
Systemes dynamiques II

Yves Coudène, 29 février 2024

Master 2 de mathématiques fondamentales, Sorbonne Université

Version 0.7



2023 - 2024

Table des matières

Introduction	5
1 Applications dilatantes du cercle	7
1 Généralités	8
2 Stabilité	12
3 Degré	15
4 Codage	16
5 Ergodicité	17
6 Compléments	21
7 Exercices	23
2 Difféomorphismes Anosov	25
1 Propriétés	26
2 Automorphismes hyperboliques du tore	27
3 Mélange	28
4 Stabilité structurelle	29
5 Expansivité	32
6 Exercices	34
3 Difféomorphismes Axiome A	35
1 Propriétés	35
2 Difféomorphismes sur les surfaces	37
3 Le fer à cheval de Smale	39
4 Intersections homoclines	43
5 Compléments	45
6 Exercices	47
4 Flots d'Anosov	49
1 Propriétés	50
2 Le demi-plan de Poincaré	51
3 Flot géodésique en courbure négative	55
4 Modèles non euclidiens	59
5 Compléments	62
6 Exercices	65

5	Dynamique symbolique	67
1	Variétés stables et instables	67
2	Partitions de Markov	71
3	Modèle symbolique	75
4	Décalages de type fini	79
5	Exercices	83
6	Annexes	85
1	Théorème du point fixe de Banach	85
2	Densité dans les espaces L^p	86
3	Théorème de Radon-Nikodym	87
4	Convergence étroite des mesures	88
5	Théorème ergodique de Birkhoff	89
6	Théorème de Perron-Frobenius	92
7	Exercices	94
	Bibliographie	96
	Index	99

Introduction

*Mais malheur à l'auteur qui veut toujours instruire!
Le secret d'ennuyer est celui de tout dire.*

Voltaire (1694–1778)

Ces notes accompagnent le cours de Master 2 *Systèmes dynamiques II* donné au second semestre de l'année 2023-2024 à Sorbonne Université. Ce cours, qui constitue la suite du cours *Systèmes Dynamiques I* du premier semestre, est consacré à l'étude des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques. Ceux-ci forment une classe de systèmes à la fois chaotiques et stables.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des applications dilatantes du cercle. Elles sont à la fois stables par perturbation, possèdent un modèle symbolique décrivant leurs orbites, et leur comportement à long terme s'étudie par des méthodes ergodiques.

On retrouve ces différents aspects pour les trois types de systèmes dynamiques hyperboliques étudiés ensuite : les difféomorphismes Anosov, les difféomorphismes Axiome A et les flots d'Anosov. Chacun de ces systèmes fait l'objet d'un chapitre. Après avoir énoncé les théorèmes généraux les concernant, on étudie en détail divers exemples, parmi lesquels l'application du doublement de l'angle sur le cercle, les automorphismes linéaires hyperboliques des tores, deux fers à cheval et le flot géodésique en courbure négative.

Le dernier chapitre fait le lien entre systèmes hyperboliques et dynamique symbolique. On montre comment construire un codage pour les difféomorphismes hyperboliques en utilisant des partitions de Markov.

On a cherché à varier les points de vue tout au long du texte, en employant des méthodes de nature analytique avec la résolution d'équations de conjugaison par des outils d'analyse fonctionnelle, ou de nature ergodique avec la construction de mesures invariantes. L'étude des variétés stables et instables ouvre sur un aspect plus géométrique de la théorie, tandis que les modèles symboliques font le lien avec la théorie des probabilités.

Ce cours suppose connu le contenu des enseignements de licence de théorie de la mesure et intégration, d'analyse fonctionnelle, de géométrie différentielle et de probabilité. Il est parfois fait allusion à la théorie de l'entropie qui a été vue au premier semestre et pour laquelle on pourra se référer à [C].

Yves Coudène, le 20/02/2024.

Chapitre 1

Applications dilatantes du cercle

Nous nous intéressons à une classe de systèmes dynamiques introduite dans les années soixante, dont le comportement est de nature aléatoire. Nous allons considérer trois types de résultats décrivant les propriétés de ces systèmes.

– Des résultats de stabilité. Si nous perturbons le système, son comportement reste inchangé du point de vue topologique.

– L'existence d'un codage. Un modèle symbolique permet d'étudier la structure des orbites du système.

– Des propriétés de nature ergodique. Le système possède des mesures invariantes qui permettent d'étudier le comportement asymptotique de la plupart des trajectoires.

Illustrons ces différents aspects par l'exemple des applications dilatantes du cercle. Soit $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ l'ensemble des réels modulo un et considérons une application $\varphi : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ de classe C^1 satisfaisant

$$\forall x \in \mathbf{T}^1, \quad |\varphi'(x)| > 1.$$

Une telle application est dite *dilatante*. Nous allons montrer dans ce chapitre les trois propriétés suivantes.

Stabilité

Soit $\varphi_1 : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ une application C^1 dilatante. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application $\varphi_2 : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ de classe C^1 satisfaisant $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_1 < \varepsilon$, il existe un homéomorphisme $h : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ pour lequel

$$h \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h.$$

On dit que φ_1 et φ_2 sont topologiquement conjuguées par le biais de l'application h . La norme C^1 a été notée $\|\cdot\|_1$. L'application h permet de transférer les propriétés dynamiques de φ_1 à φ_2 . Par exemple, si φ_1 admet exactement deux points fixes, il en va de même pour φ_2 .

Codage

Soit $\varphi : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ une application C^1 dilatante. Alors il existe un entier $d \geq 2$ et une application continue surjective

$$h : \{1, \dots, d\}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{T}^1$$

tels que

$$h \circ \sigma = \varphi \circ h,$$

où $\sigma : \{1, \dots, d\}^{\mathbf{N}} \rightarrow \{1, \dots, d\}^{\mathbf{N}}$ est définie par $\sigma(\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}) = \{x_{k+1}\}_{k \in \mathbf{N}}$.

L'application σ est appelée *décalage*. Là encore, l'application h permet de transférer certaines propriétés dynamiques de σ à φ . Par exemple, nous verrons que σ admet un point dont l'orbite positive est dense. Il en va donc de même de toutes les applications dilatantes.

Comportement asymptotique des orbites

Soit $\varphi : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ une application C^2 dilatante. Alors il existe une application borélienne $f : \mathbf{T}^1 \rightarrow]0, \infty[$ satisfaisant $\int_{\mathbf{T}^1} f(x) dx = 1$ telle que pour tout ensemble borélien $A \subset \mathbf{T}^1$, pour presque tout $x \in \mathbf{T}^1$,

$$\frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \varphi^k(x) \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A f(x) dx.$$

Le terme presque tout fait ici référence à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{T}^1 . Un sous-ensemble $A \subset \mathbf{T}^1$ étant donné, presque toute trajectoire passe un temps dans A proportionnel à la moyenne $\int_A f(x) dx$. Les trajectoires se répartissent dans l'espace selon la densité f .

1. Généralités

Nous introduisons quelques définitions générales en théorie des systèmes dynamiques.

1.1 Système dynamique discret

Un *système dynamique topologique discret* est la donnée d'un espace métrique (X, d) et d'une application continue $\varphi : X \rightarrow X$. On fait souvent des hypothèses supplémentaires sur X , en le supposant complet, compact ou en demandant plus de régularité.

Exemple

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à des applications définies sur le tore

$$X = \mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} = \{x + \mathbf{Z} \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Cet espace est un groupe compact une fois muni de la distance

$$d(x + \mathbf{Z}, y + \mathbf{Z}) = \min\{|x - y + n| \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

On dit que le système est de classe C^k , $k \geq 1$, si X est une variété différentielle de classe C^k et φ est de classe C^k , c'est-à-dire dérivable k fois de différentielle k -ième continue. Le système est *inversible* si l'application φ

est bijective et si son application réciproque φ^{-1} a même régularité que φ . Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, sa norme uniforme est notée

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Si f est de classe C^k , sa norme C^k est notée $\|f\|_k = \sum_{i=0}^k \|d^i f\|_\infty$.

On note φ^n l'itéré n -ième de l'application φ . L'application φ^0 est égale à l'identité. Si φ est inversible, son inverse est noté φ^{-1} .

$$\varphi^0 = id, \quad \varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n, \quad \varphi^0(x) = x, \quad \varphi^{n+1}(x) = \varphi(\varphi^n(x)).$$

Exemples

- Pour tout $v \in \mathbf{T}^1$, la translation $x \mapsto x + v$ est une transformation de classe C^1 inversible de \mathbf{T}^1 dont l'itérée n -ième vaut $x \mapsto x + nv$.
- L'application de \mathbf{T}^1 dans \mathbf{T}^1 donnée par $x \mapsto 2x$ est C^1 mais n'est pas inversible, son itérée n -ième est donnée par $x \mapsto 2^n x$.

