui donne l'autre inégalité.

Corollaire 6 $\mu \otimes \nu^*(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$.

Preuve
Soit $V \in \mathcal{R}$ tel que $A \times B \subset V$. Nous avons $\rho(A \times B) \leq \rho(V)$.

$$\rho(A \times B) = \int_Y \mu\Big((A \times B)^y\Big)\, d\nu(y) = \int_Y \mu(A)\mathbf{1}_B(y)\, d\nu(y) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Donc $\rho(V) \geq \mu(A)\,\nu(B)$ et par le lemme, $\mu \otimes \nu^*(A \times B) = \inf_V \rho(V) \geq \mu(A)\,\nu(B)$. Comme $A \times B$ se recouvre lui-même, nous avons également l'autre inégalité.

Proposition 22 *Pour tout $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{S}$, $A \times B$ est $\mu \otimes \nu^*$-mesurable.*

Preuve
Soit $E \subset X \times Y$ tel que $\mu \otimes \nu^*(E) < \infty$ et $V \in \mathcal{R}$ contenant E. Les ensembles $V \setminus A \times B$ et $V \cap A \times B$ sont dans $\mathcal{R}$ ce qui implique

$$\mu \otimes \nu^*(E \setminus A \times B) \leq \rho(V \setminus A \times B), \quad \mu \otimes \nu^*(E \cap A \times B) \leq \rho(V \cap A \times B).$$

On a de plus $V = (V \setminus A \times B) \coprod (V \cap A \times B)$, d'où

$$\mu(V^y) = \mu\Big((V \setminus A \times B)^y\Big) + \mu\Big((V \cap A \times B)^y\Big)$$

puis en intégrant, $\rho(V) = \rho(V \setminus A \times B) + \rho(V \cap A \times B)$.

La mesurabilité découle alors de l'inégalité

$$\mu \otimes \nu^*(E) = \inf_V \rho(V) \geq \mu \otimes \nu^*(E \setminus A \times B) + \mu \otimes \nu^*(E \cap A \times B).$$

Ceci termine la preuve de l'existence de la mesure produit. La preuve de l'unicité est similaire à celle donnée au chapitre précédent pour la mesure de Lebesgue.

Exemple
On peut définir la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$ en faisant le produit d fois de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ avec elle-même : $\lambda_{\mathbf{R}^d} = \lambda_{\mathbf{R}} \otimes ... \otimes \lambda_{\mathbf{R}}$.

5.3 Théorème de Fubini

Théorème 17 (Fubini) *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et f une fonction définie sur le produit $X \times Y$ à valeurs dans $[0, \infty]$ ou $\mathbf{C}$ et mesurable relativement à la tribu $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$. On la suppose de plus intégrable relativement à $\mu \otimes \nu$ si elle est à valeurs complexes. Alors*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu\otimes\nu(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\Big) d\mu(x)$$
$$= \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\Big) d\nu(y).$$

Lemme 5 *Pour tout $C \subset X \times Y$, il existe $R_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbf{N}$, tels que $C \subset \bigcap_i R_i$ et*

$$\mu\otimes\nu^*(C) = \mu\otimes\nu^*\Big(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} R_i\Big) = \rho\Big(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} R_i\Big).$$

Preuve
Remarquons que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{R}$ est encore dans $\mathcal{R}$ en vertu de l'égalité

$$\Big(\bigcup_i A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i \bigcup_j A_i \cap B_j.$$

Comme $\mu\otimes\nu^*(C) = \inf_V \rho(V)$, on peut trouver des $R_i \in \mathcal{R}$ contenant C tels que $\rho(R_i)$ converge vers $\mu\otimes\nu^*(C)$. Quitte à remplacer les R_i par $\cap_{j\leq i} R_j$, on peut les supposer décroissants pour l'inclusion. Considérons le cas où C de mesure finie, auquel cas on peut aussi supposer $\rho(R_i)$ fini. Par le théorème de convergence décroissante, la suite $\mu(R_i^y)$ décroît vers $\mu(\bigcap_i R_i^y)$ et on obtient en intégrant, $\rho(R_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \rho(\bigcap R_i)$. Nous avons donc pour tout k,

$$\rho(R_k) \geq \mu\otimes\nu^*(\bigcap R_i) \geq \mu\otimes\nu^*(C) = \rho(\bigcap R_i).$$

Comme $\rho(R_k)$ tend vers $\rho(\bigcap R_i)$, ces inégalités sont des égalités. Lorsque C est de mesure infinie, on peut prendre $R_i = X \times Y$ pour tout i.

Démontrons à présent le théorème de Fubini pour les fonctions indicatrices.

Proposition 23 *Pour tout $C \subset X \times Y$ $\mu\otimes\nu^*$-mesurable, $\mu\otimes\nu(C) = \rho(C)$.*

Preuve
Supposons C de mesure finie. Par le lemme, on peut trouver $W = \cap_i R_i$ tels que $R_i \in \mathcal{R}$, $C \subset W$ et $\mu\otimes\nu(C) = \mu\otimes\nu(W) = \rho(W)$. On a donc $\mu\otimes\nu(W \setminus C) = 0$. Il existe aussi W' contenant $W \setminus C$ tel que $\mu\otimes\nu(W\setminus C) = \rho(W')$. On en déduit $\rho(W\setminus C) \leq \rho(W') = 0$ puis par définition de ρ,

$$\mu\Big((W\setminus C)^y\Big) = 0 \text{ pour presque tout } y \in Y,$$

$$\mu(\{x \in X \mid (x,y) \in W\}) = \mu(\{x \in X \mid (x,y) \in C\}).$$

Il suffit d'intégrer par rapport à y pour conclure. Lorsque C est de mesure infinie, on utilise la σ-finitude de X et Y. On peut trouver deux suites croissantes (X_i) et (Y_i) qui recouvrent X et Y et dont les éléments sont de mesure finie. On a alors $\rho(C\cap X_i\times Y_i)=\mu\otimes\nu(C\cap X_i\times Y_i)$ et on utilise la convergence croissante.

Nous venons de montrer que $\int_{X\times Y}\mathbf{1}_C\,d\mu\otimes\nu=\int_Y\Big(\int_X\mathbf{1}_C(x,y)\,d\mu(x)\Big)d\nu(y)$ et quitte à intervertir X et Y, $\int_{X\times Y}\mathbf{1}_C\,d\mu\otimes\nu=\int_X\Big(\int_Y\mathbf{1}_C(x,y)\,d\nu(y)\Big)d\mu(x)$. C'est le théorème de Fubini pour la fonction $\mathbf{1}_C$. Par linéarité, il est aussi vrai pour les fonctions étagées, puis par convergence croissante pour les fonctions mesurables positives. Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, il suffit de décomposer en parties positives et négatives et en parties réelles et complexes.

Exemple
Montrons que l'intégrale d'une fonction intégrable $f:X\to\mathbf{R}_+$ correspond bien à l'aire sous le graphe de la fonction en appliquant le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned}\mu\otimes\lambda(\{(x,t)\in X\times\mathbf{R}_+\mid 0\le t\le f(x)\}) &= \textstyle\int_X\int_{\mathbf{R}_+}\mathbf{1}_{(0\le t\le f(x))}(x,t)\,d\lambda(t)\,d\mu(x)\\ &= \textstyle\int_X\Big(\int_{[0,f(x)]}d\lambda\Big)\,d\mu(x)=\int_X f\,d\mu.\end{aligned}$$

5.4 Intégration par partie

Théorème 18 *Soit a, $b\in\mathbf{R}\cup\infty$, $a\ge b$, μ et ν deux mesures σ-finies définies sur la tribu des boréliens de $[a,b[$. On considère deux fonctions f, g boréliennes définies sur $[a,b[$, à valeurs dans $[0,\infty]$. Alors*

$$\int_{[a,b[}f(x)\Big(\int_{[a,x[}g(y)\,d\nu(y)\Big)d\mu(x)+\int_{[a,b[}g(y)\Big(\int_{[a,y]}f(x)\,d\mu(x)\Big)d\nu(y)$$
$$=\int_{[a,b[}f(x)\,d\mu(x)\ \int_{[a,b[}g(y)\,d\nu(y).$$

Le résultat est aussi vrai si f et g sont à valeurs complexes et intégrables par rapport à μ et ν respectivement.

Remarques
Si on prend $a=0$, $b=n+1\in\mathbf{N}$ et pour ν et μ la mesure de comptage sur le sous-ensemble $\{0,...,n\}\subset[a,b[$, on obtient la règle d'Abel pour les séries. Si on prend pour μ et ν la mesure de Lebesgue sur $[a,b[$ et pour f et g des fonctions intégrables qui sont les dérivées de deux fonctions F et G, on retombe sur la formule d'intégration par partie classique pour F et G.

Preuve
D'après le théorème de Fubini, le premier terme de la formule vaut

$$\int_{[a,b[}f(x)\int_{[a,x[}g(y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)=\int_{[a,b[^2}f(x)\,g(y)\,\mathbf{1}_{(a\le y<x)}(x,y)\ d\nu(y)\,d\mu(x)$$

Le second terme est égal à $\int_{[a,b[^2}f(x)\,g(y)\,\mathbf{1}_{(a\le x\le y)}\ d\nu(y)\,d\mu(x)$. La formule se déduit alors de l'identité $\mathbf{1}_{(a\le y<x<b)}+\mathbf{1}_{(a\le x\le y<b)}=\mathbf{1}_{[a,b[^2}$.

5.5 Formule du changement de variables

On revient à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. D'après la définition de la mesure produit, nous voyons que la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$ est égale au produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ avec elle-même d fois : $\lambda_{\mathbf{R}^d} = \lambda_{\mathbf{R}} \otimes ... \otimes \lambda_{\mathbf{R}}$.

Le théorème de Fubini redonne donc la formule classique d'intégration itérée sur $\mathbf{R}^d$:

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \Big(... \int_{\mathbf{R}} f(x_1, ..., x_d)\,dx_1 ... \Big)\,dx_d$$

Le deuxième outil clef dans le calcul des intégrales multiples sur $\mathbf{R}^d$ est la formule de changement de variables. On commence par le cas linéaire.

Théorème 19 (changement de variables linéaire) *Soit $L : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application linéaire et $A \subset \mathbf{R}^d$ un ensemble borélien. Alors*

$$\lambda(L(A)) = |\mathit{d\acute{e}t}(L)|\,\lambda(A).$$

Preuve
Pour tout pavé $P \subset \mathbf{R}^d$, on a $\mathrm{vol}(L(P)) = |\mathrm{d\acute{e}t}(L)|\,\mathrm{vol}(P)$ par définition du déterminant. La formule générale découle alors de la définition de la mesure de Lebesgue, à partir des recouvrements par des pavés.

Rappelons qu'un difféomorphisme φ défini entre deux ouverts U et V de $\mathbf{R}^d$ est une application C^1 bijective dont l'inverse est aussi C^1. On définit alors son jacobien comme la valeur absolue du déterminant de sa différentielle :

$$J_\varphi(x) = |\mathrm{d\acute{e}t}(d_x\varphi)|.$$

Ce déterminant se calcule en coordonnées. Notons $\varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_d(x))$, la différentielle $d_x\varphi$ admet pour matrice $\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right\}_{i,j}$.

Théorème 20 (formule du changement de variables) *Soit U, V deux ouverts de $\mathbf{R}^d$ et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme C^1. Alors pour toute fonction $f : V \to [0, \infty]$ borélienne ou toute fonction $f : V \to \mathbf{C}$ intégrable,*

$$\int_V f(y) d\lambda(y) = \int_U f(\varphi(x)) J_\varphi(x)\,d\lambda(x).$$

La preuve repose sur le fait que la transformation φ est proche de sa différentielle localement. Ce fait est formalisé par le lemme qui suit.

Lemme 6 *Soit $K \subset U$ compact et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$,*

$$\lambda(\varphi(\,\overline{B(x,\delta)}\,)) \leq (1+\varepsilon)^d\,\lambda(d_x\varphi(B(x,\delta))).$$

Preuve
La fonction $(x,y) \mapsto \|(d_x\varphi)^{-1}d_y\varphi\|$ est uniformément continue sur un voisinage compact de $K \times K$ inclu dans $U \times U$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et $\xi \in B(x,\delta)$, $\|(d_x\varphi)^{-1}d_\xi\varphi\| < 1+\varepsilon$.

Soit $y \in \overline{B(x,\delta)}$, posons $x_t = x + t(y-x)$ et utilisons la formule de Taylor.

$$\varphi(y) = \varphi(x) + d_x\varphi\Big(\int_0^1 (d_x\varphi)^{-1} d_{x_t}\,\varphi(y-x)\,dt\Big).$$

Le terme dans l'intégrale est de norme inférieure stricte à $(1+\varepsilon)\delta$, ce qui donne l'inclusion $\varphi(\overline{B(x,\delta)}) \subset \varphi(x) + d_x\varphi(B(0,(1+\varepsilon)\delta))$ et le résultat s'ensuit.

Preuve dans le cas U borné, f continue positive
Munissons $\mathbf{R}^d$ de la norme du maximum, $\|(x_1,...,x_n)\| = \max(|x_1|,...,|x_n|)$ de telle sorte que les boules soient des cubes. Posons

$$K_i = \{x \in \mathbf{R}^d \mid d(x,U^c) \geq 1/i\}.$$

Ces ensembles sont compacts, croissants pour l'inclusion et leur union est égale à U. On recouvre K_i par une famille finie disjointe $\{R_j\}$ de cubes de côtés de longueur 2δ. Si δ est petit, cette union est incluse dans K_{i+1}. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit δ suffisamment petit en accord avec le lemme précédent et de façon à ce que

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(y))| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad x \in K_i \quad \text{et} \quad \|x-y\| \leq \delta$$

en utilisant la continuité uniforme de $f\circ\varphi$ sur K_{i+1}. On demande la même estimée pour les fonctions $f\circ\varphi\, J_\varphi$ et J_φ. Posons $\mathring{R}_j = B(x_j,\delta)$. Par le lemme,

$$\int_{\varphi(R_j)} f(y)\,d\lambda(y) \leq (f(\varphi(x_j))+\varepsilon)\lambda(\varphi(R_j)) \leq (1+\varepsilon)^d(f(\varphi(x_j))+\varepsilon)J_\varphi(x_j)\lambda(R_j)$$

puis en sommant sur j,

$$\int_{\varphi(K_i)} f(y)\,d\lambda(y) \leq (1+\varepsilon)^d\Big(\sum_j f(\varphi(x_j))J_\varphi(x_j)\lambda(R_j) \;+\varepsilon\,(\sup_{K_i} J_\varphi)\lambda(U)\Big).$$

On a également grâce à la continuité uniforme,

$$\int_{R_j} f(\varphi(x))J_\varphi(x)\,dx \geq \Big(f(\varphi(x_j))J_\varphi(x_j) - \varepsilon\Big)\,\lambda(R_j)$$

et en sommant sur j,

$$\int_U f(\varphi(x))J_\varphi(x)\,dx \geq \sum_j f(\varphi(x_j))J_\varphi(x_j)\lambda(R_j) \;-\varepsilon\lambda(U).$$

Il suffit de faire tendre ε vers 0 puis i vers l'infini pour obtenir

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\,d\lambda(y) \leq \int_U f(\varphi(x))J_\varphi(x)\,dx.$$

Pour l'inégalité inverse, on remplace φ par φ^{-1}, f par $f\circ\varphi\,J_\varphi$ et U par $\varphi(U)$.

Preuve dans le cas général

La formule est encore vraie pour une fonction indicatrice de rectangle semi-ouvert $\prod [a_i, b_i[$ en utilisant le théorème de convergence dominé. Une telle fonction peut en effet être approchée simplement par une fonction continue positive majorée par 1. Les deux applications suivantes

$$A \mapsto \lambda(A \cap \varphi(U)), \quad A \mapsto \int_{U \cap \varphi^{-1}(A)} J_\varphi \, d\lambda$$

sont des mesures finies qui coïncident sur les unions finies de tels rectangles et par le théorème 12 d'approximation, sur tous les boréliens de $\mathbf{R}^d$. De là, on en déduit la formule pour toute fonction étagée et à nouveau par convergence croissante, pour toute fonction mesurable positive. Lorsque U n'est pas borné, on applique la formule sur l'ouvert $U \cap [-N, N]$ et on passe à la limite par le théorème de convergence croissante. Le cas d'une fonction f intégrable s'obtient en décomposant la fonction en partie positive et négative.

5.6 Exercices

exercice 1

Soit t, $u > 0$. Calculer les intégrales suivantes en dérivant sous le signe intégral.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}\,dx, \quad \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 e^{-tx}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-tx}-e^{-ux}}{x}\,dx.$$

exercice 2

Soit $y > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+y}$, en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

exercice 3

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\Big)\,dy$ et $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\Big)\,dx$. Conclusion ?

exercice 4

Soit $k \in \mathbf{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 y^{2k}\ln(y)\,dy$. En déduire la formule

$$\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En évaluant de deux façons l'expression $\displaystyle\int_0^\infty\!\!\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}dy\,dx$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}dy$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

exercice 5

Calculer de deux manières différentes les intégrales

$$\iint_{\mathbf{R}_+^2} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)}, \quad \int_0^1\int_0^\infty e^{-x}\sin(2xy)\,dx\,dy, \quad \int_0^1\int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2y^2)}\,dt\,dy\,dx.$$

En déduire $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{\sin^2(x)}{x}\,dx, \quad \int_0^\infty \Big(\frac{\operatorname{atan}(x)}{x}\Big)^2 dx.$

exercice 6

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}, \quad \iint_{\{x^2\le 2y,\,y^2\le 2x\}} e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy, \quad \iint_{\{x^2+y^2\le a^2\}} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+a^2}dx\,dy.$$

exercice 7

Calculer l'intégrale $\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy$ en utilisant le changement de variable $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. En déduire l'égalité $\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Chapitre 6

Espaces L^p

Nous allons introduire de nouveaux espaces fonctionnels, constitués de classes de fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable. Ces espaces forment un cadre naturel pour définir le produit de convolution. Le cas $p = 2$ est particulièrement important et sera étudié plus en détail dans le chapitre consacré aux espaces de Hilbert.

