

Sur le mélange du flot géodésique

Yves Coudène, octobre 2011

Ces notes présentent quelques résultats concernant le mélange en mesure du flot géodésique défini sur une variété à courbure négative ou nulle. On s'intéresse plus particulièrement au théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. *Soit S une surface compacte à courbure négative ou nulle, de caractéristique d'Euler négative stricte. Alors le flot géodésique, défini sur le fibré unitaire T^1S de la surface, est mélangeant relativement à sa mesure d'entropie maximale.*

Ce théorème est dû à G. Hedlund [Hed39] dans le cas de la courbure constante, G. Margulis [Mar70] dans le cas de la courbure strictement négative, et à M. Babillot [Bab02] en toute généralité. Le résultat de M. Babillot est valide en toute dimension, pour toute mesure "quasi-produit" et sans hypothèse de compacité, dès que le flot géodésique est topologiquement mélangeant en restriction à son ensemble non-errant. On se restreint ici au cas des surfaces compactes pour alléger la présentation. La preuve que nous exposons suit les arguments de M. Babillot, avec quelques simplifications.

La première partie traite le cas de la courbure constante, dimension 2, en utilisant un modèle algébrique pour le flot. On présente dans la seconde partie quelques principes généraux abstraits, qui sont ensuite appliqués au cas de la courbure variable. Rappelons qu'un flot g_t défini sur un espace X , qui préserve une mesure de probabilité μ , est dit mélangeant si pour toute fonction $F \in L^2(X, \mu)$ d'intégrale nulle, la suite $F \circ g_t$ converge faiblement vers 0 :

$$\forall G \in L^2(X), \quad \langle F \circ g_t, G \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Il est d'usage de noter cette convergence comme suit : $F \circ g_t \rightharpoonup 0$.

1. LE CAS DE LA COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE

On définit sur $\tilde{X} = PSL_2(\mathbf{R})$ trois flots :

$$g_t(M) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} M ; \quad h_u^-(M) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M ; \quad h_s^+(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} M.$$

On munit l'espace \tilde{X} d'une mesure, dont l'expression dans la carte $(a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbf{R})$, $a \neq 0$, est donnée par $d\tilde{\mu}(a, b, c) = da db dc / |a|$. Cette mesure est une mesure de Haar sur le groupe \tilde{X} , elle est invariante par l'action naturelle à droite et à gauche de $PSL_2(\mathbf{R})$ sur \tilde{X} . Ses propriétés sont détaillées dans [Nic89] ch.10.

On considère un sous-groupe discret $\Gamma \subset PSL_2(\mathbf{R})$ et on pose $X = \tilde{X}/\Gamma$. Les trois flots g_t , h_s^+ et h_u^- passent au quotient et définissent trois flots sur X appelés respectivement *flot géodésique*, *flot horocyclique contractant* et *flot horocyclique dilatant*. Le groupe Γ est dit de *covolume fini* si la mesure induite par $\tilde{\mu}$ sur X , que nous noterons μ , est de masse totale finie. On suppose dans cette section que Γ est de covolume fini et on veut montrer que le flot g_t est mélangeant. La preuve repose sur des relations remarquables liant les trois flots présentés ci-dessus.

PROPOSITION 1.1. *Soit $F \in L^2$. Les valeurs d'adhérence faibles de la suite $(F \circ g_t)_{t>0}$ sont invariantes par h_s^+ , celles de $(F \circ g_t)_{t<0}$ sont invariantes par h_u^- . En particulier, toute fonction invariante par g_t est invariante par h_s^+ et h_u^- .*

Preuve. Soit $\bar{F} \in L^2$ et $t_i \rightarrow +\infty$ tels que $F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \bar{F}$. Il faut montrer que $\bar{F} \circ h_s^+ = \bar{F}$. La preuve repose sur l'égalité $g_t \circ h_s^+ = h_{se^{-t}}^+ \circ g_t$. Cette égalité implique :

$$\|F \circ g_t \circ h_s^+ - F \circ g_t\| = \|F \circ h_{se^{-t}}^+ \circ g_t - F \circ g_t\| = \|F \circ h_{se^{-t}}^+ - F\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On sait de plus que la suite $F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i}$ est faiblement convergente :

$$F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \bar{F} \circ h_s^+ - \bar{F}$$

Le résultat s'ensuit en identifiant les deux limites. Le cas des temps négatifs se traite de la même façon, en partant de l'égalité $g_{-t} \circ h_u^- = h_{ue^{-t}}^- \circ g_{-t}$.