1.2 Notion d'orbite

L'*orbite positive* d'un point $x \in X$ est constituée des itérés $\varphi^n(x)$ de x pour $n \geq 0$.

$$\mathcal{O}_+(x) = \{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Lorsque φ est inversible, l'*orbite* de x est constituée des itérés positifs et négatifs de x .

$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Un point $x \in X$ est *périodique* de période n si $\varphi^n(x) = x$. La *période primitive* de x est le plus petit entier $n > 0$ pour lequel cette égalité est satisfaite. Les périodes d'un point périodique sont multiples de sa période primitive. Un *point fixe* est un point périodique de période 1.

Exemple

On peut calculer explicitement les points périodiques de période n de l'application $x \mapsto 2^n x$ définie sur \mathbf{T}^1 . Un tel point provient d'un point $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $2^n x = x + k$ pour un certain $k \in \mathbf{Z}$, il est donc de la forme $\frac{k}{2^n - 1}$. On remarque que l'ensemble de tous ces points périodiques forme un sous-ensemble dense de \mathbf{T}^1 .

Un système dynamique est dit *transitif* s'il admet un point dont l'orbite positive est dense.

$$\exists x \in X \text{ tel que } \overline{\mathcal{O}_+(x)} = X.$$

Il est *topologiquement mélangeant* si pour tous les ouverts non vides $U, V \subset X$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Exemple

Considérons un ensemble fini de symboles \mathcal{A} et notons $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ l'espace des suites infinies de symboles, muni de la distance

$$d(\{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}, \{b_k\}_{k \in \mathbf{N}}) = 2^{-\min\{k \geq 0 \mid a_k \neq b_k\}}.$$

Deux suites sont proches si elles débutent par les mêmes symboles. Muni de cette distance, l'espace $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ est compact. Le *décalage* $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est l'application donnée par

$$\sigma(\{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}) = \{a_{k+1}\}_{k \in \mathbf{N}}.$$

Proposition 1 *Le décalage $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ est une application transitive.*

Considérons la suite $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ obtenue en concaténant tous les mots construits à partir des symboles de \mathcal{A} , dans l'ordre lexicographique. Par exemple, si \mathcal{A} est égal à $\{0,1\}$,

$$\omega = 0 \ 1 \ 00 \ 01 \ 10 \ 11 \ 000 \ 001 \ 010 \ 011 \ 100 \ 101 \ 110 \ 111 \ 0000 \dots$$

Cette suite a une orbite dense sous l'action de σ car pour toute suite $(a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ et tout $k \in \mathbf{N}$, les k premiers symboles d'un certain itéré de ω coïncident avec ceux de (a_n) .

On démontre par un argument similaire le mélange topologique de σ .

1.3 Conjugaison

Nous allons nous intéresser à la classification des systèmes dynamiques à conjugaison près.

Définition 1 *Soient X et Y deux espaces métriques, $\varphi_1 : X \rightarrow X$ et $\varphi_2 : Y \rightarrow Y$ deux applications continues. Une semi-conjugaison entre φ_1 et φ_2 est une application continue $h : X \rightarrow Y$ qui satisfait : $h \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h$.*

En d'autres termes, le diagramme ci-contre commute. On parle de conjugaison lorsque h est bijective, d'inverse continu.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\varphi_2} & Y \end{array}$$

Exemple

L'application de \mathbf{T}^1 dans \mathbf{T}^1 donnée par $x \rightarrow 2x$ est semi-conjugée au décalage sur un alphabet à deux symboles par le biais de l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi : \{0,1\}^{\mathbf{N}} &\rightarrow [0,1] \\ \{a_i\}_{i \in \mathbf{N}} &\mapsto \sum \frac{a_i}{2^{i+1}} \end{aligned}$$

La notion de conjugaison est reliée à celle de stabilité.

Définition 2 *Considérons une variété compacte $X \subset \mathbf{R}^n$ de classe C^1 . Une application $\varphi_0 : X \rightarrow X$ de classe C^1 est dite structurellement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute application $\varphi : X \rightarrow X$ de classe C^1 satisfaisant $\|\varphi - \varphi_0\|_1 < \varepsilon$ est topologiquement conjuguée à φ_0 .*

Une petite perturbation de l'application ne modifie pas son comportement dynamique du point de vue topologique.

1.4 Mesures invariantes

Soit X un espace métrique, $\varphi : X \rightarrow X$ une application borélienne et μ une mesure définie sur la tribu des boréliens de X . La *mesure image* de μ par φ est définie par

$$\varphi_*\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)) \quad \text{pour tout borélien } A \subset X.$$

La mesure μ est dite *invariante* par φ si $\varphi_*\mu = \mu$. Pour montrer qu'une mesure est invariante, il suffit de vérifier la relation $\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$ pour un ensemble de parties $A \subset X$ engendrant la tribu des boréliens de X .

Exemple

Soit $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}^1$ la projection canonique et $\lambda_{\mathbf{R}}$ la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} . Elle induit une mesure $\lambda_{\mathbf{T}^1}$ sur $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ grâce à la formule

$$\lambda_{\mathbf{T}^1}(A) = \lambda_{\mathbf{R}}(\pi^{-1}(A) \cap [0,1]) \quad \text{pour tout borélien } A \subset \mathbf{T}^1,$$

La mesure $\lambda_{\mathbf{T}^1}$ est appelée mesure de Lebesgue sur \mathbf{T}^1 . S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace de définition, toutes les mesures de Lebesgue seront notées λ afin d'alléger les notations.

Montrons que $\lambda_{\mathbf{T}^1}$ est invariante par l'application de \mathbf{T}^1 donnée par $x \mapsto 2x$. Il suffit de vérifier l'invariance pour les ensembles de la forme $\pi([a,b])$, $0 \leq a, b \leq 1$. L'image réciproque de cet ensemble par $x \mapsto 2x$ est la projection de l'ensemble

$$\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right] \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2} \right]$$

qui a bien même mesure que $[a,b]$.

Un sous-ensemble borélien $A \subset X$ est dit *invariant* par φ si $\varphi^{-1}(A) = A$. Une fonction borélienne $f : X \rightarrow X$ est dite invariante par φ si $f \circ \varphi = f$. Une mesure μ est *ergodique* relativement à φ si tout borélien A invariant par φ est de mesure nulle ou de complémentaire de mesure nulle,

$$\varphi^{-1}(A) = A \text{ implique } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A^c) = 0,$$

ou si, de manière équivalente, toute fonction invariante bornée ou de carré intégrable est constante presque partout.

Lorsque μ est ergodique de masse finie, le théorème ergodique de Birkhoff, rappelé en annexe, montre que pour tout borélien $A \subset X$ et μ -presque tout $x \in X$,

$$\frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \varphi^k(x) \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A)}{\mu(X)}.$$

Une mesure de probabilité μ invariante par φ est dite *mélangeante* si pour tous ensembles mesurables A, B ,

$$\mu(\varphi^{-n}(A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B).$$

De manière équivalente, pour toutes fonctions $f, g \in L^2$,

$$\int f \circ \varphi^n g d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu \int g d\mu.$$

Il suffit de vérifier cette propriété pour un sous-ensemble de L^2 engendrant un sous-espace dense de L^2 pour obtenir le mélange. Remarquons que le mélange implique l'ergodicité. Si nous prenons $B = A^c$ avec A invariant, la propriété de mélange implique $\mu(A)\mu(A^c) = 0$.

Exemple

Montrons que la mesure $\lambda_{\mathbf{T}^1}$ est mélangeante relativement à l'application $\varphi(x) = 2x$ définie sur \mathbf{T}^1 . On peut se restreindre à des ensembles de la forme

$$A = \left[\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}} \right[\quad \text{et} \quad B = \left[\frac{l}{2^{n_1}}, \frac{l+1}{2^{n_1}} \right[$$

car les unions de tels ensembles engendrent la tribu des boréliens de \mathbf{T}^1 . Pour $n + n_0 \geq n_1$, l'intersection $\varphi^{-n}(A) \cap B$ est formée des 2^{n-n_1} intervalles

$$\left[\frac{i}{2^n} + \frac{k}{2^{n_0+n}}, \frac{i}{2^n} + \frac{k+1}{2^{n_0+n}} \right[\quad \text{pour} \quad 2^{n-n_1}l \leq i < 2^{n-n_1}(l+1).$$

Chacun de ces intervalles a pour longueur 2^{-n-n_0} . La mesure de l'intersection est donc égale à $\lambda_{\mathbf{T}^1}(A)\lambda_{\mathbf{T}^1}(B)$ comme souhaitée.