6.1 La norme L^p

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable. On pose pour $p \in [1, \infty[$

$$||f||_p = \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 1$, nous avons $||f||_1 = \int_X |f|\, d\mu$. Pour $p = 2$, $||f||_2 = \Big(\int_X |f|^2\, d\mu\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Un nombre $M \in [0, \infty]$ est une *borne essentielle* de f si pour presque tout $x \in X$, $|f(x)| \leq M$, c'est-à-dire si $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > M\}) = 0$. On pose

$$||f||_\infty = \inf\{M \in [0, \infty] \mid \text{ M est une borne essentielle de } f\}.$$

On vérifie sans difficulté que $||f||_\infty$ est elle-même une borne essentielle de f. Si $||f||_\infty < \infty$, on dit que f est *essentiellement bornée*.

Définition 19 *Soit* $p \in [1, \infty]$. *On pose*

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu, \mathbf{C}) = \{f : X \to \mathbf{C} \mid f \textit{ est mesurable et } ||f||_p < \infty\}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la tribu ou la mesure , on peut utiliser la notation abrégée $\mathcal{L}^p(X)$, espace des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable. Remarquons que l'égalité $||f||_p = 0$ implique $f = 0$ presque partout mais pas $f = 0$. La fonction $f \mapsto ||f||_p$ n'est donc pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X)$. Pour remédier à cela, introduisons une relation d'équivalence sur cet ensemble.

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ presque partout.}$$

Définition 20 *L'espace $L^p(X, \mathcal{T}, \mu, \mathbf{C})$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu, \mathbf{C})$ par cette relation d'équivalence.*

On utilise la notation abrégée $L^p(X)$. Un élément de $L^p(X)$ est donc une classe d'équivalence de fonctions de $\mathcal{L}^p(X)$, il s'agit de toutes les fonctions qui coïncident presque partout avec une fonction donnée. Nous avons une projection de $\mathcal{L}^p(X)$ sur $L^p(X)$ qui à une fonction associe sa classe. Pour éviter de surcharger les notations, nous noterons de la même façon une fonction et sa classe. Les opérations usuelles passent au quotient et définissent des opérations sur $L^p(X)$. Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$, $f_1\, g_1 \sim f_2\, g_2$, etc.

L'application $f \mapsto ||f||_p$ passe aussi au quotient : si $f_1 \sim f_2$ alors $||f_1||_p = ||f_2||_p$. Nous allons voir que cette application définit une norme sur $L^p(X)$. Dans le quotient, l'égalité $||f||_p = 0$ ne se produit que si la classe de f est la classe de la fonction nulle. L'égalité $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ est immédiate, il reste à montrer l'inégalité triangulaire.

6.2 Inégalités L^p et complétude

Proposition 24 (Inégalité de Hölder) *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et p, $q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour toutes fonctions f, $g : X \to [0, \infty]$ mesurables positives,*

$$\Big| \int_X fg\, d\mu \Big| \leq ||f||_p\, ||g||_q.$$

L'égalité est aussi vraie pour $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ à valeurs complexes, auquel cas la fonction fg est intégrable.

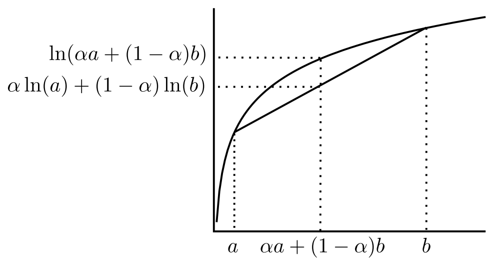
Le cas $p = 1$, $q = \infty$ est évident. Le cas $p = q = 2$ correspond à *l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Preuve
Par concavité de la fonction logarithme, nous avons pour tout a, $b > 0$,

$\alpha \ln(a) + (1-\alpha)\ln(b) \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha) b)$

d'où, en prenant l'exponentielle,

$a^\alpha\, b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b.$



Appliquons cette inégalité avec $a = f(x)^p/||f||_p^p$, $b = g(x)^q/||g||_q^q$ et $\alpha = 1/p$:

$$\frac{f(x)g(x)}{||f||_p||g||_q} \leq \frac{1}{p}\, \frac{f(x)^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q}\, \frac{g(x)^q}{||g||_q^q}$$

Il suffit maintenant d'intégrer pour obtenir l'inégalité désirée.

Théorème 21 (Inégalité des normes) *Soit $p \in [1, \infty]$, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $F : X \times Y \to [0, \infty]$ une fonction mesurable positive. Alors*

$$\Big\| \int_Y F(.,y)\, d\nu(y) \Big\|_p \leq \int_Y \|F(.,y)\|_p \, d\nu(y).$$

L'inégalité est aussi vraie si F est mesurable à valeurs complexes et $y \mapsto \|F(.,y)\|_p$ est ν-intégrable.

Preuve
On introduit une fonction $h : X \mapsto [0, \infty]$ et on applique l'inégalité de Hölder en prenant q tel que $1/p + 1/q = 1$.

$$\begin{aligned} \int_X h(x) \int_Y |F(x,y)|\, d\nu(y)\, d\mu(x) &= \int_Y \Big(\int_X h(x) |F(x,y)|\, d\mu(x) \Big)\, d\nu(y) \\ &\leq \int_Y \|h\|_q \|F(.,y)\|_p \, d\nu(y) \\ &= \|h\|_q \int_Y \|F(.,y)\|_p \, d\nu(y). \end{aligned}$$

On prend alors $h(x) = (\int_X |F(x,y)| d\nu(y))^{p-1}$. Le premier terme dans l'inégalité précédente vaut $\| \int_X F(.,y)\, d\nu(y) \|_p^p$. Comme $(p-1)q = p$, nous avons aussi

$$\|h\|_q = \Big(\int_X \Big(\int_Y |F(x,y)| d\nu(y) \Big)^{(p-1)q} d\mu(x) \Big)^{1/q} = \Big\| \int_Y F(.,y)\, d\nu(y) \Big\|_p^{p-1}$$

ce qui donne le résultat.

Proposition 25 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, \infty]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : X \to [0, \infty]$ des fonctions mesurables positives. Alors*

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Big\|_p \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

Soit $f_n \in L^p(X)$ telles que $\sum \|f_n\|_p < \infty$. Alors la série $\sum f_n(x)$ converge pour presque tout $x \in X$, ainsi qu'en norme L^p et l'inégalité précédente est vérifiée.

Preuve
Commençons par le cas $f_n \geq 0$. S'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\|f\|_p = \infty$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, il suffit d'appliquer le théorème précédent. Pour cela, on prend $Y = \mathbf{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour X, on se place sur l'ensemble $\cup_n (f_n > 0) = \cup_{m,n} (f_n > 1/2^m)$ qui est σ-fini en vertu de la majoration $\mu(f_n^p > 1/2^{mp}) \leq 2^{mp} \int_X f_n^p \, d\mu$. Enfin, on pose $F(x,n) = f_n(x)$. Ceci donne

$$\Big\| \int_Y F(.,y)\, d\nu(y) \Big\|_p = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Big\|_p, \quad \int_Y \|F(.,y)\|_p \, d\nu(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

L'inégalité recherchée s'ensuit. Lorsque les f_n sont dans L^p, on remarque que

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \Big\|_p \ \leq \ \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

La fonction $(\sum |f_n|)^p$ est intégrable donc finie presque partout. Cela montre que la somme $\sum f_n(x)$ est convergente presque partout. La convergence en norme L^p découle des inégalités

$$\Big\| \sum_{n=N}^{\infty} f_n \Big\|_p \ \leq \ \Big\| \sum_{n=N}^{\infty} |f_n| \Big\|_p \ \leq \ \sum_{n=N}^{\infty} \Big\| f_n \Big\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Le dernier terme tend vers 0 car c'est le reste d'une série supposée convergente.

On obtient en particulier l'inégalité triangulaire $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ pour $f,\ g \in L^p$, appelée inégalité de Minkowski. Rappelons qu'un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 22 *Soit $p \in [1,\infty]$ et $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^p(X)$ est un espace de Banach.*

Preuve
Il faut montrer que toute suite de Cauchy (f_n) est convergente. Commençons par vérifier qu'une telle suite admet une sous-suite convergente en norme L^p et presque partout. Par la propriété de Cauchy, on peut trouver pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ un entier N_k tel que pour tout $n \geq N_k$, $||f_n - f_{N_k}|| < \frac{1}{2^k}$, ce qui implique $||f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|| < \frac{1}{2^k}$ pour tout k. L'inégalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

montre que la suite $f_{N_0} + \sum_{0 \leq k \leq m} f_{N_{k+1}} - f_{N_k} = f_{N_m}$ est convergente presque partout et en norme.

On conclut à l'aide du lemme suivant.

Lemme 7 *Dans un espace vectoriel normé, toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est en fait convergente.*

Preuve
Si (f_{N_m}) converge vers f, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall\, m \geq m_0, \quad ||f_{N_m} - f|| < \varepsilon/2.$$

Par la propriété de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que pour tout $n,\ n' \geq N$, $||f_n - f_{n'}|| < \varepsilon/2$. Choisissons m tel que N_m est plus grand que N et m_0. Nous avons pour tout $n \geq N$,

$$||f_n - f|| \leq ||f_n - f_{N_m}|| + ||f_{N_m} - f|| < \varepsilon.$$

En conclusion, (f_n) converge vers f en norme comme souhaité.

Comme les suites convergentes sont de Cauchy, on a montré au passage le résultat suivant.

Proposition 26 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions de $L^p(X)$ qui converge vers une certaine fonction f en norme L^p. Alors il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge presque partout vers f.*

En général, la convergence en norme L^p n'implique pas la convergence presque partout, un contre-exemple est proposé en exercice. Terminons par le résultat général suivant.

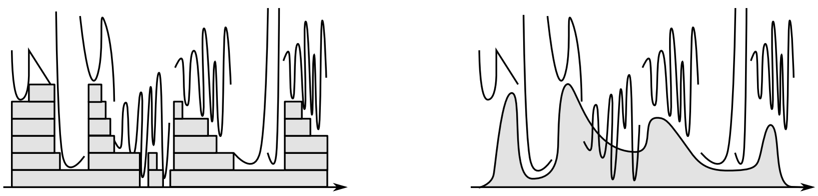
Théorème 23 *Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n|| < \infty$ implique la convergence en norme de $\sum f_n$.*

Le sens direct se traite comme plus haut. Pour la réciproque, il suffit de remarquer que si $\sum \|f_n\|$ est de Cauchy, il en va de même de $\sum f_n$ en vertu de la majoration

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} f_k \| \le \sum_{k=m}^{n} \|f_n\Big\| n \qquad \text{valide pour tout } m, n \text{ tels que } m < n.$$

6.3 Densité dans les espaces L^p

Les fonctions de L^p peuvent être très irrégulières. Nous allons cependant voir qu'on peut les approcher en norme L^p par des fonctions étagées ou continues.



Théorème 24 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$. Les fonctions étagées sont denses dans L^p : pour toute fonction $f \in L^p$, il existe une suite de fonctions étagées $f_n \in L^p$ telles que $\|f - f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Preuve
Si f est positive, on sait qu'il existe une suite (f_n) de fonctions étagées qui convergent de manière croissante vers f. Nous avons

$$|f - f_n|^p = (f - f_n)^p \le f^p, \quad \lim_{n\to\infty} |f - f_n|^p = 0$$

et par convergence dominée, $||f - f_n||_p^p = \int_X |f - f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dans le cas où f est à valeurs réelles ou complexes, il suffit d'approcher les parties positives et négatives, ou les parties réelles et imaginaires, par des fonctions étagées de L^p pour conclure.

Notons qu'une fonction étagée est dans L^p, $1 \leq p < \infty$, si et seulement si elle est intégrable. De fait pour tout $a_i \neq 0$ et A_i disjoints, $\| \sum a_i \mathbf{1}_{A_i} \|_p^p = \sum |a_i|^p \mu(A_i)$ est fini si et seulement si tous les A_i sont finis.

Corollaire 7 *L'espace $L^1 \cap L^\infty \cap L^p$ est dense dans L^p pour tout $p \in [0, \infty[$.*

Théorème 25 *Soit $p \in [1, \infty[$, X un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et μ une mesure définie sur la tribu des boréliens de X. On suppose que les parties compactes de X sont de mesure finie. Alors les fonctions continues Lipschitziennes à support compact sont denses dans $L^p(X)$.*

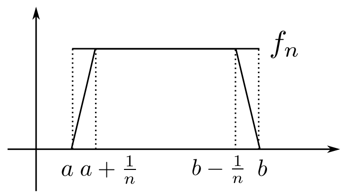
Preuve
D'après le théorème d'approximation (Th. 12), pour tout borélien $A \subset X$ de mesure finie, il existe des rectangles R_1, R_2, ... $R_n \subset X$ disjoints deux à deux tels que

$$\mu\Big(A \bigtriangleup \coprod_1^n R_i\Big) < \varepsilon.$$

La fonction indicatrice de A est bien approchée par celle des R_i :

$$\| \mathbf{1}_{\cup R_i} - \mathbf{1}_A \|_p^p = \int_X |\mathbf{1}_{\cup R_i} - \mathbf{1}_A|^p \, d\mu = \int_X |\mathbf{1}_{\cup R_i} - \mathbf{1}_A| \, d\mu = \mu\Big(A \bigtriangleup \coprod_1^n R_i\Big) < \varepsilon.$$

Toute fonction étagée peut donc être approchée par une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de rectangles. Il reste à approcher les fonctions indicatrices des pavés par des fonctions Lipschitziennes à support compact.



Pour approcher $\mathbf{1}_{]a,b[}$, on considère une suite de fonctions continues affines f_n constantes sur l'intervalle $]a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}[$ et nulle hors de l'intervalle $]a,b[$, par exemple $f_n(x) = \min(1, nd(x, \,]a,b[^c))$. On a alors

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n - \mathbf{1}_{]a,b[}|^p \, d\mu \leq \int \mathbf{1}_{]a,a+\frac{1}{n}[} + \mathbf{1}_{]b-\frac{1}{n},b[} \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par convergence dominée, la domination étant donnée par la fonction $\mathbf{1}_{]a,b[}$.

Dans $\mathbf{R}^d$, pour approcher la fonction indicatrice d'un pavé $P = \prod]a_i, b_i[$, on approche chacune des fonctions $\mathbf{1}_{]a_i,b_i[}$ par des fonctions $f_{i,n}$ comme précédemment. Le produit des $f_{i,n}$ est proche de $\mathbf{1}_P$ en vertu de la majoration

$$\Big| \prod_{i=1}^d z_i - \prod_{i=1}^d w_i \Big| \leq \sum_{i=1}^d |z_i - w_i|$$

valide pour z_i, $w_i \in \mathbf{C}$ de module inférieur ou égal à un, et qui se montre par récurrence.

6.4 Convolution

Soit $x \in \mathbf{R}$ et f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ deux fonctions Lebesgue-mesurables définies sur $\mathbf{R}$. Si la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable ou mesurable positive, on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)\, dt.$$

C'est le produit de convolution de f et g évalué au point x.

Théorème 26 *Soit $p \in [1, \infty]$, $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \in L^p(\mathbf{R})$. Alors la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f * g(x)$ est dans L^p et satisfait*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Preuve
D'après l'inégalité des normes,

$$\Big\|\int_{\mathbf{R}} |f(t)g(x-t)|\, dt\Big\|_p \leq \int_{\mathbf{R}} \|f(t)g(x-t)\|_p\, dt = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| \|g(x-t)\|_p\, dt = \|f\|_1 \|g\|_p.$$

La fonction $x \mapsto \int |f(t)g(x-t)|\, dt$ possède une puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, elle est donc finie presque partout. On en déduit que $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable pour presque tout x. Le théorème est démontré.

Propriétés de la convolution
Soit f, $g \in L^1$ et $h \in L^p$.
– $f * h = g * h$ *(commutativité)*
– $(f + g) * h = f * h + g * h$ *(distributivité)*
– $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(associativité)*

Preuve
Le premier point s'obtient en faisant le changement de variable $s = t - x$.

$$f * h(x) = \int f(t)g(x-t)\, dt = \int f(x-s)g(s)ds = h * f(x).$$

Le second point découle de la linéarité de l'intégrale. Le dernier point s'obtient par le changement de variable $u = s + t$.

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int f(t) \int g(s)\, h(x-t-s)\, ds\, dt \\ &= \int\int f(t)\, g(u-t)\, h(x-u)\, du\, dt = (f * g) * h(x). \end{aligned}$$

Le cas $p = 1$ est particulièrement important. L'espace $L^1(X)$ muni de l'addition et du produit de convolution est une algèbre qui est complète pour la norme L^1 et qui satisfait $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. On dit que c'est une *algèbre de Banach*.