PROPOSITION 1.2. *Toute fonction $F \in L^2(X)$ invariante par h_s^+ est invariante par g_t .*

Preuve. Soit $s, \varepsilon > 0$. De la relation: $h_{\frac{s-1-\varepsilon}{\varepsilon}}^+ \circ h_\varepsilon^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- = g_{2 \ln s}$, on déduit :

$$\begin{aligned} & \|F \circ g_{2 \ln s} - F\| \\ &= \|F \circ h_\varepsilon^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - F\| \\ &= \|F \circ h_\varepsilon^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - F \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- + F \circ h_{-\varepsilon/s}^- - F\| \\ &\leq \|F \circ h_\varepsilon^- - F\| + \|F \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ - F\| \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.3. *Le flot géodésique $g_t : X \rightarrow X$ est mélangeant relativement à la mesure μ .*

Preuve. Soit $F \in L^2$ une fonction d'intégrale nulle. Par compacité faible, il suffit de démontrer que toute valeur d'adhérence faible \bar{F} de la suite $F \circ g_t$ est nulle presque partout. On a vu que \bar{F} est invariante par le flot h_s^+ , puis par les flots g_t et h_u^- . Tout $g \in PSL_2(\mathbf{R})$ est de la forme $g_t \circ h_u^- \circ h_s^+$ pour s, t, u bien choisis, si bien que \bar{F} est invariante par l'action de $PSL_2(\mathbf{R})$:

$$\forall g \in PSL_2(\mathbf{R}), \mu - p.t. x \in X, \quad \bar{F}(gx) = \bar{F}(x).$$

En appliquant le théorème de Fubini, on en déduit

$$\mu - p.t. x \in X, \tilde{\mu} - p.t. g \in PSL_2(\mathbf{R}), \quad \bar{F}(gx) = \bar{F}(x).$$

En particulier, il existe $x_0 \in X$ tel que $\bar{F}(gx_0) = \bar{F}(x_0)$ pour $\tilde{\mu} - p.t. g \in \tilde{X}$. La fonction \bar{F} est constante, d'intégrale nulle, donc nulle.

2. QUELQUES PRINCIPES GÉNÉRAUX

Dans cette section, on se place dans le cadre général d'un espace métrique X portant une mesure de probabilité μ , et on considère un flot borélien $g_t : X \rightarrow X$ qui préserve μ . Les feuilles stables et instables de g_t sont définies comme suit :

$$W^{ss}(x) = \{ y \in X \mid d(g_t(x), g_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \}$$

$$W^{su}(x) = \{ y \in X \mid d(g_t(x), g_t(y)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \}$$

Les exposants ss et su sont des abréviations pour "strong stable" et "strong unstable". Ces feuilles vont jouer un rôle similaire à celui des flots h_s^+ et h_u^- . De fait, dans l'exemple de la courbure constante, on a les relations :

$$W^{ss}(x) = \{h_s^+(x) \mid s \in \mathbf{R}\}, \quad W^{su}(x) = \{h_u^-(x) \mid u \in \mathbf{R}\}.$$

On s'est intéressé précédemment aux fonctions invariantes par h^+ . Par analogie, on définit le concept de fonction invariante par les distributions W^{ss} et W^{su} .

DÉFINITION 2.1. Une fonction $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ est dite W^{ss} -invariante si on peut trouver un ensemble $\Omega \subset X$ de complémentaire négligeable tel que

$$\forall x, y \in \Omega, \quad y \in W^{ss}(x) \text{ implique } F(y) = F(x).$$

On définit de même le concept de fonctions W^{su} -invariante, en remplaçant W^{ss} par W^{su} dans cette définition.