2. Stabilité

On se place sur l'espace $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ des nombre réels modulo les entiers. Il s'agit d'un tore de dimension 1 qui s'identifie au cercle unité S^1 du plan par le biais de l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^1 &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

Pour cette raison, l'espace \mathbf{T}^1 sera appelé cercle dans la suite. Les applications $x \mapsto 2x$ et $z \mapsto z^2$ se correspondent par le biais de cette identification. Notons $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}^1$ la projection canonique.

Nous commençons par montrer qu'une application dilatante proche de l'application $x \mapsto 2x$ définie sur \mathbf{T}^1 lui est conjuguée topologiquement.

Proposition 2 Soit $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue périodique de période 1 : $\psi(x+1) = \psi(x)$ pour tout x . Posons

$$\varphi(x) = 2x + \psi(x).$$

Alors il existe une application continue $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui satisfait la relation de conjugaison $h(\varphi(x)) = 2h(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et qui passe au quotient pour définir une application de \mathbf{T}^1 dans \mathbf{T}^1 vérifiant cette même égalité modulo 1.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbf{R} & \xrightarrow{x \mapsto 2x} & \mathbf{R} \end{array}$$

L'application induite par φ sur \mathbf{T}^1 est semi-conjuguée à l'application $x \mapsto 2x \bmod 1$.

Démonstration

Cherchons l'application h sous la forme $h(x) = x + g(x)$ avec $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue de période 1.

$$h \circ \varphi = 2id + \psi + g \circ \varphi, \quad 2h = 2id + 2g.$$

L'équation de conjugaison $h \circ \varphi = 2h$ devient

$$\psi + g \circ \varphi = 2g.$$

Résolvons cette équation par deux méthodes différentes.

Méthode 1

Introduisons l'opérateur de Koopman $Ug = g \circ \varphi$, pour $g \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ de période 1. Il satisfait l'inégalité $\|Ug\|_\infty \leq \|g\|_\infty$. L'équation devient

$$(2 - U)g = \psi.$$

Nous devrions avoir $g = (2 - U)^{-1}\psi = \frac{1}{2}(1 - \frac{U}{2})^{-1}\psi$ et en utilisant la série géométrique,

$$g = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} U^k \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \psi \circ \varphi^k.$$

Vérifions que cette série converge uniformément et que sa limite est bien solution de l'équation recherchée.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^{k+1}} \psi \circ \varphi^k \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \|\psi \circ \varphi^k\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \|\psi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty.$$

La série des normes uniformes est convergente, ce qui implique la convergence uniforme de la série. De plus, pour tout $N \geq 0$,

$$(2 - U) \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{2^{k+1}} U^k \psi \right) = \psi - \frac{1}{2^{N+1}} U^{N+1} \psi.$$

La relation recherchée s'ensuit en passant à la limite sur N .

Méthode 2

Nous cherchons une solution de l'équation $\frac{1}{2}(\psi + g \circ \varphi) = g$. Posons, pour $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue de période 1,

$$Lg = \frac{1}{2}(\psi + g \circ \varphi).$$

L'application Lg est encore continue de période 1 et il suffit de montrer que L admet un point fixe sur l'espace de ces fonctions, que nous munissons de la norme uniforme. Démontrons que L est une application lipschitzienne.

$$\|Lg_1 - Lg_2\|_\infty = \left\| \frac{1}{2}(g_1 \circ \varphi - g_2 \circ \varphi) \right\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

La constante de Lipschitz de L est inférieure stricte à 1, on peut donc appliquer le théorème de point fixe de Banach, rappelé en annexe, pour en déduire l'existence d'une fonction g_0 satisfaisant $Lg_0 = g_0$. Ce théorème affirme aussi que la suite $L^n 0$ converge vers g_0 exponentiellement vite.

$$\|L^n 0 - g_0\|_\infty \leq 2^{-n} \|\psi\|_\infty.$$

Un calcul direct montre que la suite $L^n 0$ correspond aux sommes partielles de la série intervenant dans la méthode précédente. La proposition est démontrée de deux manières différentes.

Corollaire 1 *Supposons dans l'énoncé de la proposition précédente que φ soit dilatante de classe C^1 : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\varphi'(x)| > 1$. Alors l'application $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est un homéomorphisme.*

Démonstration

Comme $h(x) = x + g(x)$ avec g borné,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'application h est surjective. Montrons qu'elle est injective. Supposons qu'il existe $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ tels que $h(x_0) = h(x_1)$. La relation de conjugaison implique pour tout $k \geq 0$,

$$\varphi^k(x_0) + g(\varphi^k(x_0)) = h(\varphi^k(x_0)) = 2^k h(x_0) = 2^k h(x_1) = \varphi^k(x_1) + g(\varphi^k(x_1)),$$

$$|\varphi^k(x_0) - \varphi^k(x_1)| = |g(\varphi^k(x_0)) - g(\varphi^k(x_1))| \leq 2\|g\|_\infty.$$

Remarquons que la dérivée φ' est périodique de période 1 et posons $\rho = \min |\varphi'| > 1$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$,

$$|(\varphi^n)'(x)| = \prod_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\varphi^k(x))| \geq \rho^n.$$

Le théorème des accroissements finis montre que pour tout $n \geq 0$,

$$\rho^n |x_0 - x_1| \leq |\varphi^n(x_0) - \varphi^n(x_1)|.$$

On a vu que ce dernier terme est majoré par $2\|g\|_\infty$, on en déduit que $x_0 = x_1$, l'application φ est injective. La proposition est démontrée.

3. Degré

Le corollaire précédent se généralise à toutes les applications dilatantes du cercle grâce à la notion de degré.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Cette application passe au quotient pour définir une application $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ si et seulement si deux réels différant d'un entier ont des images par φ qui diffèrent d'un entier.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \varphi(x+n) - \varphi(x) \in \mathbf{Z}.$$

Posons $d = \varphi(1) - \varphi(0)$. L'application $x \mapsto \varphi(x+1) - \varphi(x)$ étant continue et à valeurs entières, elle est constante égale à d . Posons $\psi(x) = \varphi(x) - dx$. Cette fonction est périodique de période 1.

$$\psi(x+1) = \varphi(x+1) - dx - d = \varphi(x) + d - dx - d = \psi(x).$$

Nous voyons que l'application $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ passe au quotient si et seulement si elle est de la forme $x \mapsto dx + \psi(x)$ pour un certain $d \in \mathbf{Z}$ et $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue, périodique de période 1.

Considérons une application continue $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$. La projection canonique $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}^1$ est un revêtement et \mathbf{R} est simplement connexe, on peut donc relever $\bar{\varphi}$ en une application $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de telle sorte que $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{T}^1 & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathbf{T}^1 \end{array}$$

Nous avons vu que l'application φ est nécessairement de la forme $dx + \psi(x)$, avec $d = \varphi(1) - \varphi(0)$ et ψ périodique de période 1. L'entier d est appelé le *degré* de $\bar{\varphi}$. Il ne dépend pas du relèvement choisi car deux relèvements de $\bar{\varphi}$ ne diffèrent que par un entier.

Proposition 3 *Pour toute application continue $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$, il existe un entier $d \in \mathbf{Z}$ et une application $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ périodique de période 1, telle*

que l'application $\varphi = dx + \psi(x)$ vérifie

$$\pi \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \pi.$$

L'entier d est le degré de $\bar{\varphi}$.

Remarquons que dans le cas dilatant, $|d| = |\varphi(1) - \varphi(0)| > 1$. Les démonstrations que nous avons données plus haut concernant les applications de la forme $x \mapsto 2x + \psi(x)$ se généralisent sans difficulté en degré quelconque. Nous obtenons un théorème de classification à conjugaison topologique près des applications dilatantes.

Théorème 1 (classification à conjugaison près) *Toute application $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ de classe C^1 dilatante est conjuguée topologiquement à une application de \mathbf{T}^1 de la forme $x \mapsto dx$ pour un certain entier d satisfaisant $|d| \geq 2$.*

Une application C^1 proche d'une application dilatante est encore dilatante et a même degré. Le théorème précédent montre que ces deux applications sont conjuguées, ce qui implique le théorème de stabilité énoncé en début d'introduction.