Nous verrons plus loin qu'il n'y a pas de fonction δ satisfaisant $\delta * f = f$ pour toute fonction f intégrable. on va cependant montrer qu'il existe des fonctions aussi régulières qu'on veut et qui sont presque des unités.

Théorème 27 (Approximation de l'unité) *On se donne $\varphi \in L^1(\mathbf{R}, \lambda)$ telle que $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 1$ et on pose $\varphi_k(x) = k\varphi(kx)$. Alors, pour tout $p \in [1, \infty[$ et pour tout $f \in L^p(\mathbf{R})$,*

$$f * \varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \quad \textit{en norme } L^p.$$

Pour tout $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ continue en $x \in \mathbf{R}$,

$$f * \varphi_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x).$$

La suite (φ_k) s'appelle approximation de l'unité ou unité approchée.

Preuve
Les fonctions φ_k sont d'intégrale égale à un, nous avons donc

$$f * \varphi_k(x) - f(x) = \int_{\mathbf{R}} \big(f(x-t) - f(x)\big)\varphi_k(t)\,dt = \int_{\mathbf{R}} \big(f(x - y/k) - f(x)\big)\varphi(y)\,dy$$

à l'aide du changement de variable $y = kt$. Si f est essentiellement bornée, continue au point x, on conclut à l'aide du théorème de convergence dominée. Sinon, on majore comme suit.

$$\|f * \varphi_k - f\|_p \leq \int_{\mathbf{R}} \big\|f(. - y/k) - f\big\|_p |\varphi(y)|\,dy.$$

La quantité $\|f(. - y/k) - f\|_p$ est majorée par $2\|f\|_p$. Nous allons montrer qu'elle tend vers zéro si bien que le théorème de convergence dominée s'applique et donne le résultat.

Lemme 8 (Continuité L^p des translations) *Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R})$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Preuve
Lorsque f est continue à support compact, cela découle du théorème de convergence dominée : la différence $f(x+h) - f(x)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro par continuité et si f est nulle hors de l'intervalle $[-A, A]$, la fonction $f(x+h) - f(x)$ est bornée par la fonction intégrable $2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-A-1, A+1]}(x)$ dès que $|h| \leq 1$. Voyons maintenant le cas général.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\tilde{f}$ continue à support compact telle que $\|f - \tilde{f}\|_p < \varepsilon$. Choisissons $\delta > 0$ tel que $\|\tilde{f}(. + h) - \tilde{f}\|_p < \varepsilon$ pour tout $|h| < \delta$.

$$\|f(. + h) - f\|_p \leq \|f(. + h) - \tilde{f}(. + h)\|_p + \|\tilde{f}(. + h) - \tilde{f}\|_p + \|\tilde{f} - f\|_p \leq 3\varepsilon.$$

Le lemme est démontré. Attention, ce lemme est faux pour $p = \infty$.

Montrons à présent que la convolée de deux fonctions est dérivable dès qu'une des deux fonctions est dérivable. On se restreint au cas intégrable pour simplifier.

Proposition 27 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable et $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction bornée dérivable de dérivée bornée. Alors la fonction $f * \varphi$ est dérivable et $(f * \varphi)' = f * (\varphi')$.*

Preuve
La fonction $|f(t)\varphi'(x-t)|$ est majorée par $|f(t)|\,||\varphi'||_\infty$ qui est intégrable, le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique.

$$\frac{d}{dt}(f * \varphi) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}} f(t)\varphi(x-t)\,dt = \int_{\mathbf{R}} f(t)\varphi'(x-t)\,dt = f * (\varphi').$$

Le résultat est démontré.

Ces deux derniers résultats se combinent pour donner des approximations explicites des fonctions intégrables par des fonctions de classe C^∞. De fait, prenons $\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, nous avons

$$\varphi_k * f \xrightarrow[k\to\infty]{} f \quad \text{en norme } L^1.$$

Comme la fonction φ_k est de classe C^∞ avec toutes ses dérivées bornées intégrables, il en va de même pour $\varphi_k * f$ d'après la proposition vue plus haut. Nous avons donc approché f par une suite de fonctions C^∞ qui sont des convolutions.

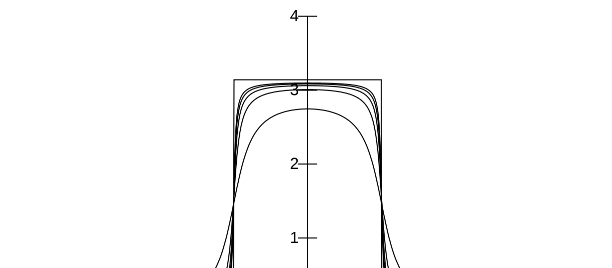
Corollaire 8 *Les fonctions intégrables de classe C^∞ sont denses dans $L^1(\mathbf{R})$.*

On peut calculer ces convolutions explicitement lorsque f s'exprime simplement. Traitons le cas de la fonction indicatrice $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

$$\varphi_k * f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-1}^{x+1} \frac{k}{1+k^2t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\Big(\operatorname{atan}(kx+k) - \operatorname{atan}(kx-k)\Big)$$

Nous avons obtenu une approximation du créneau $\mathbf{1}_{[-1,1]}$.

$$\operatorname{atan}(kx+k) - \operatorname{atan}(kx-k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \quad \text{en norme } L^1 \text{ et pour } x \neq \pm 1.$$



Pour terminer, remarquons que tous les théorèmes de cette section se généralisent à $\mathbf{R}^d$ sans difficulté, si l'on définit les approximations de l'unité par la formule $\varphi_k(x) = k^d\varphi(kx)$ et si l'on remplace la notion de dérivée par celle de dérivée partielle.

6.5 Complément : densité L^p, le cas métrique

Le théorème de densité s'étend aux espaces métriques généraux si on ne cherche plus une approximation par des fonctions à support compact.

Théorème 28 *Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie et $A \subset X$ un ensemble μ-mesurable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert U contenant A tel que $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$.*

On dit que la mesure est *extérieurement régulière*. Ceci implique que tout ensemble μ-mesurable est de la forme $(\cap U_i)\backslash N$, avec U_i suite d'ouverts de X et N ensemble négligeable.

Preuve

Posons $\mathcal{T} = \{A\, mesurable \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, U \text{ ouvert tel que } A \subset U \text{ et } \mu(U\backslash A) < \varepsilon$
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V \text{ ouvert tel que } A^c \subset V \text{ et } \mu(V\backslash A^c) < \varepsilon\}$

Les ouverts sont dans $\mathcal{T}$: le complémentaire de tout ouvert U peut s'écrire comme intersection des ouverts $V_n = \{x \in X \mid d(x, U^c) < \varepsilon\}$, la mesure des V_n tend donc vers celle de U^c. Les ensembles négligeables sont aussi dans $\mathcal{T}$. il suffit maintenant de montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu. L'invariance par passage au complémentaire est évidente. Soit A_i des ensembles mesurables dans $\mathcal{T}$ et U_i des ouverts tels que $A_i \subset U_i$ et $\mu(U_i\backslash A_i) < \varepsilon/2^i$. L'union des U_i approche bien l'union des A_i :

$$\cup A_i \subset \cup U_i, \quad \mu(\cup\, U_i \backslash \cup\, A_i) \leq \Sigma\ \mu(U_i\backslash A_i) < \varepsilon$$

Pour les complémentaires, on peut trouver n tel que $\mu(\bigcap_1^n A_i \backslash \bigcap_1^\infty A_i) < \varepsilon/2$ et on utilise l'inclusion

$$\bigcap_1^n V_i \setminus \bigcap_1^n A_i^c \subset \bigcup_1^n (V_i\backslash A_i^c).$$

Théorème de densité

Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie et $1 \leq p < \infty$. Alors toute fonction $f \in L^p(X, \mu)$ peut être approchée en norme L^p par une suite de fonctions lipschitziennes bornées appartenant à L^p.

Preuve

On peut se restreindre au cas où f est une fonction indicatrice, $f = \mathbf{1}_A$. Soit U un ouvert contenant A tel que $\mu(U\backslash A) < \varepsilon$.

$$||\mathbf{1}_U - \mathbf{1}_A||_p = \mu(U\backslash A)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}.$$

Il suffit maintenant d'approcher $\mathbf{1}_U$ par une suite de fonctions lipschitziennes bornées. Posons $f_k = \min(1, kd(x, U^c))$. Ces fonctions sont lipschitziennes :

$$\forall\, x, y \in X, \quad |f_k(x) - f_k(y)| \leq k\, d(x, y)$$

La suite f_k converge vers $\mathbf{1}_U$ simplement, et les fonctions $|\mathbf{1}_U - f_k|$ sont majorées uniformément par 1. Ceci assure la convergence des f_k vers $\mathbf{1}_U$ en norme L^p.

6.6 Complément : théorème de Stone-Weierstraß mesurable

On donne une version du théorème de Stone-Weierstraß valide dans les espaces L^p pour des algèbres de fonctions qui ne sont pas nécessairement continues.

Théorème 29 *Soit $p \in [1, \infty[$, μ une mesure borélienne finie sur $[0,1]$ ainsi que $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions μ-mesurables bornées qui sépare les points :*

$$\forall x, y \in [0,1] \text{ distincts, } \exists\, n \in \mathbf{N} \text{ tel que } f_n(x) \neq f_n(y).$$

Alors l'algèbre engendrée par les classes des fonctions f_n et les constantes est dense dans $L^p([0,1], \mu)$.

Il faut que la famille de fonctions f_n soit dénombrable. La famille des fonctions indicatrices des singletons sépare les points mais n'engendre pas L^p. On a supposé les f_n bornées afin que l'algèbre qu'elles engendrent soit incluse dans L^p.

La démonstration comporte trois étapes. On commence par se ramener au cas où les f_n sont des fonctions indicatrices d'ensembles mesurables B_n. Le lemme suivant est un résultat classique en théorie des probabilités.

Lemme 9 *Soit $n \in \mathbf{N}$, et $a, b \in \mathbf{R}$. Alors la fonction indicatrice de l'ensemble $f_n^{-1}(]a, b[)$ est dans l'adhérence de l'algèbre engendrée par f_n et les constantes.*

Preuve
Posons $f = f_n$ et soit C une constante positive telle que $|f| \leq C$. Sur l'intervalle $[-C, C]$, on peut trouver une suite uniformément bornée de polynômes P_k, qui converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$. Pour cela, il suffit d'approcher de manière croissante la fonction $\mathbf{1}_{]a,b[}$ par des fonctions continues, par exemple $g_m(x) = \min(1, m\, d(x,]a, b[^c))$ puis d'approcher ces fonctions g_m par des polynômes uniformément bornés par 2. La suite P_k est obtenue par extraction diagonale.

On a alors $P_k \circ f \to \mathbf{1}_{]a,b[} \circ f$ simplement, et $|P_k \circ f(x)| \leq 2, \ \forall x \in [0,1]$. Le théorème de convergence dominée montre donc que les éléments $P_k \circ f$ de l'algèbre engendrée par f tendent vers $\mathbf{1}_{f^{-1}(]a,b[)}$ lorsque k tend vers l'infini. Le lemme est démontré.

Les ensembles de la forme $f_n^{-1}(I)$, avec I union finie d'intervalles à extrémités rationnelles, sont en nombre dénombrable. Mettons les sous la forme d'une suite $\{B_k\}$. Il suffit maintenant d'approcher les fonctions indicatrices d'ensembles μ-mesurables par des sommes et produits finis de fonctions indicatrices des B_k pour conclure. Cela découle du théorème d'approximation (th.12) et du lemme suivant.

Lemme 10 *Soit $\{B_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'ensembles μ-mesurables qui sépare les points : pour tout $x, y \in [0,1]$ distincts, il existe k tel que $x \in B_k$ et $y \notin B_k$. Alors les B_k et les ensembles négligeables engendrent la tribu des ensembles μ-mesurables de $[0,1]$.*

La famille $\{\mathbf{1}_{B_k}\}$ sépare les points. Par conséquent, on obtient une injection

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [0,1] & \to & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ & x & \to & \{\mathbf{1}_{B_k}(x)\}_{k\in\mathbf{N}} \end{array}$$

L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ est un espace métrique pour la distance

$$d\Big((x_i)_{i\in\mathbf{N}}, (y_i)_{i\in\mathbf{N}}\Big) = 2^{-\inf\{i\in\mathbf{N}\,|\, x_i\neq y_i\}}$$

Notons $\tilde{B}_k$ l'ensemble des points de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dont la $k^{\text{ième}}$ coordonnée est égale à 1. Les boules de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sont des intersections finies de tels ensembles, ceux-ci engendrent donc la tribu des boréliens de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. L'égalité $\varphi^{-1}(\tilde{B}_k) = B_k$ montre que les B_k engendrent l'image réciproque de la tribu des boréliens de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Il reste à montrer que tout borélien $A \subset [0,1]$ est de la forme $\varphi^{-1}(B)\cup N$ avec B, N boréliens et $\mu(N) = 0$.

Considérons la mesure borélienne $\varphi_*\mu$ sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ définie par

$$\varphi_*\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)).$$

Quitte à réaliser $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ comme un compact de $\mathbf{R}$, on peut considérer que φ est à valeurs réelles. On va construire les ensembles B et N dans le lemme suivant, qui présente un intérêt propre.

Proposition 28 *Soit μ une mesure borélienne finie sur l'intervalle $[0,1]$ et soit $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application borélienne injective. Alors l'image d'un borélien est union d'un borélien et d'un ensemble $\varphi_*\mu$-négligeable.*

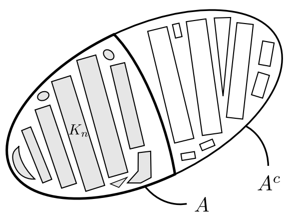
Preuve

Soit $C \subset [0,1]$, comme φ est injective, on a $\varphi^{-1}\varphi(C) = C$ et $\varphi(C)\cap\varphi(C^c) = \emptyset$.

Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble borélien. D'après le lemme de Lusin, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut trouver un compact $K_n \subset A$ sur lequel l'application φ est continue et tel que $\mu(A\backslash K_n) < \frac{1}{n}$. Soit A_0 l'union des K_n. On a alors pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$\mu(A\backslash A_0) = \mu(\cap_n\ A\backslash K_n) \leq \mu(A\backslash K_m) \leq 1/m, \quad \text{i.e. } \mu(A\backslash A_0) = 0.$$

Comme φ est continue sur K_j, l'ensemble $\varphi(K_j)$ est compact. L'ensemble $\varphi(A_0)$ est donc borélien. De la même façon, on peut construire un borélien $A_1 \subset A^c$ tel que $\varphi(A_1)$ est borélien et $\mu(A^c\backslash A_1) = 0$. On en déduit



$$\varphi_*\mu(\varphi(A_0)\textstyle\coprod\varphi(A_1)) = \mu(\varphi^{-1}\varphi(A_0)\textstyle\coprod\varphi^{-1}\varphi(A_1)) = \mu(A_0)+\mu(A_1) = \mu([0,1]).$$

L'ensemble $\varphi(A_0) \amalg \varphi(A_1)$ est un borélien de $\varphi_*\mu$-mesure totale. L'ensemble $\varphi(A)\backslash\varphi(A_0)$ est inclu dans son complémentaire, il est donc $\varphi_*\mu$-négligeable.

$$\varphi_*\mu(\varphi(A)\backslash\varphi(A_0)) = \mu(\varphi^{-1}\varphi(A)\setminus\varphi^{-1}\varphi(A_0)) = \mu(A\backslash A_0) = 0.$$

On pose $B = \varphi(A_0)$ et $N = A\backslash A_0$ ce qui donne $A = \varphi^{-1}(B)\cup N$ avec $\mu(N) = 0$.

6.7 Exercices

exercice 1
Soit $f(x) = x^{-1}(1 + |\ln(x)|)^{-2}$. Montrer que :
– $f \in L^1([1, \infty[)$ et $f \notin L^p([1, \infty[)$ si $p < 1$.
– $f \in L^1([0, 1])$ et $f \notin L^p([0, 1])$ si $p > 1$.
– $f \in L^1([0, \infty[)$ et $f \notin L^p([0, \infty[)$ si $p \neq 1$.

exercice 2
Pour quelles valeurs de p la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est-elle dans l'espace $L^p([0, 1], \lambda)$?
Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Etudier en fonction du paramètre β l'intégrabilité relativement à $\lambda_{\mathbf{R}^d}$ de la fonction définie de la boule unité de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ par : $x \mapsto \frac{1}{||x||^\beta}$.

exercice 3
Calculer la norme dans $L^2(\mathbf{R}, \lambda)$ des fonctions suivantes : $e^{-|x|}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{1}{1+ix}$, $\frac{1}{1+x^2}$.

exercice 4
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$.
– Montrer que pour tout $f : X \to [0, \infty]$ mesurable, $\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1$.
– En déduire l'inclusion et la densité de $L^\infty(X) \cap L^1(X)$ dans $L^p(X)$.
– Approcher en norme L^p toute fonction étagée de $L^p(\mathbf{R}, \lambda)$ par une fonction C^∞.
– En déduire que les fonctions C^∞ sont denses dans $L^p(\mathbf{R}, \lambda)$.

exercice 5
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Montrer pour tout $p > q > 1$,

$$\|f\|_q \leq \mu(X)^{\frac{p-q}{pq}} \|f\|_p, \quad L^\infty(X) \subset L^p(X) \subset L^q(X) \subset L^1(X).$$

exercice 6
Pour tout $m, k \in \mathbf{N}$ tels que $0 \leq k < 2^m$, on définit $f_{2^m+k}(x) = \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[}(x)$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pour aucun $x \in [0, 1[$ mais converge en norme L^1. Trouver une sous-suite qui converge pour tout $x \in [0, 1[$.

exercice 7
Calculer la limite lorsque k tend vers l'infini des expressions suivantes.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1 + k^2t^2} \cos(t)\, dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{-k|t|}}{1 + t^2}\, dt, \qquad \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{\operatorname{atan}(1 - t^3)}{kt^2}\, dt.$$

exercice 8
Soit $f \in L^p(\mathbf{R})$ dérivable telle que $f' \in L^p$. Montrer que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{L^p} f'(x)$.

exercice 9
Soit $\varphi(x) = Ce^{\frac{1}{1-x^2}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$, où C est choisi de sorte que $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx = 1$.
Montrer que φ est C^∞ à support compact. Par un procédé de convolution, montrer que les fonctions C^∞ à support compact sont denses dans les fonctions intégrables à support compact. En déduire qu'elles sont denses dans L^1.