La preuve du mélange donnée par M. Babillot procède par l'absurde en utilisant un lemme abstrait de théorie ergodique dû à F. Parreau. Ici, on va utiliser un argument direct reposant sur le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *On considère un espace métrique X muni d'une mesure de probabilité μ , un flot borélien g_t qui préserve μ et une fonction F de carré intégrable. Alors les valeurs d'adhérence faibles de la suite $(F \circ g_t)_{t>0}$ sont à la fois W^{ss} -invariantes et W^{su} -invariantes.*

On renvoie à [Cou07] pour une preuve élémentaire de ce théorème. En particulier, si F est invariante par g_t , elle est W^{ss} -invariante et W^{su} -invariante. Ce résultat, qui a été démontré plus haut pour un flot géodésique sur une surface de courbure constante, est donc vrai pour tous les flots.

COROLLAIRE 2.3. *Supposons que toute fonction W^{ss} - et W^{su} -invariante est constante. Alors le flot est mélangeant.*

On peut se demander s'il existe un lien général entre les valeurs d'adhérence pour les temps positifs et pour les temps négatifs, des suites de la forme $F \circ g_t$. Le résultat suivant est dû à Y. Derriennic et T. Downarowicz, la preuve est donnée en annexe.

THÉORÈME 2.4. *On considère un espace métrique X muni d'une mesure de probabilité μ , un flot borélien g_t qui préserve μ et $F \in L^2(X)$. Soit \bar{F} une valeur d'adhérence faible de la suite $F \circ g_t$, pour $t \rightarrow +\infty$. Alors on peut trouver $F' \in L^2(X)$ tel que \bar{F} soit valeur d'adhérence faible de la suite $F' \circ g_t$, pour $t \rightarrow -\infty$.*

Ces généralités ramènent le problème du mélange du flot géodésique à la question suivante.

Dans le cas du flot géodésique sur une surface à courbure négative ou nulle, peut-on montrer que les fonctions à la fois W^{ss} - et W^{su} -invariantes sont invariantes par g_t ?

On a vu que cela était possible lorsque la courbure est constante. On a montré comment se déplacer le long des géodésiques en suivant des morceaux d'horocycles contractants et dilatants. Ce raisonnement fonctionne encore en courbure négative ou nulle.

3. LE CAS DE LA COURBURE NÉGATIVE OU NULLE

Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème 0.1.

3.1 COORDONNÉES DE HOPF

Toute surface compacte S à courbure négative ou nulle peut s'écrire comme le quotient du plan \mathbf{R}^2 , muni d'une métrique complète à courbure négative ou nulle, par un sous-groupe discret d'isométries opérant sans point fixe :

$$S = \tilde{S}/\Gamma, \quad \tilde{S} \simeq \mathbf{R}^2.$$

Le flot géodésique est défini sur le fibré unitaire T^1S , et se relève en un flot sur $T^1\tilde{S}$. Dans le cas de la courbure constante négative, T^1S correspond à l'espace $PSL_2(\mathbf{R})/\Gamma$, et $T^1\tilde{S}$ est égal à $PSL_2(\mathbf{R})$. On suppose dans la suite que la caractéristique d'Euler de S est négative.

On va introduire un système de coordonnées sur $T^1\tilde{S}$, dans lequel le flot géodésique g_t et les courbes stables et instables W^{ss} , W^{su} ont une expression particulièrement agréable. Pour cela, il faut commencer par définir le *bord idéal* de \tilde{S} .

On place sur l'espace $T^1\tilde{S}$ la relation suivante : deux vecteurs sont équivalents si les demi-géodésiques issues de ces deux vecteurs restent à distance bornées l'une de l'autre. Le quotient de $T^1\tilde{S}$ par cette relation d'équivalence est noté $\partial\tilde{S}$. Dans le cas de la courbure -1 , dans le modèle du disque de Poincaré, ce bord $\partial\tilde{S}$ s'identifie naturellement au bord du disque.