4. Codage

Le théorème de classification précédent ramène l'étude de la dynamique topologique des applications dilatantes du cercle à celle des applications $x \mapsto dx$, $|d| \geq 2$. L'étude de ces dernières peut se faire grâce à la décomposition des nombres réels en base d . Posons

$$\Sigma_d = \{1, \dots, d\}^{\mathbf{N}}, \quad \sigma(\{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}) = \{a_{k+1}\}_{k \in \mathbf{N}}.$$

L'application $\sigma : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$ est appelée décalage. Définissons une application h_d comme suit.

$$h_d : \begin{array}{ccc} \Sigma_d & \mapsto & \mathbf{T}^1 \\ \{a_k\}_{k \in \mathbf{N}} & \rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{d^{k+1}} \end{array}$$

Cette application est continue et surjective. C'est une semi-conjugaison entre le décalage $\sigma : \Sigma_d \rightarrow \Sigma_d$ défini par $\sigma(\{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}) = \{a_{k+1}\}_{k \in \mathbf{N}}$ et l'application $x \mapsto dx \bmod 1$.

$$h_d \circ \sigma = dh_d, \quad \begin{array}{ccc} \Sigma_d & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_d \\ h_d \downarrow & & \downarrow h_d \\ \mathbf{T}^1 & \xrightarrow{x \mapsto dx} & \mathbf{T}^1 \end{array}$$

Nous avons vu que toute application dilatante est conjuguée à une application de la forme $x \mapsto dx \bmod 1$. En composant h_d avec l'inverse de cette conjugaison, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2 (codage) Soit $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ une application de classe C^1 dilatante et soit d son degré. Posons $\Sigma_d = \{1, \dots, d\}^{\mathbf{N}}$. Alors il existe une application continue surjective $h : \Sigma_d \rightarrow \mathbf{T}^1$ satisfaisant $h \circ \sigma = \bar{\varphi} \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_d & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_d \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbf{T}^1 & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathbf{T}^1 \end{array}$$

Toute application dilatante est donc semi-conjugée à un décalage. Comme le décalage admet une orbite dense, il en va de même pour l'application dilatante, on dit qu'elle est *transitive*.

Corollaire 2 Toute application de \mathbf{T}^1 de classe C^1 dilatante est transitive.

5. Ergodicité

Pour étudier le comportement asymptotique des orbites d'une application dilatante, on cherche à construire des mesures invariantes qui sont ergodiques.

Rappelons que deux mesures boréliennes finies μ et ν sont *équivalentes* si elles ont les mêmes ensembles négligeables.

$$\mu(A) = 0 \text{ si et seulement si } \nu(A) = 0.$$

Théorème 3 (ergodicité) Soit $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ une application C^2 dilatante. Alors il existe une mesure de probabilité borélienne μ invariante par $\bar{\varphi}$, ergodique et équivalente à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathbf{T}^1}$.

La preuve repose sur deux lemmes. Notons $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ un relevé de $\bar{\varphi}$.

Lemme 1 (distorsion bornée) Il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout $n \geq 1$, et tout $x, y \in \mathbf{R}$ satisfaisant $|\varphi^n(x) - \varphi^n(y)| \leq 1$,

$$C^{-1} \leq \frac{(\varphi^n)'(x)}{(\varphi^n)'(y)} \leq C.$$

Démonstration

Quitte à changer le signe de φ et intervertir x et y , on peut supposer que $\varphi^{n'}(x) \geq \varphi^{n'}(y) > 1$. On part de l'égalité

$$\ln(\varphi^{n'}(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\varphi'(\varphi^k(x))).$$

La dérivée de $\ln \circ \varphi'$ est bornée par $\|\varphi''/\varphi'\|_{\infty}$, ce qui implique

$$0 \leq \ln(\varphi^{n'}(x)) - \ln(\varphi^{n'}(y)) \leq \|\varphi''/\varphi'\|_{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi^k(x) - \varphi^k(y)|.$$

Posons $\rho = \min |\varphi'| > 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$|\varphi^n(x) - \varphi^n(y)| = |\varphi^{n-k}(\varphi^k(x)) - \varphi^{n-k}(\varphi^k(y))| \geq \rho^{n-k} |\varphi^k(x) - \varphi^k(y)|.$$

Il reste à prendre l'exponentielle et à sommer la série géométrique.

$$1 \leq \frac{\varphi^{n'}(x)}{\varphi^{n'}(y)} \leq \exp\left(\left\|\frac{\varphi''}{\varphi'}\right\|_\infty \frac{|\varphi^n(x) - \varphi^n(y)|}{\rho - 1}\right) \leq e^{\frac{1}{\rho-1} \left\|\frac{\varphi''}{\varphi'}\right\|_\infty}.$$

La démonstration du lemme est terminée.

Lemme 2 *Pour tout boréliens $A \subset \mathbf{T}^1$ et tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$C^{-2} \lambda(A) \leq \lambda(\bar{\varphi}^{-n}(A)) \leq C^2 \lambda(A).$$

Démonstration

Pour chaque entier j compris entre 1 et le degré de φ^n , définissons l'intervalle

$$I_j = \varphi^{-n}([\varphi^n(0) + j, \varphi^n(0) + j + 1]).$$

Les I_j sont des intervalles disjoints dont l'union est égale à $[0,1[$. De plus, $|\varphi^n(x) - \varphi^n(y)| \leq 1$ si x, y sont dans I_j . Choisissons un $y_j \in I_j$ pour chaque j .

$$\lambda(\varphi^{-n}(\pi^{-1}(A)) \cap I_j) = \int_{I_j} \mathbf{1}_{\pi^{-1}(A)} \circ \varphi^n d\lambda \leq \int_{I_j} \mathbf{1}_{\pi^{-1}(A)}(\varphi^n(x)) C \frac{|\varphi^{n'}(x)|}{|\varphi^{n'}(y_j)|} dx$$

grâce au lemme de distortion. Par la formule de changement de variables,

$$\lambda(\varphi^{-n}(\pi^{-1}(A)) \cap I_j) \leq \frac{C}{|\varphi^{n'}(y_j)|} \int_{\mathbf{T}^1} \mathbf{1}_A d\lambda = \frac{C}{|\varphi^{n'}(y_j)|} \lambda(A).$$

On obtient de même une minoration qui conduit à l'encadrement

$$\frac{C^{-1}}{|\varphi^{n'}(y_j)|} \lambda(A) \leq \lambda(\varphi^{-n}(\pi^{-1}(A)) \cap I_j) \leq \frac{C}{|\varphi^{n'}(y_j)|} \lambda(A).$$

Le cas $A = \mathbf{T}^1$ implique $C^{-1} \lambda(I_j) \leq \frac{1}{|\varphi^{n'}(y_j)|} \leq C \lambda(I_j)$. Au final,

$$C^{-2} \lambda(A) \lambda(I_j) \leq \lambda(\varphi^{-n}(\pi^{-1}(A)) \cap I_j) \leq C^2 \lambda(A) \lambda(I_j).$$

Il suffit de sommer sur j pour conclure.

Lemme 3 $\forall A, B \subset \mathbf{T}^1, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N,$

$$C^{-2} \lambda(A) \lambda(B) - \varepsilon \leq \lambda(\bar{\varphi}^{-n}(A) \cap B) \leq C^2 \lambda(A) \lambda(B) + \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ et $f : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}_+$ une application K -lipschitzienne positive telle que $\|f - \mathbf{1}_B\|_{L^1} \leq \varepsilon$. Posons $\bar{I}_j = \pi(I_j)$, $\bar{y}_j = \pi(y_j)$ et approchons f uniformément par une fonction en escalier.

$$\left\| f - \sum_j f(\bar{y}_j) \mathbf{1}_{\bar{I}_j} \right\|_{\infty} \leq K \max_j \lambda(I_j) \leq KC\rho^{-n}.$$

Soit N tel que $KC\rho^{-N} < \varepsilon$ et $n \geq N$. L'encadrement des $\lambda(I_j)$ vu précédemment implique

$$\begin{aligned} \mu(\bar{\varphi}^{-n}(A) \cap B) &\geq \int_{\bar{\varphi}^{-n}(A)} f \, d\mu - \varepsilon \\ &\geq \int_{\bar{\varphi}^{-n}(A)} \sum_j f(\bar{y}_j) \mathbf{1}_{\bar{I}_j}(x) \, dx - 2\varepsilon \\ &\geq C^{-2} \lambda(A) \int_{\mathbf{T}^1} \sum_j f(\bar{y}_j) \mathbf{1}_{\bar{I}_j}(x) \, dx - 2\varepsilon \\ &\geq C^{-2} \lambda(A) \int_{\mathbf{T}^1} f \, d\mu - (C^{-2} + 2)\varepsilon \\ &\geq C^{-2} \lambda(A)\lambda(B) - (2C^{-2} + 2)\varepsilon. \end{aligned}$$

L'autre inégalité se démontre de manière similaire.