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

L'espace L^2 possède une structure qui n'existe pas sur les autres espaces L^p. Il admet un produit scalaire, ce qui permet de raisonner d'un point de vue géométrique dans cet espace. On travaille même souvent en restriction à un plan euclidien et les théorèmes de géométrie élémentaire comme le théorème de Pythagore ou la décomposition en base orthonormée sont à l'origine de résultats très intéressants.

Ceci mène naturellement à la notion abstraite d'espace de Hilbert et de base hilbertienne, avec pour applications la décomposition en série de Fourier et la résolution de l'équation de la chaleur.

7.1 Analyse hilbertienne

On commence par introduire la notion abstraite d'espace de Hilbert avec pour exemple principal l'espace L^2.

Définition 21 *Soit H un espace vectoriel réel (respectivement complexe). Un* produit scalaire *(respectivement* hermitien*) défini sur H est une forme bilinéaire symétrique (respectivement sesquilinéaire) dont la forme quadratique associée est définie positive. En d'autres termes, il existe une fonction $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ définie sur $H \times H$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ (respectivement $\mathbf{C}$) telle que*

– *pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) et x, $y \in H$, $\langle \lambda x_1 + x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,*

– *pour tout x, $y \in H$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,*

– *pour tout $x \in H$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

Remarquons que ces propriétés entraînent l'égalité $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$ pour tout x, $y \in H$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. On note parfois le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \langle x \mid y\rangle = x \mid y$. La norme associée est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Nous allons vérifier que c'est bien une norme. Avant cela, donnons quelques exemples de produits scalaires.

Exemples

– Soit $x = (x_1, ...x_d)$ et $y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbf{R}^d$. La forme $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^d$.

– Sur l'espace $\mathbf{C}^d$, La forme $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k}$ est un produit hermitien.

– Posons $\ell^2(\mathbf{N}) = \{(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$. La forme $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ est un produit hermitien.

– De même, sur $\ell^2(\mathbf{Z}) = \{(x_k)_{k\in\mathbf{Z}} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$, la forme $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ est un produit hermitien.

– Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. La forme $(f, g) \mapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu$ est un produit hermitien sur l'espace $L^2(X, \mathcal{T}, \mu, \mathbf{C})$.

Ce dernier exemple contient tous les autres. Par exemple, $\ell^2(\mathbf{N})$ s'obtient en considérant l'espace mesuré $\mathbf{N}$ muni de la mesure de comptage. Deux vecteurs sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Propriétés du produit scalaire

– $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,Re(\langle x, y\rangle)$,

– (*théorème de Pythagore*) si x et y sont orthogonaux, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,

– si x_1,..., x_n sont orthogonaux deux à deux,
$$\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2,$$

– (*inégalité de Cauchy-Schwarz*) $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$,

– (*inégalité triangulaire*) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Preuve

Pour tout x, $y \in H$,

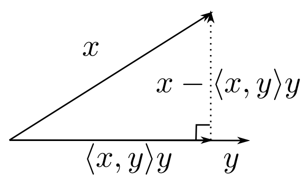
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2+\langle x, y\rangle+\overline{\langle x, y\rangle} = \|x\|^2+\|y\|^2+2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$$

ce qui démontre les deux premiers points. Nous avons ensuite

$$\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle.$$

Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, quitte à diviser y par sa norme, on peut le supposer de norme égale à un.

D'après le théorème de Pythagore, $\|\langle x, y\rangle\, y\|^2 + \|x - \langle x, y\rangle\, y\|^2 = \|x\|^2$ car les vecteurs $\langle x, y\rangle\, y$ et $x - \langle x, y\rangle\, y$ sont orthogonaux.



Nous avons donc l'inégalité $|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle x, y\rangle|^2\|y\|^2 \le \|x\|^2$, comme souhaité. Pour terminer,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,Re(\langle x, y\rangle) \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Définition 22 *Un espace* préhilbertien *réel (respectivement complexe) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (respectivement hermitien). Un* espace de Hilbert *est un espace préhilbertien complet pour la norme* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Nous avons vu que $L^2(X)$ est complet pour la norme L^2 qui est associée au produit hermitien

$$(f, g) \mapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu.$$

Théorème 30 *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré. L'espace* $L^2(X)$ *est un espace de Hilbert.*

Notons $C_c^0(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact. C'est un espace préhilbertien si on le munit du produit $(f, g) \mapsto \int_X f\bar{g}\, d\lambda$ mais il n'est pas complet. Nous avons vu que toute fonction de L^2 peut être approchée en norme L^2 par une suite de fonctions appartenant à $C_c^0(\mathbf{R}^d)$. Une telle suite est de Cauchy mais ne peut converger dans $C_c^0(\mathbf{R}^d)$ si la limite n'est pas continue.

Définition 23 *Soit* H *un espace préhilbertien et* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* H. *Cette famille est dite* orthogonale *si* $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ *pour tout* $i, j \in I$ *distincts. Elle est dite* orthonormée *si de plus* $\|e_i\| = 1$ *pour tout* $i \in I$. *C'est une* base hilbertienne *si elle est orthonormée et si l'espace vectoriel engendré par les* e_i *est dense dans* H.

On note $\mathrm{vect}(e_i, i \in I)$ l'espace vectoriel engendré par les $(e_i)_{i\in I}$.

$$\mathrm{vect}(e_i, i \in I) = \Big\{\sum_{k\in I'} \lambda_k e_k \mid I' \subset I,\ I' \text{ fini},\ \lambda_k \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}\Big\}$$

La distance d'un point $x \in H$ à un sous-ensemble $F \subset H$ est définie par

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}.$$

Théorème 31 *Soit* H *un espace préhilbertien,* x *un élément de* H *et* $(e_1, ..., e_n)$ *une famille orthonormée d'éléments de* H. *Alors*

$$d(x, vect(e_1, ..., e_n))^2 = \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

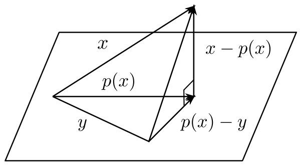
Le vecteur $p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$ *est la projection orthogonale de* x *sur* $vect(e_1, ..., e_n)$.

Preuve
Posons $F = \mathrm{vect}(e_1, ..., e_n)$. Commençons par montrer que $x - p(x)$ est orthogonal à tout élément $z = \sum_{1\le j\le n} \lambda_j e_j \in F$.

$$\langle z, x - p(x)\rangle = \Big\langle \sum \lambda_j e_j,\ x - \sum \langle x, e_k\rangle\, e_k \Big\rangle = \sum \lambda_j \langle e_j, x\rangle - \sum \lambda_j \overline{\langle x, e_j\rangle} = 0.$$

Les vecteurs $x - p(x)$ et $p(x) - y \in F$ sont orthogonaux pour tout $y \in F$, d'où

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|x-p(x)+p(x)-y\|^2\\ &= \|x-p(x)\|^2+\|p(x)-y\|^2.\end{aligned}$$



Nous voyons que le vecteur $p(x)$ réalise la distance de x à $\mathrm{vect}(e_1, ..., e_n)$. Prenons $y = 0$, on obtient $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$. De plus $\|p(x)\|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2$ car les (e_i) sont orthogonaux de norme un. Le résultat est démontré.

Dans la suite, on va être intéressé par des bases hilbertiennes indexées par $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}^d$. On peut cependant énoncer les théorèmes qui viennent avec un ensemble d'indices I quelconque, qu'on suppose dénombrable pour simplifier. Considérons une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace de Banach. Nous dirons que la série $\sum_{i\in I} x_i$ converge en norme vers un vecteur x si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $I' \subset I$ fini tel que pour tout I'' fini contenant I,

$$\|\sum_{i\in I''} x_i - x\| < \varepsilon.$$

On note alors $x = \sum_{i\in I} x_i$. Quand I est égal à $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}^d$ on retombe sur la définition habituelle en considérant des parties I' et I'' de la forme $\{0, ..., n\}$ ou $\{-n, ..., n\}^d$. Le résultat qui suit se déduit du théorème précédent.

Corollaire 9 *Soit H un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée d'éléments de H. Sont équivalents :*
- $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2,$
- $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$

Le théorème suivant généralise la décomposition en base orthonormée des éléments d'un espace euclidien de dimension finie.

Théorème 32 (décomposition en base hilbertienne) *Soit H un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors pour tout $x \in H$,*

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\, e_i \quad \textit{en norme,}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \quad \textit{(formule de Parseval).}$$

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{vect}(e_i, i \in I)$ est dense, on peut trouver $I' \subset I$ fini et λ_k,

$k \in I'$ tels que $y = \sum_{i \in I'} \lambda_i e_i$ est à distance inférieure à ε de x. Le vecteur y appartient à vect$(e_i, i \in I'')$ pour tout I'' fini contenant I', nous avons donc

$$\Big\| x - \sum_{i \in I''} \langle x, e_i \rangle \, e_i \Big\| \leq \|x - y\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre la convergence de la série vers x. La formule de Parseval se déduit du corollaire précédent.

Théorème 33 (synthèse de Fourier) *Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne. Alors pour toute suite $(\lambda_i)_{i \in I}$ satisfaisant $\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty$, il existe un unique élément $x \in H$ tel que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.*

Nous avons donc une isométrie bijective de $\ell^2(I)$ sur $L^2(X)$ donnée par

$$\begin{array}{ccc} (\lambda_i)_{i \in I} & \longrightarrow & \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \\ (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I} & \longleftarrow & x \end{array}$$

Preuve
Pour montrer que la série $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ converge, on vérifie qu'elle est de Cauchy. Soit I', I'' finis avec $I' \subset I''$.

$$\Big\| \sum_{i \in I'' \setminus I'} \lambda_i e_i \Big\|^2 = \sum_{i \in I'' \setminus I'} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i \in I'' \setminus I'} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i \in I'' \setminus I'} |\lambda_i|^2.$$

On peut choisir I' fini tel que ce dernier terme est plus petit que ε car la série $\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2$ est convergente. La démonstration est terminée.

Enfin, on montre qu'il est plutôt facile de construire des bases hilbertiennes. Rappelons qu'un espace topologique est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.

Théorème 34 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne indexée par les entiers.*

Preuve
Soit $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ une partie dénombrable dense. Il suffit d'appliquer le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une famille orthonormée qui engendre le même sous-espace. Cela revient à définir par récurrence une suite e_i qui est obtenue en soustrayant à x_i sa projection sur l'espace engendré par les e_j, $j < i$ s'il n'est pas déjà dans cet espace, et en normalisant.

$$e_i = \frac{x_i - \sum_{j<i} \langle x_i, e_j \rangle e_j}{\|x_i - \sum_{j<i} \langle x_i, e_j \rangle e_j\|}.$$

Les x_i sont dans le sous-espace engendré par les e_i, celui-ci est donc dense.

7.2 Séries de Fourier, point de vue L^2

Les séries de Fourier sont introduites par Joseph Fourier au début du dix-neuvième siècle, afin de résoudre l'équation de la chaleur. Étant donné une fonction $u_0 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $u(0) = u(2\pi)$, on cherche toutes les fonctions $u : [0, \infty[\times[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ de classe C^2 satisfaisant l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \qquad \text{pour } x \in [0,2\pi],\ t>0, \\ u(0,x) &= u_0(x) \qquad \text{pour } x \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Cette équation modélise l'évolution de la chaleur dans un milieu unidimensionnel identifié à l'intervalle $[0, 2\pi]$. La quantité $u_0(x)$ représente la température au point d'abscisse $x \in [0, 2\pi]$ à l'instant initial. La quantité $u_0(t, x)$ correspond à la température en x au temps $t > 0$.

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on peut s'intéresser aux solutions de la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(t)e^{inx}$$

et dériver formellement

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n'(t)e^{inx}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} -n^2 c_n(t)e^{inx}.$$

On obtient l'équation $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$ en identifiant les coefficients, avec pour solution $c_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$. On arrive à l'expression

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\, e^{-n^2 t}\, e^{inx}$$

les coefficients c_n étant déterminés par la condition initiale $u_0(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\, e^{inx}$.

Pour justifier ces calculs, il faut s'intéresser à la convergence des séries qui interviennent dans les expressions précédentes. Nous allons voir que les fonctions $x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbf{Z}$, forment une base hilbertienne de l'espace $L^2([0, 2\pi])$, si bien que les résultats du chapitre précédent s'appliquent et donnent la décomposition recherchée.

Théorème 35 *On se place sur l'ensemble $[0, 2\pi]$ muni de sa tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue normalisée $\frac{1}{2\pi}\lambda$. La famille $(e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2([0, 2\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda)$ des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Le corollaire suivant montre que toute fonction de L^2 admet une décomposition en série de Fourier, c'est une conséquence directe des théorèmes du chapitre précédent.

Corollaire 10 *Soit $f \in L^2([0,2\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda)$. Les coefficients de Fourier de f sont définis pour $k \in \mathbf{Z}$ par la formule*

$$c_k(f) = \langle f, e^{ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt.$$

On a alors

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt,$$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikx} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \ \text{en norme } L^2.$$

Pour toute suite de nombres complexes $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ telle que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\lambda_k|^2 < \infty$, il existe une unique fonction $f \in L^2([0,2\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda)$ telle que

$$\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k\, e^{ikx} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \ \text{en norme } L^2.$$

On a alors $\lambda_k = c_k(f)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Preuve du théorème
L'orthogonalité est immédiate. Pour m, $n \in \mathbf{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx = 0 \text{ si } n \neq m,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-inx}\, dx = 1.$$

Pour la densité, on donne une preuve qui repose sur l'égalité $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Commençons par calculer les coefficients de Fourier et la norme de la fonction $\varphi(x) = x$ définie sur $[0, 2\pi[$.

$$c_0(\varphi) = \langle \varphi, 1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, dx = \pi, \quad ||\varphi||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\ dx = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$c_k(\varphi) = \langle \varphi, e^{ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x\ e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\ dx = \frac{i}{k}.$$

Nous voyons que

$$||\varphi||^2 = \frac{4\pi^2}{3} = \pi^2 + 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle \varphi, e^{ikx}\rangle^2.$$

D'après un corollaire vu précédemment, ceci implique la convergence de la série $\sum\langle\varphi, e^{ikx}\rangle\, e^{ikx}$ vers φ en norme L^2 :

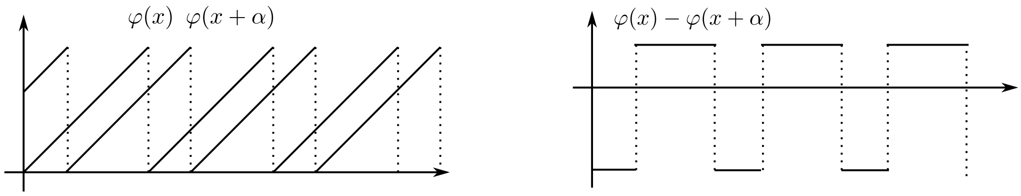
$$x = \pi + i \sum_{k\in\mathbf{Z}^*} \frac{e^{ikx}}{k} = \pi - 2\sum_{k\in\mathbf{N}^*} \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{en norme } L^2 \text{ sur } [0, 2\pi[.$$

La fonction φ est donc dans l'adhérence des e^{inx}, $n \in \mathbf{Z}$. Prolongeons φ à $\mathbf{R}$ tout entier de façon à ce que cette extension soit 2π-périodique et prenons $\alpha \in [0, 2\pi[$. Quitte à composer par $x \mapsto x + \alpha$ dans les expressions précédentes, nous voyons que les fonctions $\varphi(x + \alpha)$ sont aussi dans l'adhérence de $\mathrm{vect}(e^{ikx}, k \in \mathbf{Z})$.

$$\varphi(x + \alpha) = \pi + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{i}{k} e^{ik\alpha} e^{ikx}.$$

Nous avons maintenant, pour tout $x \in [0, 2\pi[$:

$$\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) + 2\pi - \alpha = 2\pi\ \mathbf{1}_{[0,\,2\pi-\alpha[}$$



On obtient les fonctions indicatrices d'intervalles de la forme $[0,\, 2\pi - \alpha[$ puis, par soustraction, toutes les fonctions indicatrices d'intervalles. Les fonctions en escaliers sont donc dans l'adhérence de $\mathrm{vect}(e^{ikx}, k \in \mathbf{Z})$. Le théorème s'ensuit, car ces fonctions sont denses dans L^2.

7.3 Exemples de bases hilbertiennes

Tout d'abord, notons qu'il existe d'autres normalisations possibles pour la base des e^{inx}. Par exemple, la famille $(e^{2\pi inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 1], \lambda)$. Pour $T > 0$, la famille $(e^{\frac{2\pi}{T}inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, T], \frac{1}{T}\lambda)$. Cette base est constituée de fonctions de période T.