Choisissons une origine $O \in \tilde{S}$. Le bord $\partial\tilde{S}$ s'identifie au cercle $T^1_O\tilde{S}$ par le biais de l'application qui associe à un vecteur sa classe d'équivalence. On peut maintenant associer à chaque géodésique γ une paire de points distincts sur le bord $\partial\tilde{S}$, correspondant aux vecteurs $-\gamma'(0)$ et $\gamma'(0)$. Ces deux points représentent les extrémités de la géodésique, pour les temps négatifs et positifs. Enfin, on peut choisir une origine sur la géodésique, par exemple en prenant le point de la géodésique dont l'horocycle contractant passe par le point O .

En résumé, à tout vecteur $v \in T^1\tilde{S}$, on peut associer un triplet de points dans $\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} \times \mathbf{R}$ composé des deux extrémités de la géodésique engendrée par ce vecteur, et du temps mis pour aller de l'origine de la géodésique au point base du vecteur :

$$\begin{aligned} T^1\tilde{S} &\longrightarrow (\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} - \Delta) \times \mathbf{R} \\ v &\longmapsto (v_-, v_+, t) \end{aligned}$$

où Δ correspond à la diagonale dans $\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S}$. Cette application est un homéomorphisme si la courbure est strictement négative.

Si la courbure s'annule à certains endroits, l'application précédente n'est plus une bijection. Par exemple, si deux vecteurs engendrent des géodésiques qui bordent un ruban plat, de courbure nulle, ils ont les mêmes extrémités sur $\partial\tilde{S}$, aussi bien pour les temps positifs que négatifs. On ne peut donc distinguer ces deux géodésiques par le biais de leurs extrémités.

Pour éviter ce problème, il faut se restreindre à l'ensemble des vecteurs de $T^1\tilde{S}$ qui engendrent une géodésique passant par au moins un point où la courbure est strictement négative. Cet ensemble est un ouvert de $T^1\tilde{S}$. Pour obtenir une description des feuilles stables et instables en termes du bord, il faut également se restreindre aux vecteurs de $T^1\tilde{S}$ dont les projetés sur T^1S sont topologiquement récurrents sous l'action du flot géodésique. Ce faisant, on exclut les vecteurs qui engendrent des géodésiques tangentes à des rubans plats. Ces géodésiques ont des feuilles stables trop courtes, qui s'arrêtent sur le bord du ruban, et qu'on ne peut décrire en terme du bord.

Notons $\pi : T^1\tilde{S} \rightarrow T^1S$ la projection sur le fibré unitaire de la surface. Lorsqu'il y a des points de courbure nulle, les raisonnements qui suivent sont valides en restriction à l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}} \subset T^1\tilde{S}$ défini par :

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{v \in T^1\tilde{S} \mid \exists t \in \mathbf{R} \text{ tel que } K(g_t v) < 0, \exists t_i \rightarrow \pm\infty \text{ tels que } g_{t_i} \pi v \rightarrow \pi v\}$$

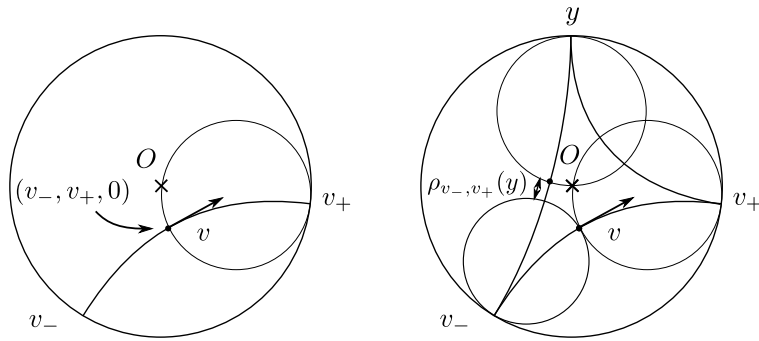
Le triplet (v_-, v_+, t) représente les *coordonnées de Hopf* du vecteur v , un vecteur $v \in \tilde{\mathcal{R}}$ est uniquement identifié par un tel triplet. Le flot géodésique et les feuilles stables et instables prennent la forme suivante dans ces coordonnées :

$$g_s(v_-, v_+, t) = (v_-, v_+, t + s),$$

$$W^{ss}(v_-, v_+, t) = \{(x, v_+, t) \mid x \in \partial\tilde{S} - \{v_+\}\}$$

$$W^{su}(v_-, v_+, t) = \{(v_-, y, t + \rho_{v_-, v_+}(y)) \mid y \in \partial\tilde{S} - \{v_-\}\}$$

où $\rho_{v_-, v_+} : \partial\tilde{S} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction explicite, illustrée sur la figure qui suit.