Démonstration du théorème

– *Construction de la mesure*

Considérons la suite de mesures de probabilité $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\varphi}_*^k \lambda$.

L'espace des mesures de probabilité sur \mathbf{T}^1 est compact pour la topologie faible, il existe donc une sous-suite (μ_{n_k}) qui converge faiblement vers une mesure de probabilité μ .

– *Invariance de la mesure*

Il suffit de passer à la limite dans l'égalité $\bar{\varphi}_* \mu_n = \mu_n + \frac{1}{n}(\bar{\varphi}_*^n \lambda - \lambda)$.

– *Équivalence avec la mesure de Lebesgue*

Soit $A \subset \mathbf{T}^1$, appliquons le second lemme avec $B = \mathbf{T}^1$.

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\bar{\varphi}^{-k}(A)) \leq C^2 \lambda(A).$$

D'après les propriétés de la convergence faible rappelées en annexe, cette inégalité passe à la limite. On procède de même pour la minoration afin d'obtenir l'encadrement $C^{-2} \lambda(A) \leq \mu(A) \leq C^2 \lambda(A)$ pour tout $A \subset \mathbf{T}^1$.

– *Ergodicité*

Soit A un borélien invariant par $\bar{\varphi}$. Prenons $B = A^c$ dans le troisième lemme.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad C^{-2} \lambda(A)\lambda(A^c) \leq \lambda(\bar{\varphi}^{-N}(A) \cap A^c) + \varepsilon = \lambda(A \cap A^c) + \varepsilon = \varepsilon.$$

La mesure λ est donc ergodique et il en va de même pour μ car les deux mesures sont équivalentes. Le théorème est démontré.

Le théorème de Radon-Nikodym, rappelé en annexe, montre qu'il existe une fonction borélienne notée $\frac{d\mu}{d\lambda}$ à valeurs dans $]0, \infty[$ telle que

$$\mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda \text{ pour tout borélien } A \subset \mathbf{T}^1.$$

Une fois l'ergodicité de μ démontrée, nous pouvons décrire le comportement asymptotique des orbites de l'application $\bar{\varphi}$ grâce au théorème ergodique, dont l'énoncé est rappelé en annexe.

Corollaire 3 *Pour tout borélien $A \subset \mathbf{T}^1$, pour λ -presque tout $x \in \mathbf{T}^1$,*

$$\frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \{0, \dots, n-1\} \mid \bar{\varphi}^k(x) \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{d\mu}{d\lambda}(x) dx.$$

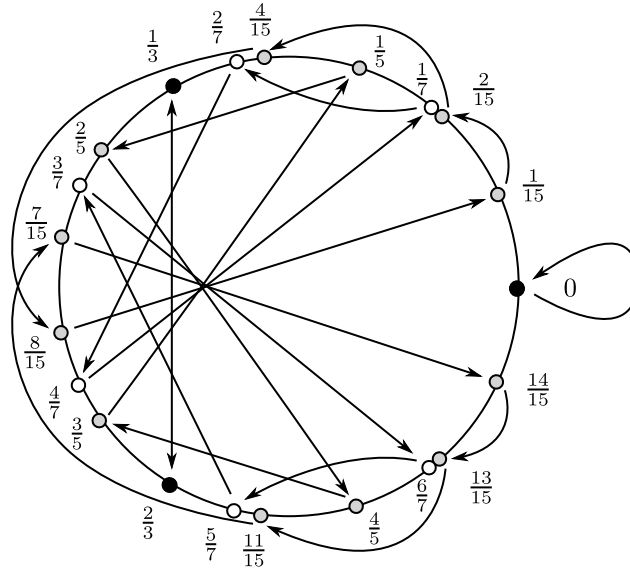
Presque toutes les orbites se répartissent selon la densité $\frac{d\mu}{d\lambda}$.

Le mélange et l'exactitude de la mesure μ sont proposés en exercice.

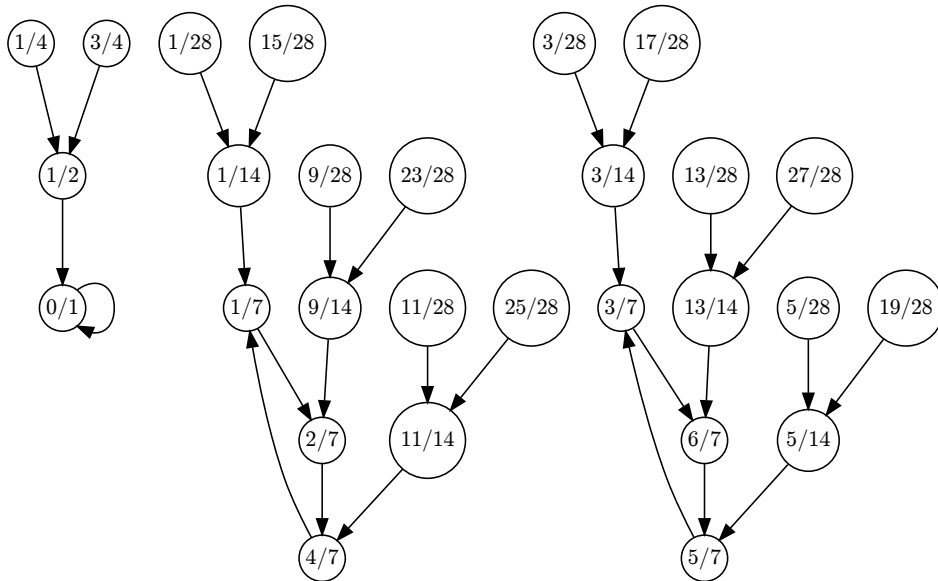
6. Compléments

6.1 Points périodiques de $x \mapsto 2x$

L'ensemble des points périodiques de l'application $x \mapsto 2x$ définie sur \mathbf{T}^1 est dense dans \mathbf{T}^1 . Les points de période inférieure ou égale à 4 sont représentés sur la figure suivante.



L'ensemble $A_n = \{ \frac{k}{n} \in \mathbf{T}^1 \mid 0 \leq k < n \}$ est un ensemble fini invariant par l'application $x \mapsto 2x$, il est donc constitué de points périodiques et pré-périodiques. On en déduit que les points rationnels sont tous périodiques ou pré-périodiques. La dynamique sur l'ensemble A_{28} est représentée ci-dessous.



Voici la liste des points périodiques de période inférieure ou égale à 6.

codage	période	valeur rationnelle
0	1	0
01,10	2	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
001,010,100	3	$(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$
011,110,101	3	$(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7})$
0001,0010,0100,1000	4	$(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15})$
0011,0110,1100,1001	4	$(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
0111,1110,1101,1011	4	$(\frac{7}{15}, \frac{14}{15}, \frac{13}{15}, \frac{11}{15})$
00001,00010,00100,01000,10000	5	$(\frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31})$
00011,00110,01100,11000,10001	5	$(\frac{3}{31}, \frac{6}{31}, \frac{12}{31}, \frac{24}{31}, \frac{17}{31})$
00101,01010,10100,01001,10010	5	$(\frac{5}{31}, \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{9}{31}, \frac{18}{31})$
00111,01110,11100,11001,10011	5	$(\frac{7}{31}, \frac{14}{31}, \frac{28}{31}, \frac{25}{31}, \frac{19}{31})$
01011,10110,01101,11010,10101	5	$(\frac{11}{31}, \frac{22}{31}, \frac{13}{31}, \frac{26}{31}, \frac{21}{31})$
01111,11110,11101,11011,10111	5	$(\frac{15}{31}, \frac{30}{31}, \frac{29}{31}, \frac{27}{31}, \frac{23}{31})$
000001,000010,000100,001000,010000,100000	6	$(\frac{1}{63}, \frac{2}{63}, \frac{4}{63}, \frac{8}{63}, \frac{16}{63}, \frac{32}{63})$
000011,000110,001100,011000,110000,100001	6	$(\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{16}{21}, \frac{11}{21})$
000101,001010,010100,101000,010001,100010	6	$(\frac{5}{63}, \frac{10}{63}, \frac{20}{63}, \frac{40}{63}, \frac{17}{63}, \frac{34}{63})$
000111,001110,011100,111000,110001,100011	6	$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9})$
001011,010110,101100,011001,110010,100101	6	$(\frac{11}{63}, \frac{22}{63}, \frac{44}{63}, \frac{25}{63}, \frac{50}{63}, \frac{37}{63})$
001101,011010,110100,101001,010011,100110	6	$(\frac{13}{63}, \frac{26}{63}, \frac{52}{63}, \frac{41}{63}, \frac{19}{63}, \frac{38}{63})$
001111,011110,111100,111001,110011,100111	6	$(\frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{20}{21}, \frac{19}{21}, \frac{17}{21}, \frac{13}{21})$
010111,101110,011101,111010,110101,101011	6	$(\frac{23}{63}, \frac{46}{63}, \frac{29}{63}, \frac{58}{63}, \frac{53}{63}, \frac{43}{63})$
011111,111110,111101,111011,110111,101111	6	$(\frac{31}{63}, \frac{62}{63}, \frac{61}{63}, \frac{59}{63}, \frac{55}{63}, \frac{47}{63})$