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut utiliser les fonctions sinus et cosinus pour obtenir une base hilbertienne.

Théorème 36 *On se place sur l'ensemble $[0, 2\pi]$ muni de sa tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue normalisée $\frac{1}{\pi}\lambda$. La famille $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2([0, 2\pi], \lambda, \mathbf{R})$ des fonctions de carré intégrable à valeurs réelles, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Le théorème de décomposition devient

Théorème 37 *Pour toute fonction $f \in L^2([0,2\pi],\lambda,\mathbf{R})$ à valeurs réelles, nous avons*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \qquad \text{en norme } L^2$$

avec les notations

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Nous avons également des bases hilbertiennes constituées de fonctions trigonométriques à plusieurs variables.

Théorème 38 *Pour $k = (k_1,...,k_d) \in \mathbf{Z}^d$ et $x = (x_1,...,x_d) \in \mathbf{Z}^d$, on pose $k.x = \sum_{1\leq i\leq d} k_i x_i$. Alors la famille $(e^{ik.x})_{k\in\mathbf{Z}^d}$ est une base hilbertienne de l'espace $L^2([0,2\pi]^d)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[0,2\pi]^d} f(x_1,...,x_d)\,\overline{g(x_1,...,x_d)}\,dx_1...dx_d.$$

Toute fonction de $L^2([0,2\pi]^d)$ est donc limite de sa série de Fourier

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} c_k(f)e^{ik.x} \text{ au sens de la norme } L^2$$

avec $c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[0,2\pi]^d} f(x)e^{-ik.x}\,dx_1...dx_d$.

Il existe d'autres bases hilbertiennes intéressantes. Par exemple, la famille de fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{n!}\,e^{\frac{x}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n), \quad n\in\mathbf{N},$$

forme une base hilbertienne de $L^2([0,\infty[)$ muni du produit $\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)\,dx$. Ces fonctions sont de la forme $e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)$, où L_n est un polynôme de degré n appelé *polynôme de Laguerre*.

La famille de fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\,e^{\frac{x^2}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n\in\mathbf{N},$$

forme une base hilbertienne de $L^2(\,]-\infty,\infty[\,)$ muni du produit scalaire suivant : $\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx$. Ces fonctions sont de la forme $e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$, où H_n est un polynôme de degré n appelé *polynôme de Hermite*.

7.4 Séries de Fourier, convergence ponctuelle

On se pose maintenant la question de la convergence simple de la série de Fourier d'une fonction suffisamment régulière. Du fait de la périodicité des séries de Fourier, l'espace fonctionnel naturel à considérer pour la convergence ponctuelle est celui des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui sont 2π-périodiques. Cet espace s'identifie aux fonctions de $C^0([0, 2\pi])$ qui prennent la même valeur en 0 et 2π, simplement en restreignant les fonctions à $[0, 2\pi]$. Notons que cet espace est inclu dans $L^2([0, 2\pi])$ car les fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ sont bornées donc de carrés intégrables.

Lorsque la fonction est C^1, Johann Dirichlet montre en 1829 qu'on a convergence simple et même convergence uniforme de la série.

Théorème 39 (Dirichlet, version uniforme) *Soit $f \in C^1([0, 2\pi])$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f. En particulier,*

$$\text{pour tout } x \in [0, 2\pi], \quad f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k(f)\, e^{ikx}.$$

La preuve repose sur les lemmes suivants.

Lemme 11 *Soit $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ des nombres complexes satisfaisant $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k| < \infty$. Alors la série $\sum c_k e^{ikx}$ converge uniformément vers une fonction continue.*

Preuve
L'espace $C^0([0, 2\pi])$ est complet relativement à la norme uniforme. La convergence de la série des normes implique donc la convergence en norme.

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} ||c_k e^{ikx}||_\infty = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k| < \infty.$$

De plus, une limite uniforme de fonctions continues est continue, d'où le résultat.

Lemme 12 *Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ une fonction C^1 telle que $f(2\pi) = f(0)$. Alors*

$$c_k(f') = ikc_k(f).$$

Preuve
Cette relation s'obtient par une intégration par partie.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[f(x)e^{-ikx}\Big]_0^{2\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = ikc_k(f).$$

Preuve du théorème de Dirichlet
Comme la dérivée est bornée sur $[0, 2\pi]$, elle est dans L^2 et nous avons

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^*} |c_k(f)| = \sum_{k\in\mathbf{Z}^*} \frac{1}{k}\, k\, |c_k(f)| \leq \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^*} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^*} k^2|c_k(f)|^2\Big)^{1/2}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les séries.

$$\sum k^2|c_k(f)|^2 = \sum |c_k(f')|^2 = ||f'||_2^2 < \infty.$$

La série de Fourier de f converge donc uniformément. La convergence uniforme implique la convergence L^2, la limite au sens uniforme doit donc coïncider avec f presque partout. Comme ces deux fonctions sont continues, elles sont égales et la limite uniforme est égale à f. Le théorème est démontré.

On remarquera qu'on peut affaiblir les hypothèses dans le théorème de Dirichlet. Il suffit que f soit dérivable, de dérivée bornée ou dans L^2, pour faire fonctionner l'intégration par partie et obtenir le résultat.

Le théorème de Dirichlet n'est cependant pas vrai pour les fonctions continues. Paul du Bois-Reymond donne en 1876 un exemple de fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point, puis en un ensemble dense de points.

Peut-on malgré tout démontrer de la convergence presque partout ? A. N. Kolmogorov donne en 1926 un exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier diverge en tout point. Il faut attendre 1966 pour que la question de la convergence presque partout dans le cadre L^2 soit finalement résolue.

Théorème 40 (Carleson) *La série de Fourier d'une fonction mesurable définie sur* $[0, 2\pi]$*, de carré intégrable, converge presque partout vers cette fonction.*

Ce théorème difficile dépasse le cadre de ce cours, il s'étend au cas des fonctions dans L^p, $p > 1$.

Voici une généralisation du théorème de Dirichlet aux fonctions de classe C^n qui montre que la régularité de f est liée à la décroissance de ses coefficients de Fourier.

Théorème 41 *Soit* $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction continue* 2π*-périodique.*
– Si f *est de classe* C^n *sur* $\mathbf{R}$*,*

$$c_k(f^{(n)}) = (ik)^n c_k(f), \quad ||f^{(n)}||_2^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^{2n}|c_k(f)|^2.$$

– Si les coefficients de f *satisfont* $\sum k^{2n}|c_k(f)|^2 < \infty$*, alors* f *est de classe* C^{n-1}*.*
Dans les deux cas, pour tout $m < n$*,*

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \quad f^{(m)}(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (ik)^m c_k(f)\, e^{ikx} \textit{ uniformément.}$$

En particulier, si f est C^n, alors $c_k(f)$ est négligeable devant $\frac{1}{k^n}$. Si $c_k(f)$ est de l'ordre de $\frac{1}{k^{n+1}}$, alors f est C^{n-1}.

La preuve procède comme précédemment. On commence par montrer la formule $c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f)$ à l'aide d'intégrations par partie et en utilisant l'égalité de Parseval pour $f^{(m)}$. Pour dériver, on utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour la mesure de comptage sur $\mathbf{Z}$. La domination est donnée par l'inégalité $|c_k(f)(ik)^m e^{inx}| \leq |c_k| k^n/k$, cette dernière suite étant de somme finie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, les espaces

$$H^n = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ continue } 2\pi\text{-périodique telle que } \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^{2n} |c_k(f)|^2 < \infty\}$$

sont appelés *espaces de Sobolev*. Ce sont des espaces fonctionnels bien adaptés à l'étude des propriétés des séries de Fourier car ce sont des espaces de Hilbert une fois munis du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \sum k^{2n} c_k(f)\, \overline{c_k(g)}$. On vient de démontrer l'inclusion $C^n \subset H^n \subset C^{n-1}$, ils remplacent avantageusement les espaces C^k. Notons enfin que le théorème de Dirichlet concernant la convergence uniforme des séries de Fourier est valide pour les fonctions de H^1.

On termine par un lemme célèbre que nous n'avons pas utilisé jusqu'à présent.

Lemme 13 (Riemann-Lebesgue) *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable. Alors*

$$\int_I f(x)\, e^{-itx}\, dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Ce lemme montre que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une fonction intégrable tendent vers zéro quand n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Quand f est de carré intégrable et I est borné, c'est une conséquence immédiate de la formule de Parseval.

Preuve
Si f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b] \subset I$,

$$\int_I f(x)\, e^{-itx}\, dx = \int_a^b e^{-itx}\, dx = \left[\frac{e^{-itx}}{-it}\right]_a^b = \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Par linéarité, le résultat est encore vrai pour les fonctions en escalier. On procède ensuite par densité. Soit $f \in L^1$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{f}$ une fonction en escalier telle que $\|f - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon$. Nous venons de voir qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout $t > T$,

$$\left|\int_I \tilde{f}(x)\, e^{-itx}\, dx\right| < \varepsilon.$$

Nous avons donc pour $t > T$,

$$\left|\int_I f(x)\, e^{-itx}\, dx\right| \leq \int_I |(f(x) - \tilde{f}(x))\, e^{-itx}|\, dx + \int_I |\tilde{f}(x)\, e^{-itx}|\, dx \leq \|f\|_1 + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

D'où la conclusion quand t est positif. On raisonne de même pour t négatif.

7.5 Complément : le cas C^1 par morceaux

On donne une version du théorème de Dirichlet pour les fonctions avec saut.

Théorème 42 (Dirichlet, cas ponctuel) *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 2π-périodique, x_1, ... $x_n \in [0, 2\pi[$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et $x_n = x_1 + 2\pi$, tels que f soit C^1 sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. On suppose que f et f' possèdent une limite à gauche et à droite en chacun des x_i et on pose*

$$f(x^-) = \lim_{\substack{t \to x \\ <}} f(t), \quad f(x^+) = \lim_{\substack{t \to x \\ >}} f(t).$$

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}.$$

Preuve
Le cas où f est continue découle du théorème de Dirichlet dans le cas uniforme. Si f a une discontinuité en un point $x_1 \in [0, 2\pi[$, on peut lui soustraire une fonction affine g périodique avec une discontinuité en x_1 de manière à effacer celle-ci. On prend par exemple

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}(f(x_1^-) - f(x_1^+))(x - x_1) + f(x_1^+) \quad \text{pour } x \in]x_1, x_1 + 2\pi[$$

qu'on prolonge en une fonction 2π-périodique.

En procédant de la même façon en tous les x_i, on se ramène au cas où f est affine avec une seule discontinuité. Par un changement de variable affine, on peut ramener la discontinuité en 0 et se restreindre à la fonction $f(x) = x$ pour $x \in [0, 2\pi[$. On a vu précédemment que

$$x = \pi + i \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} \frac{e^{ikx}}{k} = \pi - 2 \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{en norme } L^2 \text{ sur } [0, 2\pi[.$$

On veut montrer que cette série converge vers x pour $x \in]0, 2\pi[$ et vers π si $x = 0$. Le cas $x = 0$ est évident. Pour le reste, on fait une intégration par partie discrète, c'est-à-dire une règle d'Abel. Posons $a_k(x) = \sin(kx)$.

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j(x) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(e^{ijx}) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(e^{ijx}) = \mathrm{Im}\Big(e^{ix}\, \frac{e^{ikx} - 1}{e^{ix} - 1}\Big) \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}.$$

On obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) + \frac{A_n(x)}{n+1}.$$

La série apparaissant au second terme est uniformément convergente sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, 2\pi[$: $\sum \|A_k(x)(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)})\|_\infty < \infty$. On a donc convergence vers une fonction continue sur $]0, 2\pi[$. On sait de plus qu'une sous-suite converge presque partout vers $f(x) = x$, du fait de la convergence L^2. Deux fonctions continues qui coïncident presque partout sont égales, d'où le résultat.

7.6 Complément : dualité et compacité faible

Le dual d'un espace de Banach est l'ensemble des formes linéaires sur cet espace. Nous allons voir que pour un espace de Hilbert H, ces formes s'expriment toutes à l'aide du produit scalaire.

Théorème 43 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors il existe un unique vecteur $p(x) \in F$ réalisant la distance de x à F. Le vecteur $x - p(x)$ est orthogonal à F.*

Preuve
On part de l'identité du parallèlogramme valide pour $x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

et qui se démontre en développant les normes au premier terme. Soit $x_n \in F$ tel que $d(x,F) = \lim_n \|x - x_n\|$. Appliquons cette inégalité à $x - x_m$ et $x - x_n$.

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(-x_n - x_m)\|^2 \\ &\leq 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - 4d(x,F). \end{aligned}$$

Le second terme est proche de zéro quand m et n sont grand, la suite (x_n) est de Cauchy dans F et converge vers un vecteur $p(x) \in F$ qui réalise la distance $d(x,F)$. La précédente inégalité avec x_n et x_m remplacés par deux projections sur F donne l'unicité de la projection. Montrons l'orthogonalité. Soit $y \in F$, $a \in \mathbf{C}$.

$$0 \leq \|x - p(x) - ay\|^2 - \|x - p(x)\|^2 = 2a\mathrm{Re}(\langle x - p(x), y\rangle) + a^2\|y\|^2$$

On peut alors diviser par a et faire tendre a vers zéro pour obtenir l'inégalité $\mathrm{Re}(\langle x - p(x), y\rangle) \geq 0$. On conclut en remplaçant y par $-y$ puis par $\pm iy$.

Corollaire 11 *Soit H un espace de Hilbert et $l : H \to \mathbf{C}$ une application linéaire continue. Alors il existe $v \in H$ tel que $l(u) = \langle u, v\rangle$ pour tout $u \in H$.*

Preuve
Si l est non nulle, on projette un vecteur hors de $l^{-1}(0)$ sur $l^{-1}(0)$ pour construire un vecteur w orthogonal à $l^{-1}(0)$ de norme un. Soit $u \in H$, le vecteur $u - \frac{l(u)}{l(w)}w$ est dans $l^{-1}(0)$ donc orthogonal à w et $\langle w, u - \frac{l(u)}{l(w)}w\rangle = 0$ implique $l(u) = \langle l(w)w, u\rangle$.

L'orthogonal de F est défini par

$$F^{\perp} = \{x \in H \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Le théorème précédent montre que F et $F^{\perp}$ sont en somme directe : tout vecteur $x \in H$ est somme de sa projection $p(x) \in F$ et du vecteur $x - p(x) \in F^{\perp}$.

En sus de la convergence en norme, un espace de Hilbert possède un autre type de convergence appelé convergence faible. La boule unité est séquentiellement compacte pour cette topologie, ce qui s'avère très utile en pratique.

Définition 24 *Une suite x_n d'éléments de H converge faiblement vers $x \in H$ si pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle$.*

Théorème 44 *soit $\mathcal{D}$ une famille d'éléments de H qui engendre un sous-espace vectoriel dense de H. Pour montrer que x_n converge faiblement vers x, il suffit de vérifier la convergence $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle$ pour $y \in \mathcal{D}$.*

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$, $y \in H$, $y_k \in Vect(\mathcal{D})$ tel que $||y_k - y|| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. On a la majoration

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \ \leq |\langle x_n - x, y_k\rangle| + ||x_n - x||\ ||y_k - y||.$$

Comme la suite $||x_n - x||$ est bornée, on peut trouver un $k \in \mathbf{N}$ tel que le dernier terme de cette inégalité soit inférieur à ε pour tout n. Pour cette valeur de k, la suite $\langle x_n - x, y_k\rangle$ tend vers 0. On peut donc majorer $|\langle x_n - x, y\rangle|$ par $2\,\varepsilon$ dès que n est assez grand.

Théorème 45 *Une suite faiblement convergente est bornée.*

Preuve
Montrons qu'il existe $y \in H$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\sup\ \{\langle x_n, z\rangle \mid n \in \mathbf{N},\ z \in B(y, \varepsilon)\}$ est fini. Raisonnons par l'absurde. On construit par récurrence une suite croissante d'entiers n_k et une suite de boules fermées B_k décroissante pour l'inclusion, dont le diamètre tend vers 0, et telles que pour tout $z \in B_k$, $\langle x_{n_k}, z\rangle \ \geq 2^k$.

Soit y_∞ l'unique point appartenant à tous les B_k. La majoration $\langle x_{n_k}, y_\infty\rangle \ \geq 2^k$ contredit la convergence faible de la suite x_n. Le caractère borné de la suite $||x_n||$ découle alors de l'inégalité $||x_n|| = \frac{1}{\varepsilon}(\langle x_n, y + \varepsilon \frac{x_n}{||x_n||}\rangle - \langle x_n, y\rangle)$.