Dans le contexte de la courbure négative ou nulle, la mesure d'entropie maximale a été construite par G. Knieper [Kni98]. L'article de F. Ledrappier, "Entropie et principe variationnel pour le flot géodésique en courbure négative pincée", dans ce volume, décrit cette construction. Lorsque la surface est compacte, cette mesure vérifie les propriétés suivantes :

- c'est une mesure de probabilité de support total, invariante par le flot géodésique,
- son relevé à $T^1\tilde{S}$ est équivalent à une mesure de la forme $d\nu(v_-)\otimes d\nu(v_+)\otimes dt$ dans les coordonnées de Hopf,
- ce relevé est porté par l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}}$ défini plus haut.

Ces trois propriétés suffisent pour démontrer le mélange. On trouvera une présentation de ces résultats dans le survol de G. Knieper [Kni02]. En ce qui concerne la mesure de Liouville, on ignore si l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}}$ est de complémentaire négligeable, et on ne sait toujours pas si celle-ci est mélangeante, ou même ergodique, pour toutes les surfaces compactes connexes à courbure négative ou nulle, de caractéristique d'Euler négative. On renvoie à [Cou11] pour plus de détails sur ce point.

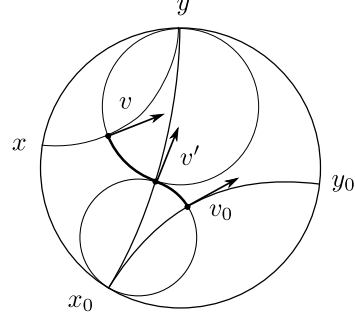
Venons-en au problème du mélange de la mesure d'entropie maximale. Soit $\bar{F} : T^1S \rightarrow \mathbf{R}$ une valeur d'adhérence de la suite $F \circ g_t$. Pour établir le mélange, il faut montrer que \bar{F} est constante presque partout, ou encore que son relevé \tilde{F} à $T^1\tilde{S}$ est constant presque partout.

LEMME 3.1. *On peut trouver $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable et $x_0, y_0 \in \partial\tilde{S}$ tels que :*

$$\nu \otimes \nu \otimes dt - p.t. (x, y, t), \quad \tilde{F}(x, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) = f(t).$$

Preuve. Considérons la valeur d'adhérence \bar{F} de la suite $F \circ g_t$. D'après le théorème 2.2, appliqué au flot géodésique sur T^1S , cette fonction est à la fois W^{ss} - et W^{su} -invariante. Par définition de l'invariance (définition 2.1), on peut trouver un sous-ensemble de T^1S de complémentaire négligeable tel que \bar{F} prend la même valeur sur tout couple de points dans cet ensemble, dès l'instant où ces points se trouvent sur la même feuille stable ou instable. Notons $\Omega \subset T^1\tilde{S}$ l'image réciproque de cet ensemble par la projection π . Le relevé \tilde{F} satisfait alors la propriété suivante: pour tout $v, w \in \Omega$ tels que $w \in W^{ss}(v)$ ou $w \in W^{su}(v)$, on a l'égalité $\tilde{F}(v) = \tilde{F}(w)$. On travaille maintenant dans le revêtement $T^1\tilde{S}$.

Étant donné un vecteur v_0 dans Ω , on cherche à relier tout vecteur $v \in \Omega$ à v_0 , modulo un décalage en temps, par un chemin composé d'un arc de feuille stable et d'un arc de feuille instable, comme dans le dessin ci-contre. Il s'agit de montrer que le vecteur v' assurant la liaison est encore dans Ω pour presque tout v dans Ω , si on a choisi v_0 judicieusement.