Notons N_n le nombre de points périodiques de période n et P_n le nombre de points périodiques de période primitive n . Ils vérifient les identités

$$N_n = 2^n - 1, \quad N_n = \sum_{d|n} P_d, \quad P_n = \sum_{d|n} \mu(d) N_{n/d}$$

où $\mu(d)$ est la fonction de Moëbius, définie par

$$\mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{si un carré divise } d, \\ 1 & \text{si } d \text{ est produit d'un nombre pair de nombres premiers,} \\ -1 & \text{si } d \text{ est produit d'un nombre impair de nombres premiers.} \end{cases}$$

On en déduit le nombre d'orbites périodiques de période primitive n pour $x \mapsto 2x$ sur \mathbf{T}^1 .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P_n/n	1	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161

7. Exercices

Exercice 1

Construire une application du cercle de classe C^1 dont toutes les orbites sont convergentes.

Exercice 2

Construire une application du cercle de classe C^1 qui ne possède pas de point fixe et telle que toute application uniformément proche n'ait pas de point fixe.

Exercice 3

Soit X une variété compacte connexe et $\varphi : X \rightarrow X$ une application C^1 telle que $\det(d_x\varphi) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Montrer que φ est surjective. L'application φ admet-elle nécessairement un point fixe ?

Conjugaison

Exercice 4

Soit $\varphi_1 : X_1 \rightarrow X_1$ et $\varphi_2 : X_2 \rightarrow X_2$ deux applications continues semi-conjugées par le biais d'une application continue surjective $h : X_1 \rightarrow X_2$, $h \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h$. Montrer que si φ_1 est transitive, il en va de même pour φ_2 . Donner un exemple où φ_2 est transitive sans que φ_1 ne le soit.

Exercice 5

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients entiers et v un vecteur de \mathbf{R}^n . On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A . Montrer que les applications induites sur $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ par $x \mapsto Ax$ et $x \mapsto Ax + v$ sont conjuguées par le biais d'une translation.

Exercice 6

Soit X, Y deux variétés C^1 et $\varphi_1 : X \rightarrow X$, $\varphi_2 : Y \rightarrow Y$ deux applications de classe C^1 conjuguées par le biais d'un difféomorphisme $h : X \rightarrow Y$, $h \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h$. Soit x_0 un point fixe de φ_1 . Montrer que $h(x_0)$ est un point fixe de φ_2 et que les différentielles $d_{x_0}\varphi_1$ et $d_{h(x_0)}\varphi_2$ ont mêmes valeurs propres.

Propriétés des applications dilatantes

On note $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ une application dilatante du cercle de classe C^1 .

Exercice 7

Supposons que $\bar{\varphi}$ est induite par l'application $x \mapsto 2x + \varepsilon \sin(2\pi x)$. Montrer que $\bar{\varphi}_\varepsilon$ n'est pas conjuguée à $\bar{\varphi}_0$ par le biais d'un difféomorphisme de \mathbf{T}^1 de classe C^1 si $\varepsilon > 0$.

Exercice 8

Calculer le nombre N_n des points périodiques de $\bar{\varphi}$ de période n puis donner une asymptotique pour N_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 9

On considère l'application dilatante de \mathbf{T}^1 donnée par $x \mapsto 3x$. Montrer qu'il existe un point $x \in \mathbf{T}^1$ dont l'orbite est dense dans la projection sur le tore de l'ensemble triadique de Cantor. Montrer que cette projection est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor lui-même.

Exercice 10

Montrer que $\bar{\varphi}$ est topologiquement mélangeante. On pourra faire appel à son modèle symbolique.

Propriétés ergodiques

Dans la suite, $\bar{\varphi} : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ est une application dilatante du cercle de classe C^2 et μ est sa mesure de probabilité invariante ergodique équivalente à Lebesgue.

Exercice 11

Notons \mathcal{B} la tribu des boréliens de \mathbf{T}^1 . Montrer que la tribu $\bigcap_n \bar{\varphi}^{-n} \mathcal{B}$ ne contient que des ensembles λ -négligeables ou de complémentaires λ -négligeables et que la même propriété est vraie pour μ . On dit que la mesure μ est *exacte*.

Exercice 12

Soit f une fonction borélienne bornée et g une valeur d'adhérence de la suite $f \circ T^n$ pour la topologie faible sur $L^2(\mathbf{T}^1)$. Montrer que g est mesurable relativement à la tribu $\bigcap_n \bar{\varphi}^{-n} \mathcal{B}$.

En déduire que la mesure μ est *mélangeante*.

Exercice 13

Montrer la convergence $\lambda(\bar{\varphi}^{-n} A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$ pour tout borélien $A \subset \mathbf{T}^1$. Montrer que si ν est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à μ , alors $\nu(\bar{\varphi}^{-n} A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$.

Exercice 14

Soit $x_0 \in \mathbf{T}^1$ et $f : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ_{\max} telle que

$$\frac{1}{\text{Card}(\bar{\varphi}^{-n}(\{x\}))} \sum_{y \in \bar{\varphi}^{-n}(\{x\})} f(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_{\max}.$$

On pourra commencer par traiter le cas de l'application $x \mapsto 2x$ et de $x = 0$. A-t-on $\mu_{\max} = \mu$?

Exercice 15

Montrer qu'il existe un réel $\chi(\mu)$ tel que pour μ -presque tout $x \in \mathbf{T}^1$,

$$\frac{1}{n} \log |(\bar{\varphi}^n)'(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi(\mu).$$

Le réel $\chi(\mu)$ est l'exposant de Lyapunov de μ . C'est aussi son entropie.

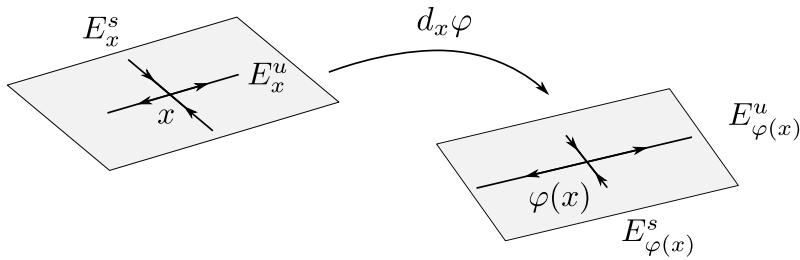
Chapitre 2

Difféomorphismes Anosov

Les difféomorphismes uniformément hyperboliques se caractérisent par un comportement contractant dans certaines directions, et par un comportement dilatant dans un ensemble de directions supplémentaires. Ils constituent une classe de systèmes dynamiques à la fois stable et chaotique. Les orbites individuelles peuvent être décrites en employant des méthodes probabilistes, tandis que le comportement global du système reste invariant par perturbation.

Définition 3 Soit M une variété riemannienne de classe C^k et $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^k . Un sous-ensemble $\Lambda \subset M$ est dit hyperbolique s'il est compact, invariant par φ et s'il existe des constantes $C > 0$, $\lambda \in [0,1[$ et pour chaque $x \in \Lambda$ des espaces vectoriels $E_x^s \subset T_x M$ et $E_x^u \subset T_x M$ tels que pour tout $x \in \Lambda$,

- $T_x^1 M = E_x^s \oplus E_x^u$,
- $d_x \varphi(E_x^s) = E_{\varphi(x)}^s$, $d_x \varphi(E_x^u) = E_{\varphi(x)}^u$,
- $\forall v \in E_x^s$, $\forall n \geq 0$, $\|d_x(\varphi^n)v\| \leq C\lambda^n \|v\|$,
- $\forall v \in E_x^u$, $\forall n \geq 0$, $\|d_x(\varphi^n)v\| \geq C\lambda^{-n} \|v\|$.



La constante λ est appelée *constante d'hyperbolicité*. Toutes les métriques riemanniennes sur Λ sont équivalentes, changer de métrique modifie la constante C sans modifier λ . Les métriques pour lesquelles $C = 1$ sont dites *adaptées*. On verra en exercice qu'il existe toujours des métriques adaptées.