Théorème 46 (Banach-Alaoglu) *Soit H un espace de Hilbert, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'éléments de H. Alors on peut trouver $x \in H$ et une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge faiblement vers x.*

Preuve
Soit F le sous-espace vectoriel fermé engendré par les x_n et $\{e_m\}$ une base hilbertienne de F. Comme $\langle e_1, x_n\rangle$ est une suite bornée, on peut trouver une sous-suite $x_{n'_i}$ telle que $\langle e_1, x_{n'_i}\rangle$ soit convergente. De cette sous-suite, on peut extraire une sous-suite telle que $\langle e_2, x_{n''_i}\rangle$ converge, et ainsi de suite. En prenant le k^{ieme} terme de la k^{ieme} sous-suite, on construit une suite x_{n_k} telle que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la suite $\langle e_m, x_{n_k}\rangle$ est convergente. Notons c_m sa limite. Soit $N \in \mathbf{N}$.

$$\|x_{n_k}\|^2 \ \geq \sum_{m=0}^{N} |\langle e_m, x_{n_k}\rangle|^2 \ \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ \sum_{m=0}^{N} |c_m|^2$$

La suite $\|x_{n_k}\|$ étant bornée, cette dernière quantité est convergente et on obtient un élément de H bien défini en posant $x = \sum c_i e_i$. Cet élément vérifie : $\forall\ m \in \mathbf{N}$, $\langle e_m, x_{n_k}\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} \langle e_m, x\rangle$. On a donc $\langle z, x_{n_k}\rangle \longrightarrow \langle h, x\rangle$ si $z \in F$. Si $z \in F^\perp$, on a $\langle z, x_{n_k}\rangle = 0 = \langle z, x\rangle$. Ceci démontre le théorème.

7.7 Exercices

exercice 1
Montrer que la projection p sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H est lipschitzienne : $\|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $x, y \in H$.

exercice 2
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H.
– Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
– Montrer que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.
– En déduire que F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

exercice 3
Développer en série de Fourier les fonctions définies sur $[0, 2\pi]$ suivantes.

$$\frac{1}{2 + \cos(x)}, \quad |x - \pi|, \quad x(2\pi - x).$$

exercice 4
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 et $\theta \in \mathbf{R}$ un nombre irrationnel. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \quad \text{uniformément.}$$

On pourra développer f en série de Fourier. Montrer que la convergence a lieu en norme L^2 si $f \in L^2([0, 2\pi])$.

exercice 5
Soit $f \in L^p([0, 2\pi])$. On pose $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ et $K_n(x) = \frac{1}{n}\Big(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\Big)^2$. Vérifier que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)K_n(x - y)\,dy.$$

Montrer que cette suite tend vers f en norme L^p. Si de plus f est continue et $f(0) = f(2\pi)$, montrer que la convergence est uniforme (théorème de Fejér).

exercice 6
Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ continue. On pose $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$ et on suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $f(x) \leq \frac{C}{1+x^2}$ et $\hat{f}(\xi) \leq \frac{C}{1+\xi^2}$.
– Montrer que $\tilde{f}(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(x + 2\pi k)$ appartient à $L^2([0, 2\pi])$.
– En déduire, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)\,e^{inx} = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(x + 2\pi k)$.
– En considérant $f(x) = e^{-a|x|}$, montrer que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{a}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{\tanh(\pi a)}$.

Chapitre 8

Transformée de Fourier

On cherche à généraliser la notion de série de Fourier aux fonctions définies sur $\mathbf{R}$. L'espace $L^2(\mathbf{R}, \lambda)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f\, \bar{g}\, d\lambda$ est un espace de Hilbert, mais les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ n'appartiennent pas à cet espace. Il va donc falloir procéder par approximation, en employant le produit de convolution.

8.1 Transformée de Fourier dans L^2

On commence par définir la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

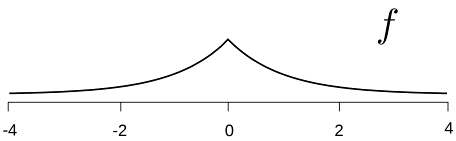
Définition 25 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable relativement à la mesure de Lebesgue. Sa transformée de Fourier est définie par*

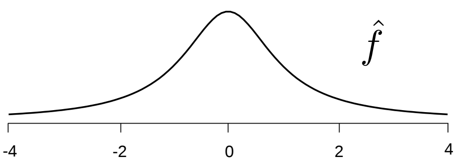
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

Pour illustrer la définition précédente, calculons la transformée de $f(x) = e^{-|x|}$.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-|x|}\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\, e^{-i\xi x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x}\, e^{-i\xi x}\, dx,$$

$$\hat{f}(\xi) = \Big[-\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi}\Big]_{x=0}^{\infty} + \Big[\frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi}\Big]_{x=-\infty}^{0} = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$





Premières propriétés

– La transformée de Fourier est linéaire : $\widehat{af+g} = a\hat{f} + \hat{g}$ pour tout $a \in \mathbf{C}$.

– La fonction $\hat{f}$ est continue d'après le théorème de continuité sous le signe intégral. De fait, la fonction $(x, \xi) \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est continue à x fixé et bornée par la fonction intégrable $|f(x)|$ qui ne dépend pas de ξ.

– La majoration $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ montre que $f \mapsto \hat{f}$ est continue de L^1 dans C^0.

La variable x est souvent appelée variable d'espace et ξ variable de phase.

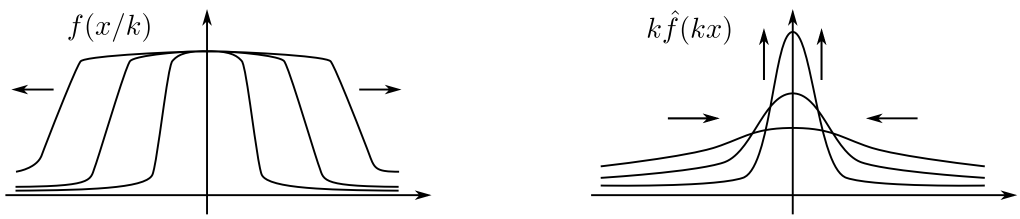
– Une translation en espace correspond à une rotation de la phase. Pour $h \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{f(x+h)} = \int_{\mathbf{R}} f(x+h) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-i(y-h)\xi}\, dx = e^{ih\xi} \hat{f}(\xi).$$

– Une homothétie contracte en abscisse et dilate en ordonnée la transformée.

$$\widehat{f(ax)} = \int_{\mathbf{R}} f(ax) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-i\xi y/a} \frac{dy}{|a|} = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big)$$

pour tout $a \neq 0$. Si nous prenons $a = 1/k$, le second terme $\xi \mapsto k\widehat{f}(k\xi)$ est une unité approchée. Cette remarque va jouer un rôle crucial dans la suite.



Extension à L^2

Nous voulons maintenant étendre la définition de la transformée de Fourier aux fonctions de L^2. L'expression donnée plus haut n'est plus bien définie mais on peut tout de même chercher à lui donner un sens par un passage à la limite. Nous avons, pour $f \in L^1$,

$$\widehat{f\mathbf{1}_{[-N,N]}}(\xi) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \hat{f}(\xi) \quad \text{en norme uniforme.}$$

C'est une conséquence du théorème de convergence dominée :

$$\Big|\hat{f}(\xi) - \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\xi x}\, dx\Big| = \Big|\int_{(|x|>N)} f(x) e^{-i\xi x}\, dx\Big| \leq \int_{(|x|>N)} |f(x)|\, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Nous allons montrer qu'on a encore convergence, mais pas de manière uniforme, pour les fonctions de L^2. Pour cela, on a besoin d'un lemme qui fait le lien entre transformée de Fourier et convolution.

Lemme 14 *Soit $f, g, \psi \in L^1$. Alors $\langle \hat{f}\,\psi, \hat{g}\rangle = \langle f, g * \bar{\hat{\psi}}\,\rangle$.*

Preuve

On applique le théorème de Fubini à l'intégrale triple.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}\,\psi, \hat{g}\rangle &= \iiint f(x)\psi(\xi)\overline{g(y)}\, e^{-i\xi(x-y)}\, dx\, dy\, d\xi \\
&= \int f(x)\Big(\int \overline{g(y)} \int \psi(\xi) e^{-i\xi(x-y)} d\xi\ dy\Big)\, dx \\
&= \int f(x)\Big(\int \overline{g(y)}\hat{\psi}(x-y)\, dy\Big)\, dx = \langle f, g * \bar{\hat{\psi}}\rangle.
\end{aligned}$$

Théorème 47 *Il existe une unique application linéaire continue $f \mapsto \hat{f}$ définie de $L^2(\mathbf{R})$ dans $L^2(\mathbf{R})$ dont la restriction à $L^1 \cap L^2$ coïncide avec la transformée de Fourier sur L^1. Cette application vérifie les égalités*

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle, \quad \|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2 \quad (\textit{formule de Plancherel}).$$

Preuve

On commence par démontrer la formule de Plancherel pour $f \in L^1 \cap L^2$. Posons $\varphi(x) = e^{-|x|}$ et $\varphi_k(x) = \varphi(x/k)$. D'après le lemme et par convergence croissante,

$$\langle f, f * \widehat{\varphi_k} \rangle = \langle \hat{f}\, \varphi_k, \hat{f} \rangle = \int |\hat{f}(\xi)|^2 \, \varphi(\xi/k) \, d\xi \xrightarrow[k \to \infty]{} \|\hat{f}\|_2^2.$$

On a vu que $\widehat{\varphi_k}(\xi) = k \hat{\varphi}(k\xi)$, de plus $\int \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi = 2\pi$. Par le théorème des approximations de l'unité, $f * \widehat{\varphi_k}$ converge en norme L^2 vers $2\pi f$ et par continuité du produit scalaire, $\langle f, f * \widehat{\varphi_k} \rangle$ converge vers $2\pi \|f\|_2^2$ comme souhaité.

Considérons $f \in L^2$. La fonction $f_n = f \mathbf{1}_{[-n,n]}$ est dans $L^1 \cap L^2$, si bien que pour $m, n \in \mathbf{N}$,

$$\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f_m - f_n\|_2.$$

La suite f_n converge vers f en norme L^2, elle est donc de Cauchy et il en va de même de la suite $\widehat{f_n}$ qui converge en norme L^2. On pose alors

$$\hat{f} = \lim \widehat{f \mathbf{1}_{[-n,n]}}.$$

Cette limite satisfait

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim \|\widehat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \lim \|f_n\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2.$$

L'égalité pour le produit scalaire vient de la formule

$$4\, \langle f, g \rangle = \|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2.$$

Illustration de la formule de Plancherel

On a vu précédemment que $\widehat{e^{-|x|}} = \frac{2}{1+\xi^2}$. La formule de Plancherel donne

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{4}{(1+\xi^2)^2} \, d\xi = 2\pi \int_{\mathbf{R}} e^{-2|x|} \, dx = 2\pi.$$

On s'intéresse ensuite à la fonction $\mathbf{1}_{[-1,1]}$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x} \, dx = 2\, \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Nous pouvons à nouveau appliquer la formule de Plancherel.

$$\int_{\mathbf{R}} \Big(\frac{\sin \xi}{\xi} \Big)^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbf{R}} (\mathbf{1}_{[-1,1]}(x))^2 \, dx = \pi.$$

De là, on montre que $\int_0^\infty \frac{\sin(\xi)}{\xi} \, d\xi = \frac{\pi}{2}$ en faisant une intégration par partie.

$$\int_0^N \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi = \Big[\frac{1 - \cos(\xi)}{\xi} \Big]_0^N + \int_0^N \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi^2} \, d\xi = \frac{1 - \cos(N)}{N} + \int_0^N 2\, \frac{\sin^2(\frac{\xi}{2})}{\xi^2} \, d\xi.$$

Cette dernière quantité converge vers $\frac{\pi}{2}$ comme on vient de le voir.

8.2 Formule d'inversion de Fourier

On passe maintenant à la synthèse de Fourier. Nous avons besoin d'un résultat préliminaire appelé lemme des chapeaux.

Lemme 15 (Lemme des chapeaux) *Soit $f, g \in L^1$ ou $f, g \in L^2$. Alors*

$$\langle \hat{f}, \bar{g} \rangle = \langle f, \bar{\hat{g}} \rangle.$$

Preuve
Si f, g sont intégrables, on applique le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x) g(x)\, dx &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(\xi) e^{-i\xi x} g(x)\, d\xi\, dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(\xi) e^{-i\xi x} g(x)\, dx\, d\xi = \int_{\mathbf{R}} f(\xi) \hat{g}(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Si f et g sont dans L^2, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$|\langle \hat{f}, \bar{g} \rangle| \leq \|\hat{f}\|_2 \|g\|_2 = 2\pi \|f\|_2 \|g\|_2, \quad |\langle f, \bar{\hat{g}} \rangle| \leq \|f\|_2 \|\hat{g}\|_2 = 2\pi \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Les deux fonctions $(f, g) \mapsto \langle \hat{f}, \bar{g} \rangle$ et $(f, g) \mapsto \langle f, \bar{\hat{g}} \rangle$ sont continues sur $L^2 \times L^2$, coïncident sur le sous-espace dense $L^1 \cap L^2$, elles sont donc égales partout.

Théorème 48 (Formule d'inversion de Fourier) *Soit $f \in L^2$. Alors pour presque tout $x \in \mathbf{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(-x).$$

Si de plus f est continue et $\hat{f}$ est intégrable, l'égalité a lieu pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Preuve
On applique le lemme des chapeaux et la formule de Plancherel.

$$\langle \hat{\hat{f}}, g \rangle = \langle \hat{f}, \bar{\hat{\bar{g}}} \rangle = \langle \hat{f}(\xi), \hat{g}(-\xi) \rangle = 2\pi \langle f(-x), g(x) \rangle$$

d'où $\langle \hat{\hat{f}}(-x) - 2\pi f(x), g(x) \rangle = 0$. On prend $g(x) = \hat{\hat{f}}(-x) - 2\pi f(x)$ pour conclure.

Si $\hat{f}$ est intégrable, la transformée $\hat{\hat{f}}(-x)$ est continue. Comme elle est égale à f presque partout, on a égalité pour tout $x \in \mathbf{R}$ dès que f est continue.

Corollaire 12 *L'application $f \mapsto \hat{f}$ est une bijection continue de L^2 dans L^2.*

Pour terminer, remarquons que la suite $\hat{f}\, \mathbf{1}_{[-N,N]}$ converge en norme L^2 vers $\hat{f}$ par convergence dominée. Sa transformée de Fourier vaut $\int_{-N}^{N} \hat{f}(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi$ et converge vers $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ en norme L^2. Résumons les formules que nous avons obtenues dans ce chapitre, exprimées sous forme intégrale.

Corollaire 13 *Soit $f, g \in L^2$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2\, dx,$$

$$\int_{\mathbf{R}} f(\xi)\, \hat{g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx,$$

$$\int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} \hat{f}(\xi) \quad \text{en norme } L^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x) \quad \text{en norme } L^2.$$

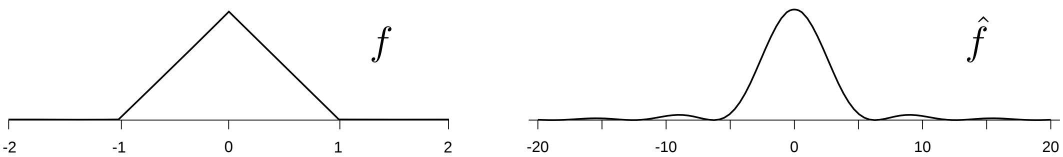
Exemples

– On sait que $\widehat{e^{-|x|}} = \frac{2}{1+\xi^2}$. C'est une fonction intégrable. Par inversion de Fourier,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+\xi^2}\, d\xi = \pi e^{-|x|} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

– Considérons maintenant la fonction continue $f(x) = (1-|x|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{-ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{\xi^2}(2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}) = \frac{4\sin^2(\xi/2)}{\xi^2}.$$



Cette transformée est intégrable, la formule d'inversion implique pour $x \in [-1,1]$,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^2(\xi/2)}{\xi^2}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2}(1-|x|).$$

Le cas $x = 0$ est intéressant, on retrouve l'égalité $\int_{\mathbf{R}} (\sin(\xi)/\xi)^2\, d\xi = \pi$.

– On a vu que $\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}}(\xi) = 2\,\frac{\sin\xi}{\xi}$. Par inversion de Fourier,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\sin\xi}{\xi} e^{i\xi x}\, d\xi = \pi\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \quad \text{en norme } L^2.$$

On vérifie par un calcul direct qu'on n'a pas égalité pour $x = 1$ dans cette formule.

– Calculons la transformée de $x \mapsto e^{iax}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$ avec $a \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im}(a) > 0$.

$$\int_0^{\infty} e^{iax} e^{-i\xi x}\, dx = \left[\frac{e^{i(a-\xi)x}}{i(a-\xi)}\right]_0^{\infty} = \frac{-i}{\xi - a}$$

Par inversion de Fourier, $\widehat{\dfrac{1}{x-a}} = 2\pi i e^{-ia\xi}\, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(\xi)$ presque partout.

Un calcul similaire montre que $\widehat{\dfrac{1}{x-a}} = -2\pi i e^{-ia\xi}\, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(\xi)$ si $\mathrm{Im}(a) < 0$.

8.3 Propriétés de la transformée

Proposition 29 *Soit $f \in L^1$ et $g \in L^1$ ou L^2. Alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$.*

Preuve
Si $g \in L^1$, on utilise le théorème de Fubini, dont l'application est justifiée par l'intégrabilité de $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)\,e^{-i\xi x}$.

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)\,e^{-i\xi x}\,dt\,dx = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(u)g(v)e^{-i\xi(u+v)}\,du\,dv,$$

en faisant le changement de variables $(u,v) = (t, x-t)$. Le dernier terme est égal à $\hat{f}\hat{g}$ comme souhaité. Lorsque $g \in L^2$, on note que les applications $g \mapsto \widehat{f * g}$ et $g \mapsto \hat{f}\,\hat{g}$ sont continues sur L^2 en vertu des inégalités

$$\|\widehat{f * g}\|_2 = \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2, \quad \|\hat{f}\,\hat{g}\|_2 \leq \|\hat{f}\|_\infty\|\hat{g}\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2.$$

et coïncident sur $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans L^2, donc sur L^2 tout entier.