Soit $x_0, y_0 \in \partial\tilde{\mathcal{S}}$. On pose :

$$\Omega_{x_0} = \{ (y, t) \in \partial\tilde{\mathcal{S}} \times \mathbf{R} \mid (x_0, y, t) \in \Omega \}$$

$$\Omega_{x_0, y_0} = \{ t \in \mathbf{R} \mid (x_0, y_0, t) \in \Omega \}$$

$$\Omega'_{x_0} = \{ (y, t) \in \partial\tilde{\mathcal{S}} \times \mathbf{R} \mid (y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) \in \Omega_{x_0} \}$$

$$\Omega' = \{ (x, y, t) \in \Omega \mid (x, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) \in \Omega \}$$

D'après le théorème de Fubini, pour presque tout $(x_0, y_0) \in \partial\tilde{\mathcal{S}} \times \partial\tilde{\mathcal{S}}$, les ensembles Ω_{x_0} et Ω_{x_0, y_0} sont de complémentaire négligeable. Fixons une telle paire de points (x_0, y_0) . La mesure de Lebesgue dt étant invariante par translation, les ensembles Ω'_{x_0} et Ω' sont aussi de complémentaire négligeable. Pour tout (x, y, t) appartenant à l'ensemble de complémentaire négligeable $\Omega' \cap (\partial\tilde{\mathcal{S}} \times \Omega'_{x_0}) \cap (\partial\tilde{\mathcal{S}} \times \partial\tilde{\mathcal{S}} \times \Omega_{x_0, y_0})$, nous avons :

$$(x_0, y_0, t) \in \Omega,$$

$$(x_0, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) \in \Omega \cap W^{su}(x_0, y_0, t),$$

$$(x, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) \in \Omega \cap W^{ss}(x_0, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)),$$

ce qui entraîne, par W^{ss} - et W^{su} -invariance,

$$\tilde{F}(x, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) = \tilde{F}(x_0, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) = \tilde{F}(x_0, y_0, t) \equiv f(t).$$

3.2 BIRAPPORT

On se donne quatre points x, y, x', y' du bord $\partial\tilde{\mathcal{S}}$ tels que $x \neq y, x' \neq y', x \neq y', x' \neq y$. À ces quatre points, on peut associer un birapport de la façon suivante. Choisissons quatre suites de points x_n, y_n, x'_n, y'_n dans $\tilde{\mathcal{S}}$ qui convergent respectivement vers x, y, x', y' . On pose :

$$[x, x', y, y'] = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y'_n) - d(x'_n, y_n)$$

Les propriétés de ce birapport sont étudiées par J.-P. Otal [Ota92], dans le cadre de la courbure strictement négative, et étendues à la courbure négative ou nulle par M. Babillot [Bab02].

Propriétés

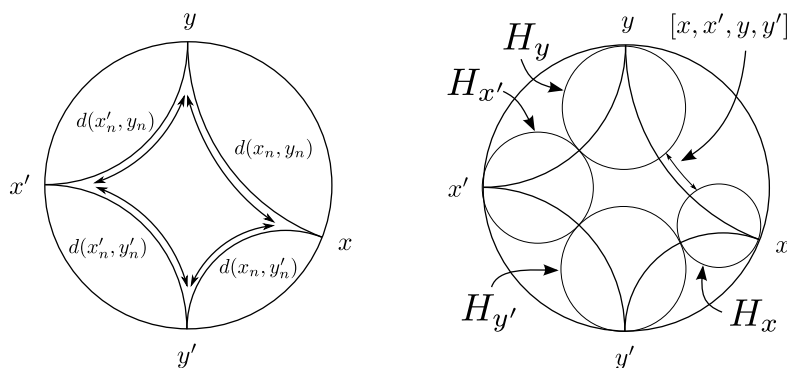
- Le birapport $[x, x', y, y']$ ne dépend pas des suites x_n, y_n, x'_n, y'_n choisies,
- c'est une fonction continue des points x, y, x', y' ,
- le birapport $[x, x, y, y]$ est nul,
- si les géodésiques reliant x à y et x' à y' se croisent, $[x, x', y, y'] > 0$.