Si Λ est un ensemble hyperbolique pour φ , on dit que le difféomorphisme φ est *uniformément hyperbolique* en restriction à Λ . L'uniformité fait référence au fait que C et λ ne dépendent pas du point $x \in \Lambda$. Les familles

$\{E_x^s\}_{x \in M}$ et $\{E_x^u\}_{x \in M}$ sont appelées respectivement *distributions stables et instables*, elles dépendent continûment du point $x \in \Lambda$.

Nous allons nous intéresser à deux types de difféomorphismes uniformément hyperboliques. Les premiers ont été introduits par D. V. Anosov dans les années soixante et portent aujourd'hui son nom, ce sont ceux pour lesquels la variété est un ensemble hyperbolique. Les seconds viennent des travaux de S. Smale sur la stabilité structurelle et portent le nom de difféomorphismes Axiom A.

1. Propriétés

Nous nous plaçons sur une variété compacte, où nous définissons une première classe de difféomorphismes uniformément hyperboliques.

Définition 4 *Un difféomorphisme de classe C^k , $k \geq 1$, défini sur une variété compacte connexe M est dit Anosov si M est un ensemble hyperbolique.*

Les difféomorphismes Anosov satisfont des propriétés analogues aux applications dilatantes. D'abord, ils sont structurellement stables.

Théorème 4 (stabilité structurelle) *Les difféomorphismes Anosov de classe C^1 sont structurellement stables.*

Ensuite, ils admettent un codage par un *décalage de type fini*. Un tel décalage est défini à l'aide d'une matrice carrée A de taille m dont les coefficients sont à valeurs dans $\{0,1\}$.

$$\Sigma_A = \{\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \{1, \dots, m\}^{\mathbf{Z}} \mid \forall i \in \mathbf{Z}, A_{a_i a_{i+1}} = 1\}.$$

Le décalage $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ est donné par

$$\sigma(\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}}) = \{a_{k+1}\}_{k \in \mathbf{Z}}.$$

Il s'agit d'une application inversible, on parle de décalage bilatère.

Théorème 5 (modèle symbolique) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Anosov de classe C^1 . Alors il existe une matrice carrée A et une application continue surjective $h : \Sigma_A \rightarrow M$ qui satisfait $h \circ \varphi = \sigma \circ h$.*

Ce résultat ne permet pas d'en déduire la transitivité des difféomorphismes Anosov.

Conjecture

Les difféomorphismes Anosov sont transitifs.

C'est la conjecture la plus ancienne concernant les difféomorphismes Anosov, nous verrons qu'elle est équivalente à la densité des points périodiques dans M .

En général, les difféomorphismes Anosov ne préservent pas de mesure absolument continue relativement au volume riemannien. Mais s'ils préservent une telle mesure, celle-ci est ergodique.

Théorème 6 (ergodicité) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Anosov transitif de classe C^2 préservant une mesure de probabilité absolument continue relativement au volume riemannien. Alors cette mesure est ergodique.*

On peut aussi montrer que cette mesure est mélangeante.

2. Automorphismes hyperboliques du tore

Soit A une matrice $d \times d$ à coefficients entiers. Elle induit une application du tore \mathbf{T}^d dans lui-même appelée *endomorphisme du tore*. Lorsque A est de déterminant 1, cette application induite est inversible. On parle d'*automorphisme du tore*.

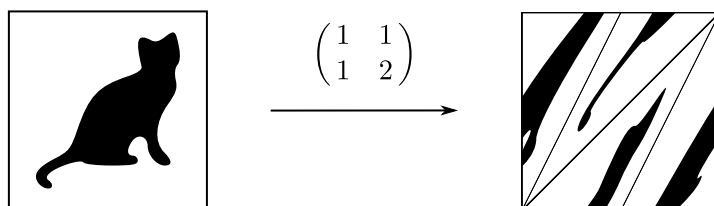
Les endomorphismes du tore dont toutes les valeurs propres sont de module strictement plus grand que 1 sont des applications dilatantes. On parle d'*endomorphisme dilatant*. L'exemple le plus simple est l'application $x \mapsto 2x$ sur \mathbf{T}^1 .

Définition 5 *Un automorphisme de \mathbf{T}^d associé à une matrice dont toutes les valeurs propres sont de module différent de 1 est appelé automorphisme hyperbolique du tore.*

Un exemple est l'application du chat d'Arnold donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2.$$

Elle doit son nom à une illustration figurant dans le livre d'Arnold-Avez intitulé *méthodes ergodiques de la mécanique classique* [AA].



Proposition 4 *Les automorphismes hyperboliques du tore \mathbf{T}^d sont des difféomorphismes Anosov transitifs.*

Démonstration

Soit \mathcal{V}_s l'ensemble des valeurs propres complexes de A de module inférieur à 1 et

$$\tilde{E}_s = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{V}_s} \ker(A - \lambda id)^d \subset \mathbf{C}^d.$$

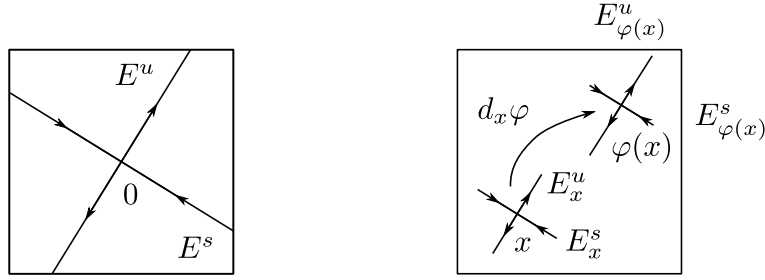
Sur le sous-espace invariant $\ker(A - \lambda id)^d$, nous avons l'égalité

$$A^n = (\lambda id + (A - \lambda id))^n = \sum_{k=0}^{d-1} C_n^k \lambda^{n-k} (A - \lambda id)^k.$$

Soit $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+$ tel que $\max_{\lambda \in \mathcal{V}_s} |\lambda| < \lambda_0 < 1$. La suite $\|A^n|_{\tilde{E}_s}\|/\lambda_0^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\|A^n|_{\tilde{E}_s}\| \leq C\lambda_0^n$ pour tout $n \geq 0$. Notons $\pi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ la projection canonique et $t_x(y) = x + y$ la translation de \mathbf{R}^d envoyant 0 sur x . Posons

$$E_x^s = d_x \pi(d_0 t_x(\tilde{E}^s \cap \mathbf{R}^d)) \subset T_x \mathbf{T}^d.$$

On procède de même avec les valeurs propres de module plus grand que 1 pour définir un espace instable $E_x^u \subset T_x \mathbf{T}^d$. Ces espaces satisfont les propriétés souhaitées pour faire de l'automorphisme associé à la matrice A un difféomorphisme Anosov du tore. La proposition est démontrée, hormis pour la transitivité.



3. Mélange

Pour montrer la transitivité des automorphismes hyperboliques du tore, nous allons nous intéresser à une propriété de nature ergodique que ces transformations partagent avec les endomorphismes dilatants du tore.

Proposition 5 *Soit A une matrice de taille $d \times d$ à coefficients entiers, de déterminant non nul et dont aucune des valeurs propres n'est racine de l'unité. Alors l'endomorphisme du tore associé préserve la mesure de Lebesgue et cette mesure est mélangeante.*

On en déduit en particulier que les automorphismes hyperboliques du tore sont ergodiques relativement à la mesure de Lebesgue du tore, ce qui implique leur transitivité. La preuve de la proposition fait appel aux séries de Fourier.

Démonstration

Soit $k \in \mathbf{Z}^d$ et $k \cdot x$ la quantité $\sum k_j x_j$. Posons $e_k(x) = e^{ik \cdot x}$, ces fonctions

forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T}^d)$. Soit $f \in L^2$ et c_k ses coefficients de Fourier.

$$\int_{\mathbf{T}^d} f(Ax) dx = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} c_k \int e^{i k \cdot Ax} dx = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} c_k \int e^{i(tAk) \cdot x} dx = c_0 = \int f(x) dx.$$

Cela montre l'invariance de la mesure. Soit $k, l \in \mathbf{Z}^n$. Montrons le mélange.

$$\int_{\mathbf{T}^d} e_k(x) e_l(A^n x) dx = \int_{\mathbf{T}^d} e^{ik \cdot x} e^{il \cdot A^n x} dx = \int_{\mathbf{T}^d} e^{i(k+tA^n l)x} dx.$$

Cette intégrale est égale à 0 si $tA^n l \neq -k$ et 1 sinon. Si elle ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, on peut trouver des entiers distincts n_1, n_2 tels que $tA^{n_1} l = -k = tA^{n_2} l$. On aurait donc $tA^{n_2-n_1} l = l$. Comme A n'a pas de valeur propre racine de l'unité, $l = 0$ et $k = 0$. Nous avons donc

$$\int_{\mathbf{T}^d} f g \circ A^n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}^d} f d\lambda \int_{\mathbf{T}^d} g d\lambda$$

pour f, g de la forme e_k , $k \in \mathbf{Z}$ puis pour tout $f, g \in L^2$ par densité.