Proposition 30 *Soit $f, g \in L^1$ ou L^2. Si $\hat{f} = \hat{g}$ alors $f = g$ presque partout.*

Preuve
Le cas L^2 découle de la formule de Plancherel. Soit $\varphi \in L^1 \cap L^2$ telle que $\int \varphi(x)\,dx = 1$ ainsi que $\varphi_k(x) = k\varphi(kx)$. Nous avons

$$f * \varphi_k, g * \varphi_k \in L^2, \qquad \widehat{f * \varphi_k} = \hat{f}\,\widehat{\varphi_k} = \hat{g}\,\widehat{\varphi_k} = \widehat{g * \varphi_k}$$

ce qui implique $f * \varphi_k = g * \varphi_k$. Grâce au théorème d'approximation de l'unité, on peut extraire successivement deux sous-suites qui convergent vers f et g.

Proposition 31 *On a l'égalité $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$*
– pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ si $f \in L^1$ est dérivable et $f' \in L^1$,
– pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$ si $f \in L^2$ est dérivable et $f' \in L^2$.

Preuve
Soit $x \in \mathbf{R}$ et $h > 0$. Par Cauchy-Schwarz, f' est intégrable sur $[x, x+h]$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f'(y)\,dy = \int_0^1 f'(x+th)\,dt.$$

Le lemme 8 montre que cette quantité converge vers f' en norme L^1 ou L^2.

$$\Big\|\int_0^1 f'(x+th)\,dt - f'(x)\Big\| \leq \int_0^1 \|f'(x+th) - f'(x)\|\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

La transformée du taux de variation converge donc en norme L^∞ ou L^2 vers $\widehat{f'}$, ce qui implique la convergence presque partout d'une sous-suite vers $\widehat{f'}$. De plus,

$$\frac{\widehat{f(x+h) - f(x)}}{h} = \frac{e^{ih\xi} - 1}{ih\xi}\,i\xi\hat{f}(\xi) \xrightarrow[h\to 0]{} i\xi\hat{f}(\xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et le résultat s'ensuit en identifiant les limites.

On obtient une réciproque en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral dans la définition de $\hat{f}$.

Proposition 32 *Soit $f \in L^1$ telle que $xf(x) \in L^1$, alors $\hat{f}$ est C^1 et $\hat{f}\,' = -i\widehat{xf}$.*

Le cas $xf(x) \in L^2$ est plus subtil. La fonction $\hat{f}$ n'est alors pas dérivable partout, mais elle admet tout de même une dérivée en un sens généralisé. Formaliser cela nécessiterait d'introduire l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathbf{R}) = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid \exists\, g \in L^2 \text{ tel que } \frac{1}{h}\Big(f(x+h) - f(x)\Big) \xrightarrow[h\to 0]{L^2} g\}$$

La fonction g est appelée dérivée généralisée au sens L^2 de f. On vient de voir que g coïncide bien avec la dérivée usuelle de f si celle-ci existe et appartient à L^2. L'espace $H^1(\mathbf{R})$ joue un rôle important en théorie de Fourier.

Enfin rappelons le résultat suivant vu au chapitre précédent.

Lemme 16 (Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in L^1$. Alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0$.*

Applications
L'analyse de Fourier est un outil très utile pour résoudre les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles linéaires. Pour illustrer son usage, intéressons nous à l'équation différentielle $f - f'' = g$, où g est une fonction continue intégrable définie sur la droite réelle. On cherche toutes les solutions f intégrables de classe C^2 dont les dérivées f' et f'' sont intégrables. Appliquons la transformée de Fourier :

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) - \widehat{f''}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \xi^2\hat{f}(\xi)$$

ce qui donne

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\,\hat{g}(\xi) = \frac{1}{2}\,\widehat{e^{-|x|}}\;\hat{g} = \frac{1}{2}\,\widehat{e^{-|x|} * g}$$

et par injectivité de la transformée de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|} * g(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} e^{-|x-t|}g(t)\,dt.$$

Nous avons obtenu une expression pour f, il faut vérifier qu'elle est bien C^2 et solution de l'équation différentielle initiale, ce qui se voit par un calcul direct à partir de l'expression développée

$$f(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^t g(t)\,dt + e^x\int_x^{\infty} e^{-t}g(t)\,dt.$$

On aurait pu utiliser la méthode de la variation des constantes pour trouver toutes les solutions C^2 de l'équation, puis ajuster les constantes d'intégration pour chercher une solution intégrable. Le calcul précédent est plus court et montre tout de suite qu'il y a une unique solution intégrable, donnée par une convolution.

Pour terminer, on montre comment résoudre l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$ en utilisant la transformation de Fourier.

Théorème 49 *Étant donnée une condition initiale $u_0 \in L^1(\mathbf{R}, \lambda)$, il existe une unique fonction $u :]0, \infty[\, \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que*

– *pour tout $t > 0$, $x \mapsto u(t, x)$ est intégrable ainsi que ses deux dérivées,*

– *pour tout $t > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) \mid |s - t| < \varepsilon\}$ est intégrable,*

– *$u(t, x) \xrightarrow[t \to 0]{} u_0(x)$ en norme L^1,*

– *pour tout $(t, x) \in]0, \infty[\, \times \mathbf{R}$,* $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$

Supposons qu'une telle solution existe et effectuons une transformée de Fourier relativement à la variable aléatoire $x \in \mathbf{R}$.

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbf{R}} u(t, x)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

D'après les propriétés de la transformée, l'équation de la chaleur devient

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t, \xi) = \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(t, \xi) = -\xi^2\, \hat{u}(t, \xi).$$

À ξ fixé, cette équation admet pour solution

$$\hat{u}(t, \xi) = C(\xi)\, e^{-\xi^2 t}$$

où $C(\xi)$ est déterminée par la condition aux limites. La convergence L^1 de $u(t, x)$ vers $u_0(x)$ implique la convergence uniforme de $\hat{u}(t, \xi)$ vers $\hat{u}_0(\xi)$, ce qui montre l'égalité $C(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$. De plus la fonction $e^{-\xi^2 t}$ est la transformée de Fourier de la fonction

$$k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

la preuve est proposée dans les exercices. Ceci implique

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{k}_t(\xi)\, \hat{u}_0(\xi) = \widehat{k_t * u_0}\,(\xi).$$

La transformée de Fourier étant injective, on obtient au final la solution

$$u(t, x) = k_t * u_0\,(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$$

On montre que cette fonction vérifie bien l'équation de la chaleur en appliquant les théorèmes de dérivation sous le signe intégral. La condition aux limites découle du théorème des approximations de l'unité.

La solution obtenue est indéfiniment dérivable relativement à la variable x pour $t > 0$. L'équation de la chaleur est régularisante. Remarquons aussi que si u_0 est positive d'intégrale non nulle, alors $u(t, x)$ est strictement positive pour tout $x \in \mathbf{R}$ dès que $t > 0$. La propagation de la chaleur est instantanée. Enfin on vérifie que la solution converge vers zéro lorsque t tend vers l'infini, la température s'uniformise.

8.4 Complément : inversion de Fourier ponctuelle

On peut pousser un peu plus loin les calculs de façon à obtenir un théorème de convergence ponctuelle dans la formule d'inversion de Fourier qui est analogue au théorème de Dirichlet pour les séries de Fourier. Le point-clef est la formule

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, \psi(-\xi/k)\, d\xi = f * \hat{\psi}_k(x)$$

où on a posé $\hat{\psi}_k(x) = k\hat{\psi}(kx)$. Lorsque f et ψ sont intégrables, cette formule est une conséquence directe du lemme des chapeaux. Si de plus $\hat{\psi}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème des approximations de l'unité pour en déduire la formule d'inversion de Fourier. Nous allons montrer que ce raisonnement fonctionne encore pour $\psi(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, même si $\hat{\psi}$ n'est pas intégrable.

Théorème 50 *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$. On suppose que f admet une limite à droite et à gauche en x et que f est dérivable à droite et à gauche en x. Alors*

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Preuve
Quitte à translater la variable, on peut supposer $x = 0$. On pose $\psi(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ si bien que $\hat{\psi}(\xi) = 2\sin(\xi)/\xi$. Appliquons le lemme des chapeaux.

$$\int_{-N}^{N} \hat{f}(\xi)\, \frac{d\xi}{2\pi} = \int_{\mathbf{R}} \psi(\xi/N)\hat{f}(\xi)\, \frac{d\xi}{2\pi} = \int_{\mathbf{R}} N\hat{\psi}(Nx)f(x)\, \frac{dx}{2\pi} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin(Nx)}{\pi x}\, f(x)\, dx.$$

Montrons que l'expression $\int_0^\infty \frac{\sin(Nx)}{x}\, f(x)\, dx - \frac{\pi}{2} f(0^+)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. En effectuant le changement de variable $u = Nx$, on remarque que $\int_0^\infty \frac{\sin(Nx)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. L'expression précédente se décompose donc comme suit.

$$\int_0^1 \sin(Nx)\frac{f(x) - f(0^+)}{x}\, dx + \int_1^\infty \sin(Nx)\frac{f(x)}{x}\, dx - \int_1^\infty \frac{\sin(Nx)}{x} f(0^+)\, dx.$$

Le dernier terme converge vers $\frac{\pi}{2} f(0^+)$ comme on le voit en posant $u = Nx$. Les deux premiers termes tendent vers zéro par le lemme de Riemann-Lebesgue. De fait, la fonction $\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)f(x)/x$ est intégrable car majorée par f. Vérifions que la fonction $(f(x) - f(0^+))/x$ est aussi intégrable. Près de 0, f est dérivable à droite :

$$f(x) = f(0^+) + xf'(0^+) + x\, \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0^+} \varepsilon(x) = 0.$$

Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $(f(x) - f(0^+))/x$ soit bornée sur $]0, \delta]$. Sur l'intervalle $[\delta, 1]$, elle est bornée par $(|f(x)| + |f(0^+)|)/\delta$ qui est intégrable.

On montre de même que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(Nx)}{x}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0^-)$, d'où le résultat.

8.5 Complément : transformée des fractions rationnelles

On s'intéresse à la transformée de Fourier des fractions rationnelles de la forme P/Q avec P et Q deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux. On commence par le cas où les pôles de la fraction sont simples : $Q'(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathbf{C}$ tel que $Q(a) = 0$. La quantité $P(a)/Q'(a)$ est le *résidu* de la fraction au pôle $a \in \mathbf{C}$.

Théorème 51 *Soit P, Q deux polynômes à coefficients complexes tels que $d^oP > d^oQ$. On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ et que ses racines sont simples. Notons $\mathcal{Z}$ l'ensemble des racines de Q. Alors pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$,*

$$\widehat{\Big(\frac{P}{Q}\Big)}(\xi) = 2\pi i \Bigg(\sum_{\substack{a\in\mathcal{Z},\\ Im(a)>0}} \frac{P(a)}{Q'(a)} e^{-ia\xi}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(\xi) - \sum_{\substack{a\in\mathcal{Z},\\ Im(a)<0}} \frac{P(a)}{Q'(a)} e^{-ia\xi}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(\xi)\Bigg).$$

Preuve
On décompose la fraction rationnelle en éléments simples.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{a\in\mathcal{Z}} \frac{P(a)}{Q'(a)} \frac{1}{x-a}.$$

On a vu que $\widehat{\frac{1}{x-a}} = 2\pi i e^{-ia\xi}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(\xi)$ si $\mathrm{Im}(a) > 0$ et $\widehat{\frac{1}{x-a}} = -2\pi i e^{-ia\xi}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(\xi)$ si $\mathrm{Im}(a) < 0$, d'où le résultat.

Remarquons que

$$\widehat{\Big(\frac{P}{Q}\Big)}(0^+) = -2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{Z},\\ Im(a)<0}} \frac{P(a)}{Q'(a)}, \qquad \widehat{\Big(\frac{P}{Q}\Big)}(0^-) = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{Z},\\ Im(a)>0}} \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Si $d^oP > d^oQ + 1$, la fonction P/Q est intégrable, sa transformée de Fourier est continue, nous avons alors $\int_{\mathbf{R}} P(x)/Q(x)\,dx = \widehat{P/Q}(0^+) = \widehat{P/Q}(0^-)$. Cette dernière égalité peut se démontrer directement en remarquant que $xP(x)/Q(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en utilisant la décomposition en éléments simples.

Corollaire 14 (Formule des résidus) *Soit P, Q deux polynômes à coefficients complexes tels que $d^oP > d^oQ + 1$. On suppose que Q ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ et que ses racines sont simples. Notons $\mathcal{Z}$ l'ensemble de ces racines. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in\mathcal{Z},\\ Im(a)>0}} \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Exemple
Illustrons cette formule par un calcul explicite. On prend

$$Q(x) = 1 + x^{2n}, \quad Q'(x) = 2nx^{2n-1} = \frac{2n}{x}(Q(x) - 1).$$

Les racines de Q sont données par $a_k = e^{i\pi\frac{2k+1}{2n}}$, k allant de 0 à $2n-1$. Leur partie imaginaire est positive si $k < n$ et nous avons $Q'(a_k) = -2n/a_k$. On en déduit

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{Q'(a_k)} = -\frac{\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{\pi}{2n}} (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = -\frac{\pi i}{n}\, e^{i\frac{\pi}{2n}}\, \frac{1-(e^{i\frac{\pi}{n}})^n}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$

Nous avons obtenu la formule remarquable $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)}$.

Voici quelques valeurs particulières.

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, \qquad \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{1+x^8} = \frac{\pi}{4}\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

Le calcul de ces intégrales par le biais d'une primitive explicite est laborieux. Par exemple, pour $n = 2$, on peut vérifier que

$$\int_{-t}^{t} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\right| + 2\,\mathrm{atan}\left(\sqrt{2}\,t+1\right) + 2\,\mathrm{atan}\left(\sqrt{2}\,t-1\right)\right).$$

Le cas des pôles multiples
On peut également traiter le cas des fractions rationnelles avec des pôles qui ne sont pas simples. Pour cela, il faut calculer la transformée de Fourier de $1/(x-a)^n$. Elle s'obtient à partir de celle de $1/(x-a)$ et de la formule $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-a)^{-1} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,(x-a)^{-n}.$$

Supposons $\mathrm{Im}(a) > 0$. On obtient

$$\widehat{\frac{1}{(x-a)^n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(i\xi)^{n-1}\widehat{\frac{1}{x-a}} = -\frac{2\pi}{i^n(n-1)!}\,\xi^{n-1}e^{-ia\xi}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(\xi).$$

Voici une application de la formule précédente. Utilisons l'égalité de Plancherel.

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \left\|\frac{1}{(x-i)^n}\right\|_2^2 = \frac{2\pi}{(n-1)!^2}\,\left\|\xi^{n-1}\,e^{\xi}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(\xi)\right\|_2^2 = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2}\,\pi.$$

Pour calculer la norme, on a utilisé la formule bien connue $\int_0^\infty e^{-t}\,t^k\,dt = k!$ qui se démontre par intégration par partie. Le changement de variable $x = \tan u$ transforme l'intégrale précédente en une intégrale bien connue, l'intégrale de Wallis.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u)\,du = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}(n-1)!^2} = \frac{1\times 3\times 5 ... \times(2n-3)}{2\times 4\times 6 ... \times(2n-2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

8.6 Exercices

exercice 1

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1$. Montrer que $\hat{f} \in L^2$ puis que f satisfait la formule d'inversion de Fourier. En déduire que f est dans L^2 et coïncide presque partout avec une fonction continue bornée.

exercice 2

Supposons qu'il existe $\delta \in L^1$ telle que pour tout $f \in L^1$, $\delta * f = f$. Calculer $\widehat{\delta * f}$ puis montrer que $\hat{\delta}$ est constante et en déduire une absurdité.

exercice 3

Donner un exemple de fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$ qui ne tend pas vers zéro en l'infini. Donner un contre-exemple au lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas $L^2(\mathbf{R})$.

exercice 4

Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{x+i}$ et de sa dérivée. En déduire que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{\frac{1}{(1+x^2)^2}} = \frac{\pi}{2}\,(|\xi|+1)\,e^{-|\xi|}.$$

Quelle est la régularité de cette fonction ?

exercice 5

On rappelle que $\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sqrt{2\pi}.$

En utilisant le développement en série de la fonction $e^{-i\xi x}$, montrer que

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}} = \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x}\,dx = \sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

exercice 6

Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$. Montrer que la fonction $h \mapsto \|\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))\|_2$ est bornée sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\xi\hat{f}(\xi) \in L^2$. Montrer dans ce cas que le taux de variation $\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$ converge en norme L^2 quand h tend vers zéro vers une fonction g qui satisfait $\hat{g}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.

exercice 7

Soit $f,\, g \in L^2$.

– Montrer que le produit $f * g$ est bien défini et satisfait $||f * g||_\infty \le ||f||_2||g||_2$.

– Montrer la formule $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\,\hat{f} * \hat{g}$ puis donner un sens à la formule $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

exercice 8

– Soit $f \in L^1$ dérivable telle que $f' \in L^1$. Montrer que f tend vers zero à l'infini.

– Soit $f \in L^2$ dérivable telle que $f' \in L^2$. Montrer que f tend vers zero à l'infini.

– Démontrer l'égalité $\hat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$ en utilisant une intégration par partie.

– Soit f de classe C^k, dans L^1 ainsi que ses dérivées. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\hat{f}(\xi)| \le \frac{C}{1+|\xi|^k}$.