On en déduit que les valeurs prises par le birapport, quand x, y, x', y' varient dans le domaine de définition spécifié plus haut, couvrent un petit intervalle ouvert de la forme $]0, \varepsilon[$.

3.3 MÉLANGE DU FLOT GÉODÉSIQUE

Le birapport va jouer un rôle analogue à l'identité utilisée en courbure constante, dans la seconde proposition. Soit γ la géodésique reliant x à y . Montrons qu'on peut se déplacer le long de γ d'une quantité égale au birapport $[x, x', y, y']$ en suivant les feuilles stables et instables du flot géodésique.

On considère quatre horocycles $H_x, H_{y'}, H_{x'}, H_y$ basés en x, y', x', y , successivement tangents les uns aux autres, de telle sorte que H_x passe par le point $\gamma(0)$. Une inspection attentive de la figure ci-dessous montre que l'horocycle H_y passe par le point $\gamma([x, x', y, y'])$. On peut donc relier les points $\gamma(0)$ et $\gamma([x, x', y, y'])$ en suivant les feuilles stables et instables.

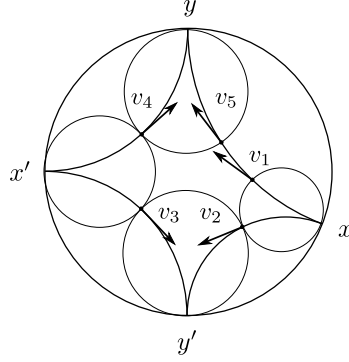


LEMME 3.2. *Pour presque tout $x, y, x', y' \in \partial\tilde{S}$ et presque tout $t \in \mathbf{R}$,*

$$\tilde{F}(x, y, t) = \tilde{F}(x, y, t + [x, x', y, y'])$$

Preuve.

Soit $v_1 = (x, y, t)$ un point sur la géodésique reliant x à y et $v_2 = (x, y', t_2)$, $v_3 = (x', y', t_3)$, $v_4 = (x', y, t_4)$, $v_5 = (x, y, t + [x, x', y, y'])$ les points qui se situent à l'intersection des feuilles stables et instables. Avec les notations du chapitre précédent, nous avons $t_2 = t + \rho_{x, y}(y')$, $t_3 = t_2$ et $t_5 = t_4 = t_3 + \rho_{x', y'}(y)$.



On a vu dans le lemme 3.1 que la fonction \tilde{F} était constante le long des distributions stables et instables du flot, en restriction à un ensemble Ω de complémentaire négligeable. En raisonnant comme dans ce lemme, d'abord avec les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 , puis avec les vecteurs v_5 , v_4 et v_3 , on montre que pour presque tout $(x, y) \in \partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S}$ et presque tout $(x', y', t) \in \partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} \times \mathbf{R}$, les cinq vecteurs v_i sont dans l'ensemble Ω . En conséquence,

$$\tilde{F}(x, y, t) = \tilde{F}(v_1) = \tilde{F}(v_2) = \dots = \tilde{F}(v_5) = \tilde{F}(x, y, t + [x, x', y, y']).$$

Démonstration du théorème 0.1 – preuve du mélange

On se donne une fonction $F \in L^2(X)$, ainsi qu'une valeur d'adhérence de la suite $F \circ g_t$. Il s'agit de montrer que cette valeur d'adhérence est constante presque partout. Notons \tilde{F} son relevé à $T^1\tilde{S}$. On a vu qu'il existait une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\tilde{F}(x, y, t + \rho_{x_0, y_0}(y)) = f(t)$ presque partout (lemme 3.1). Il reste à vérifier que f est presque partout constante. Rappelons que l'ensemble $G = \{l \in \mathbf{R} \mid p.t. t \in \mathbf{R}, f(t) = f(t + l)\}$ est un sous-groupe fermé de \mathbf{R} . Ce résultat classique se démontre en convolant f avec une fonction continue à support compact.