8.7 Formulaire

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(x)\, dx, \qquad \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi\, f(-x)$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\bar{g}(x)\, dx, \quad \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = 2\pi\, \langle f, g\rangle, \quad ||\hat{f}||_2 = \sqrt{2\pi}\, ||f||_2$$

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\, \hat{f}(\xi), \quad \widehat{xf}(\xi) = i\hat{f}\,'(\xi)$$

$$f\widehat{(ax)} = \frac{1}{|a|}\hat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \quad f(\widehat{x+b})(\xi) = e^{ib\xi}\, \hat{f}(\xi)$$

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\ \widehat{g}, \quad \widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\, \widehat{f} * \widehat{g}$$

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$	
$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$	$2\, e^{-i\xi \frac{a+b}{2}} \sin(\frac{b-a}{2}\xi)/\xi$	$a \leq b$
$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$	
$\frac{1}{a+ix}$	$2\pi\, \text{signe(a)}\, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(a\xi)\, e^{a\xi}$	$a \in \mathbf{R} - \{0\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\pi\, e^{-\lvert\xi\rvert}$	
$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$\frac{\pi}{2}\, (\lvert\xi\rvert + 1)\, e^{-\lvert\xi\rvert}$	
$e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{2}{1+\xi^2}$	
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\pi\, \mathbf{1}_{[-a,a]}(\xi)$	$a > 0$
$(1 - \lvert x\rvert)\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$	$4\, \frac{\sin^2(\frac{\xi}{2})}{\xi^2}$	
$\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)\, e^{-\lambda x}\, \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{(\lambda+i\xi)^\alpha}$	$\lambda > 0,\ \alpha > 0$
$\frac{1}{x-a}$	$2\pi i\, e^{-ia\xi}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(\xi)$	si $\text{Im}(a) > 0$
	$-2\pi i\, e^{-ia\xi}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(\xi)$	si $\text{Im}(a) < 0$
$P(x)/Q(x)$	$-2\pi i \displaystyle\sum_{\substack{Q(z)=0\ t.q.\\ signe(Im(z)\xi)<0}} \text{signe}(\xi)\ e^{-i\xi z} P(z)/Q'(z)$	(1)

(1) Note : P/Q est une fraction rationnelle irréductible telle que $d^oQ > d^oP$ et dont les pôles sont simples, en dehors de l'axe réel. La somme a lieu sur l'ensemble des zéros de Q dont le signe de la partie imaginaire est opposé à celui de ξ.

8.8 Table de transformées de Fourier

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$	
$\operatorname{atan}(x+1) - \operatorname{atan}(x-1)$	$2\pi\, e^{-\lvert\xi\rvert}\, \frac{\sin(\xi)}{\xi}$	
$\ln(1 - e^{-2\pi\lvert x\rvert})$	$\frac{2\pi}{\lvert\xi\rvert}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lvert\xi\rvert} + \frac{1}{e^{\lvert\xi\rvert}-1}\right)$	
$\frac{1}{a^4+x^4}$	$\frac{\pi}{a^3}\, e^{-\frac{a\lvert\xi\rvert}{\sqrt{2}}}\, \sin\left(\frac{a\lvert\xi\rvert}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$	$a > 0$
$\frac{x}{x^4+a^4}$	$-\frac{i\pi}{a^2}\, e^{-\frac{a\lvert\xi\rvert}{\sqrt{2}}}\, \sin(\frac{a\xi}{\sqrt{2}})$	$a > 0$
$\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$	$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2)}$	
$\frac{\operatorname{th}(x)}{x}$	$-2\ln(\operatorname{th}(\frac{\pi\lvert\xi\rvert}{4}))$	
$\frac{\sin(x^2/\pi)}{\operatorname{ch}(x)}$	$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\xi)}(\cos(\frac{\pi}{4}\xi^2) - \frac{1}{\sqrt{2}})$	
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\frac{\pi\xi}{\operatorname{sh}(\frac{\pi\xi}{2})}$	
$\frac{e^{-a\lvert x\rvert}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{2\pi}\ \frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+a^2}+a}}{\sqrt{\xi^2+a^2}}$	$a > 0$
$\frac{\lvert x\rvert}{e^{a\lvert x\rvert}-1}$	$\frac{1}{\xi^2} - \left(\frac{\pi}{a\operatorname{sh}(\frac{\pi\xi}{a})}\right)^2$	$a > 0$
$\frac{\sin(x)}{x\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{2\pi}\ \begin{cases} \sqrt{\lvert\xi+1\rvert}+\sqrt{\lvert\xi-1\rvert} & \text{si } \lvert\xi\rvert \leq 1, \\ 2/(\sqrt{\lvert\xi+1\rvert}+\sqrt{\lvert\xi-1\rvert}) & \text{si } \lvert\xi\rvert \geq 1. \end{cases}$	
$x^{2n-1}\, e^{-a\lvert x\rvert}$	$-2i\, \frac{(2n-1)!}{(a^2+\xi^2)^n}\, \sin(2n\operatorname{atan}(\xi/a))$	$n, a > 0$
$\frac{e^{-2/\lvert x\rvert}}{\lvert x\rvert^{3/2}}$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-2\sqrt{\lvert\xi\rvert}}\, \cos(2\sqrt{\lvert\xi\rvert})$	
$\frac{1-\cos(ax)}{\lvert x\rvert}$	$\ln(\lvert 1 - \frac{a^2}{\xi^2}\rvert)$	
$\frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$	$-2i\, \sin(\xi)\, \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi)$	
$\ln\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right)$	$2\pi\, \frac{e^{-b\lvert\xi\rvert}-e^{-a\lvert\xi\rvert}}{\lvert\xi\rvert}$	$a, b > 0$

Notons qu'en général même des fonctions très simples ont des transformées qui ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles, par exemple $\frac{\operatorname{atan}(x)}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$...

Annexe A

Rappels de théorie des ensembles

La théorie des ensembles est une théorie mathématique qui naît à la fin du dix-neuvième siècle. Elle se propose de généraliser les observations bien connues faites sur les ensembles finis à tous les ensembles qu'on rencontre dans les diverses branches des mathématiques. Cette théorie possède un seul type d'objets primitifs, appelés *ensembles*, ainsi qu'une relation entre ses objets, la relation d'*appartenance*, notée $\in$.

On peut définir un ensemble par *extension* en faisant la liste de tous ses éléments

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ou bien par *compréhension*, en donnant une propriété qui caractérise de manière unique ses éléments

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}.$$

À partir de la relation d'appartenance, on définit une nouvelle relation entre les ensembles appelée *inclusion*. L'ensemble A est inclu dans l'ensemble B si tous les éléments de A sont aussi éléments de B.

$$A \subset B \qquad \text{si et seulement si} \qquad \forall\, x,\ x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Attention à ne pas confondre appartenance et inclusion.

La théorie postule l'existence d'un unique ensemble ne contenant aucun élément, l'ensemble vide qui est noté $\emptyset$, ainsi que l'existence d'un ensemble ayant une infinité d'éléments. Elle définit également un certain nombre d'opérations qui permettent d'obtenir de nouveaux ensembles à partir d'ensembles déjà existants. Nous les décrivons dans le paragraphe suivant.

A.1 Opérations ensemblistes

Ensemble des parties d'un ensemble
Un ensemble A est un *sous-ensemble* d'un ensemble B s'il est inclu dans B. On

dit aussi que A est une *partie* de B. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

L'ensemble vide $\emptyset$ et X sont des éléments de $\mathcal{P}(X)$ et on a l'équivalence

$$A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X.$$

Intersection
Étant donnés deux ensembles A et B, il existe un ensemble noté $A \cap B$ qui contient exactement les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Union
Étant donnés deux ensembles A et B, il existe un ensemble noté $A \cup B$ qui contient exactement les éléments qui sont dans A ou dans B.

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Union disjointe
Deux ensembles A et B sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun ($A \cap B = \emptyset$) auquel cas leur union est notée $A \coprod B$.

Complémentaire
Étant donnée un sous-ensemble A d'un ensemble X, il existe un ensemble noté A^c qui contient tous les éléments de X qui ne sont pas dans A.

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

Différence
Étant donné deux sous-ensembles A et B d'un ensemble X, il existe un ensemble noté $A \setminus B$ qui contient les éléments de A qui ne sont pas dans B.

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap B^c$$

Différence symétrique
La différence symétrique de deux ensembles A et B est composée des éléments qui sont dans A ou dans B mais pas dans leur intersection.

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Produit cartésien
Le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble composé des couples d'éléments de A et de B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Généralisation aux familles d'ensembles
Une famille de sous-ensembles d'un ensemble X est la donnée d'un ensemble d'indices, par exemple I, ainsi que d'un sous-ensemble de X pour chaque indice, par exemple A_i. La famille est alors notée $\{A_i\}_{i\in I}$ et on peut parler de l'union, de l'intersection ou du produit de tous les ensembles de la famille.

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \forall\, i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \exists\, i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall\, i \in I,\ x_i \in A_i\}$$

A.2 Relations ensemblistes

Un certain nombre de relations existent entre ces opérations. Certaines de ces relations sont des axiomes, d'autres se démontrent à partir de ces axiomes. Voici les plus importantes.

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap (B \setminus C)$$

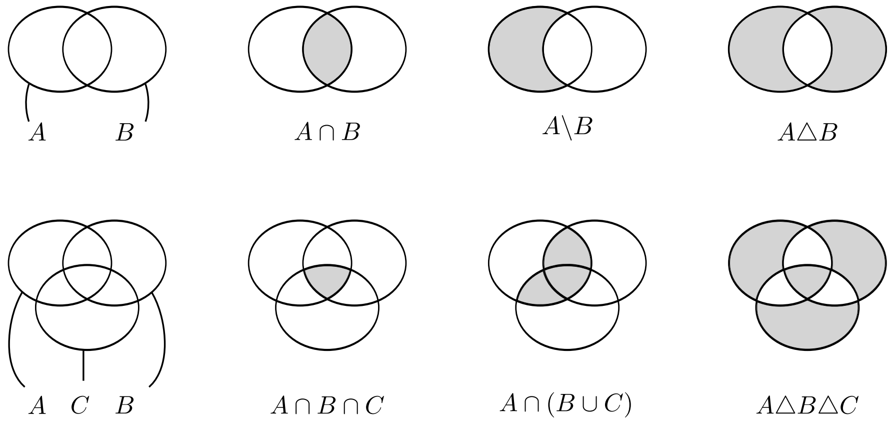
$$A \bigtriangleup \emptyset = A, \quad A \bigtriangleup A = \emptyset$$

$$A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$$

$$(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$$

$$A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$$

Ces relations peuvent être représentées par des diagrammes de Venn, familièrement appelés des patates.



On a des relations analogues pour des familles d'ensembles, par exemple

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \setminus B = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B)$$

On a également les inclusions suivantes.

$$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \triangle \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) \subset \bigcup_{i \in I} (A_i \triangle B_i)$$

A.3 Image directe et réciproque

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $A \subset X$ et $B \subset Y$. On définit l'image de A par f et la préimage de B par f comme suit.

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

On a alors les relations suivantes.

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

En d'autres termes, les opérations ensemblistes commutent avec l'image réciproque. En ce qui concerne l'image directe, on a encore

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

ainsi que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ mais on n'a pas égalité en général. Une condition suffisante pour avoir l'égalité dans cette dernière relation est que f soit injective. Enfin on a les inclusions

$$f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$

A.4 Fonctions indicatrices

La fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset X$ est définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a les relations

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$$

$$\mathbf{1}_{A\Delta B} = \ |\,\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\,|, \quad \mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_X - \mathbf{1}_A.$$

Enfin, si f est une fonction définie de X dans Y et $B \subset Y$, alors

$$\mathbf{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbf{1}_B \circ f.$$

A.5 Dénombrabilité

Un ensemble est *dénombrable* s'il possède un nombre fini d'éléments ou s'il peut être mis en bijection avec l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels. Voici quelques exemples d'ensembles dénombrables.

– *L'ensemble* $\mathbf{N}^*$ *des entiers strictement positifs.*

Une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ est donnée par $\varphi(n) = n+1$, d'inverse $\varphi^{-1}(n) = n-1$.

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mathbf{N}^*$	1	2	3	4	5	6	7	8	...

– *L'ensemble* $\mathbf{Z}$ *des entiers relatifs.*

Une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ est donnée par

$$\varphi(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varphi^{-1}(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n > 0 \\ -2n & \text{si } n \leq 0 \end{cases}.$$

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathbf{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...

– *L'ensemble* $\mathbf{Q}_+^*$ *des nombres rationnels strictement positifs.*

On peut construire une bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to \mathbf{Q}_+^*$ en utilisant une bijection $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ telle que $\psi(0) = 0$ et la décomposition en facteurs premiers des entiers. Soit $\{p_i\}$ la suite des nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ etc. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une unique suite d'entiers $k_i \geq 0$ telle que $n = \prod p_i^{k_i}$. Une bijection est donnée par

$$\varphi(\prod p_i^{k_i}) = \prod p_i^{\psi(k_i)} \quad \text{avec} \quad \varphi^{-1}(\prod p_i^{k_i}) = \prod p_i^{\psi^{-1}(k_i)}.$$

Par exemple, $\varphi(12) = \varphi(2^2\, 3^1) = 2^{-1}\, 3^1 = 3/2$, $\varphi^{-1}(1/8) = \varphi^{-1}(2^{-3}) = 2^6 = 64$.

$\mathbf{N}^*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathbf{Q}_+^*$	0	1	2	3	1/2	5	6	7	4	1/3	10	...

– *L'ensemble* $\mathbf{Q}$ *des nombres rationnels.*

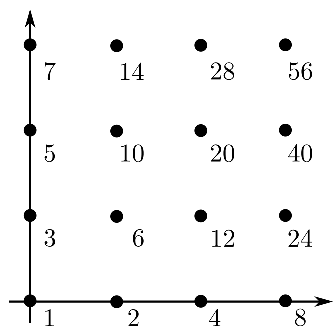
On utilise la bijection précédente $\varphi : \mathbf{N}^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_+^*$ qu'on peut étendre aux nombres négatifs de $\mathbf{Z}_-^*$ à $\mathbf{Q}_-^*$ en posant $\varphi(-n) = -\varphi(n)$. On forme alors une bijection comme suit.

$$\mathbf{N} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbf{N}^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_+^* = \mathbf{Q}.$$

– *L'ensemble* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Une bijection $\varphi : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}^*$ est donnée par $\varphi(m, n) = 2^m(2n+1)$.

Cette fonction est bijective car tout nombre entier strictement positif s'écrit de manière unique comme le produit d'une puissance de deux et d'un nombre impair. Cela découle de l'unicité de la factorisation en nombres premiers.



A.6 Exercices

exercice 1
Déterminez les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}[0,1-1/n]\ ,\quad \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}[0,1/n[\ ,\quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}[1/n,1+1/n[$$

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}[1/n^2,10/n]\ ,\quad \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*}\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}[k-1/n,k+1/n[$$

exercice 2
Donner un exemple de suite d'ensembles fermés $A_i \subset \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N}$, inclus dans $\mathbf{R}$ et décroissants pour l'inclusion : $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots A_n \supset A_{n+1} \ldots$ tels que les A_i soient non vides, et $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$.

exercice 3
On veut montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une application bijective $\varphi : \mathbf{N} \to [0,1]$. Montrer qu'on peut construire une suite d'intervalles fermés non vides $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

– la suite I_n est décroissante pour l'inclusion : $I_{n+1} \subset I_n$,

– pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n)$ n'appartient pas à I_n,

– la longueur des I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Que peut-on dire de l'intersection de tous les intervalles I_n ? Conclure.

exercice 4
Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont dénombrables ?

$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}^3$
$\bigcup_{i\in\mathbf{N}}\{k/10^i \mid k \in \mathbf{Z}\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 2\ \}$
$\bigcap_{i\in\mathbf{N}}[0,1/2^i]$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x \le y\}$
$\{x\in\mathbf{C} \mid x^4+x+1=0\}$	$\{x\in\mathbf{R} \mid \sin(x)=0\}$
$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x-y\in\mathbf{Q}\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sqrt{2}xy\in\mathbf{Q},\ x+y\in\mathbf{Q}\}$
$\bigcup_{t\in\mathbf{R}}\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+t^2+1\le x\}$	$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x=y=z\}$

exercice 5
On considère les applications suivantes définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Trouver l'image réciproque de l'intervalle $]0,1]$ par les applications suivantes.

$$x\mapsto x^2,\qquad x\mapsto\sin(x),\qquad x\mapsto\sin\Big(\frac{1}{x}\Big),\qquad x\mapsto\frac{8}{3}\,x(1-x^2).$$

Annexe B

Références

Références en français pour la théorie de l'intégration

Marc Briane, Gilles Pagès
Analyse, théorie de l'intégration, convolution et théorie de Fourier
Vuibert. ISBN 978-2311402261 Vuibert. I

Cédric Villani
Intégration et analyse de Fourier
http ://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf

Jean-François Le Gall
Intégration, probabilités et processus aléatoires
http ://www.math.u-psud.fr/ jflegall/IPPA2.pdf

Référence en anglais pour la théorie de l'intégration

Richard Mansfield Dudley
Real analysis and probability.
Cambridge University Press. ISBN 0-521-00754-2

Federer, Cohn, Parthasarathy, Halmos, Rudin, Bourbaki, Tao, Bogachev, Riesz-Nagy et tous les bouquins de probabilités

Yves Coudène, mars 2017.