Pour ν -presque tout $x, x', y, y' \in \partial\tilde{S}$, le birapport $[x, x', y, y']$ appartient à G , d'après le lemme précédent (lemme 3.2). La mesure ν est de support total, ceci est donc encore vrai pour un ensemble dense de points x, x', y, y' , et par continuité du birapport, pour tous les points $x, x', y, y' \in \partial\tilde{S}$, $x \neq y$, $x' \neq y'$. D'après les propriétés du birapport vues plus haut, le groupe fermé G contient des réels arbitrairement proches de 0. Il est égal à \mathbf{R} , si bien que f est constante presque partout et le mélange est démontré.

4. ANNEXE

Preuve du théorème de Derriennic et Downarowicz

Soit H un espace de Hilbert et $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ un groupe de transformations à un paramètre, c'est-à-dire une famille d'opérateurs unitaires définis sur H , satisfaisant $U_{s+s'} = U_s \circ U_{s'}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} U_t f = U_{t_0} f$ pour tout s, s', t_0, f . Dans le cas qui nous intéresse, on prend $H = L^2(X)$ et $U_t f = f \circ g_t$. Fixons $F \in H$ et notons $Z(F) \subset H$ le sous-espace fermé engendré par les $U_t F$, $t \in \mathbf{R}$.

D'après le théorème de Stone, exposé dans le chapitre X du livre de F. Riesz et B. Sz.-Nagy [RSN65], on peut trouver une mesure borélienne ν_F sur \mathbf{R} satisfaisant $\nu_F(\mathbf{R}) = \|F\|^2$ et une isométrie linéaire inversible $\Psi : Z(F) \rightarrow L^2(\mathbf{R}, \nu_F)$ qui envoie F sur la fonction constante $\mathbf{1}$ et fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z(F) & \xrightarrow{\Psi} & L^2(\mathbf{R}, \nu_F) \\ U_t \downarrow & & \downarrow f(x) \mapsto e^{itx} f(x) \\ Z(F) & \xrightarrow{\Psi} & L^2(\mathbf{R}, \nu_F) \end{array}$$

Soit $\bar{F} \in L^2$ telle que $F \circ U_{t_j}$ converge vers \bar{F} . Posons $\varphi = \Psi(\bar{F})$. La suite $e^{it_j x} \mathbf{1}$ converge faiblement vers $\varphi(x)$ dans $L^2(\mathbf{R}, \nu_F)$ et par conjugaison, la suite $e^{-it_j x} \mathbf{1}$ converge vers $\bar{\varphi}(x)$. Posons $\psi = \frac{\varphi}{\bar{\varphi}} \mathbf{1}_{\bar{\varphi} \neq 0}$ et $F' = \Psi^{-1} \psi$. Nous avons alors

$$\forall h \in L^2(\mathbf{R}, \nu_F), \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-it_j x} \psi h d\nu_F \rightarrow \int \bar{\varphi} \psi h d\nu_F = \int \varphi h d\nu,$$

ce qui se traduit par : $U_{-t_j} F' \rightharpoonup \bar{F}$. C'est le résultat recherché.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bab02] Martine Babillot. On the mixing property for hyperbolic systems. *Israel J. Math.*, 129: 61–76, 2002.
- [Cou07] Yves Coudène. On invariant distributions and mixing. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(1): 109–112, 2007.
- [Cou11] Yves Coudène. Sur l'ergodicité du flot géodésique en courbure négative ou nulle. *Enseign. Math. (2)*, 57(1-2): 117–153, 2011.
- [Hed39] Gustav A. Hedlund. Fuchsian groups and mixtures. *Ann. of Math. (2)*, 40(2): 370–383, 1939.
- [Kni98] Gerhard Knieper. The uniqueness of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank 1 manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 148(1): 291–314, 1998.

- [Kni02] Gerhard Knieper. Hyperbolic dynamics and Riemannian geometry. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 453–545. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Mar70] G. A. Margulis. Certain measures that are connected with U-flows on compact manifolds. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 4(1): 62–76, 1970.
- [Nic89] Peter J. Nicholls. *The ergodic theory of discrete groups*, volume 143 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Ota92] Jean-Pierre Otal. Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 8(3): 441–456, 1992.
- [RSN65] Frédéric Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, Editeur, 1965. Quatrième édition. Académie des Sciences de Hongrie.