4. Stabilité structurelle

La stabilité structurelle des automorphismes hyperboliques se démontre de la même manière que celle des applications dilatantes.

Proposition 6 *Les automorphismes hyperboliques du tore \mathbf{T}^d sont structurellement stables.*

Démonstration

Commençons par construire une semi-conjugaison h entre l'automorphisme associé à la matrice A et une application φ proche de cet automorphisme en norme C^1 . On relève ces applications à \mathbf{R}^d et on cherche à résoudre l'équation $h \circ \varphi = Ah$. Notons B l'espace de Banach des fonctions continues de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}^d qui sont \mathbf{Z}^d -périodiques, qu'on identifie à $C^0(\mathbf{T}^d, \mathbf{R}^d)$. Posons

$$\varphi(x) = Ax + \psi(x), \quad h(x) = x + g(x).$$

avec ψ et $h \in B$. L'équation de conjugaison devient $\psi + g \circ \varphi = Ag$, puis, en posant $Ug = g \circ \varphi$ pour $g \in B$,

$$(id - A^{-1}U)g = A^{-1}\psi.$$

Posons $T(g) = A^{-1}Ug$, il s'agit d'inverser $id - T : B \rightarrow B$. Pour une application dilatante, on pouvait s'appuyer sur le caractère contractant de T , ce n'est plus le cas ici. Notons E_s et E_u les sous-espaces stable et instable de A et posons

$$B_s = C^0(\mathbf{T}^d, E_u), \quad B_u = C^0(\mathbf{T}^d, E_s).$$

La somme de ces deux sous-espaces est égale à B et l'application T les laisse invariants. Quitte à changer de norme sur \mathbf{R}^d , on peut supposer que $\|A|_{E_s}\| < 1$ et $\|A|_{E_u}^{-1}\| < 1$, ce qui implique

$$\|T|_{B_s}\| < 1, \quad \|T|_{B_u}^{-1}\| < 1.$$

Considérons les deux identités

$$(id - T)(id + \dots + T^n) = id - T^{n+1}, \quad (T - id)(T^{-1} + \dots + T^{-n}) = id - T^{-n}.$$

La première de ces deux identités montre que $id - T : B_s \rightarrow B_s$ est inversible, la deuxième que $id - T : B_u \rightarrow B_u$ est inversible. L'application linéaire $id - T : B \rightarrow B$ est donc inversible et la semi-conjugaison h est donnée par

$$h = id + \sum_{k=0}^{\infty} A^{-k-1} \pi_u \psi \circ \varphi^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \pi_s \psi \circ \varphi^{-k},$$

où π_s et π_u sont les deux projecteurs associés à la somme $E_s \oplus E_u$.

Il reste à démontrer que la semi-conjugaison obtenue au quotient est bijective. Montrons l'injectivité par un argument proche de celui utilisé pour les applications contractantes. Supposons qu'il existe $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ tels que $h(x_0) = h(x_1)$. La relation de conjugaison implique pour tout $k \geq 0$,

$$\varphi^k(x_0) + g(\varphi^k(x_0)) = h(\varphi^k(x_0)) = A^k h(x_0) = A^k h(x_1) = \varphi^k(x_1) + g(\varphi^k(x_1)),$$

$$|\varphi^k(x_0) - \varphi^k(x_1)| = |g(\varphi^k(x_0)) - g(\varphi^k(x_1))| \leq 2\|g\|_{\infty}.$$

Dans le cas dilatant, les points $\varphi^k(x_0)$ et $\varphi^k(x_1)$ s'écartent l'un de l'autre lorsque k tend vers $+\infty$, ce n'est plus le cas ici. On a malgré tout dilatation au niveau différentiel dans un cône de l'espace tangent. Notons π_s et π_u les projections sur les sous-espaces stables et instables de A et pour $v \in \mathbf{R}^d$, utilisons les notations

$$v_s = \pi_s(v), \quad v_u = \pi_u(v), \quad A_s = A\pi_s = \pi_s A, \quad A_u = A\pi_u = \pi_u A.$$

Définissons les cônes stable et instable de A par

$$C^s = \{v \in \mathbf{R}^d \mid \|v_s\| \geq \|v_u\|\}, \quad C^u = \{v \in \mathbf{R}^d \mid \|v_s\| \leq \|v_u\|\}.$$

La matrice A envoie le cône C^u dans lui-même et dilate strictement les vecteurs de ce cône en vertu des inégalités

$$\|Av_u\| \geq \|A_u^{-1}\|^{-1} \|v_u\| \geq \|A_u^{-1}\|^{-1} \|v_s\| \geq \|A_u^{-1}\|^{-1} \|A_s\|^{-1} \|Av_s\|,$$

$$\|v_u\| \leq \|v\| \leq \|v_u\| + \|v_s\| \leq 2\|v_u\|.$$

De plus, nous avons l'encadrement pour tout $v \in \mathbf{R}^d$,

$$1 - \|d_x \psi A^{-1}\| \leq \frac{\|d_x \varphi v\|}{\|Av\|} \leq 1 + \|d_x \psi A^{-1}\|.$$

L'application $d_x \varphi$ préserve donc le cône et dilate strictement ses vecteurs.

On conclut que si $x - y$ appartient à C^u , il en va de même pour $\varphi(x) - \varphi(y)$ et la distance entre les itérés positifs de x et y tend vers l'infini. Si par contre $x - y$ n'appartient pas à C^u , il est dans C^s et on raisonne de même avec A^{-1} et $d_x \varphi^{-1}$. Les itérés négatifs de x et y s'éloignent l'un de l'autre et ne peuvent pas rester à distance bornée. Cela termine la preuve de l'injectivité de $h : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ et l'injectivité au quotient en découle.

La surjectivité peut se démontrer grâce à un théorème de topologie générale, qui se déduit du théorème de l'invariance du domaine.

Théorème 7 *Soit X, Y deux variétés topologiques compactes connexes de même dimension. Alors toute application $\varphi : X \rightarrow Y$ continue injective est surjective.*

La stabilité structurelle des automorphismes hyperboliques des tores est établie. En procédant de manière analogue au cas dilatant, on pourrait démontrer le résultat de conjugaison globale suivant.

Théorème 8 (classification à conjugaison près) *Soit $\varphi : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ un difféomorphisme Anosov. Alors φ est topologiquement conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore \mathbf{T}^d .*

Ce résultat implique, en particulier, la transitivité des difféomorphismes Anosov sur le tore.

4.1 Le théorème du point fixe hyperbolique

Dans la démonstration précédente, nous avons étudié une application linéaire T définie sur un Banach avec des sous-espaces dilatés et contractés. C'est un exemple d'application linéaire continue hyperbolique.

Définition 6 *Soit B un espace de Banach. Une application linéaire continue $T : B \rightarrow B$ est dite hyperbolique si on peut trouver deux sous-espaces fermés B_s, B_u de B tels que $B = B_s \oplus B_u$,*

$$T(B_s) \subset B_s, \quad T(B_u) = B_u, \quad T|_{B_u} \text{ est inversible,}$$

$$\|T|_{B_s}\| < 1, \quad \|(T|_{B_u})^{-1}\| < 1.$$

Notons $\pi_s, \pi_u : B \rightarrow B$ les projections sur les espaces B_s et B_u . Nous avons vu dans la démonstration précédente que $id - T$ est inversible et que son inverse est donné par

$$(id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \pi_s - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} \pi_u.$$

avec π_s, π_u les projecteurs sur B_s, B_u . On peut déduire de ce résultat un théorème de point fixe pour les applications proches d'une application linéaire hyperbolique.

Théorème 9 *Soit B un espace de Banach, $T : B \rightarrow B$ une application linéaire hyperbolique et $F : B \rightarrow B$ une application continue. On suppose que $F - T$ est lipschitzienne, de constante de Lipschitz suffisamment petite. Alors F a un unique point fixe.*

Démonstration

Le vecteur $g \in B$ est point fixe pour F si et seulement s'il satisfait

$$(F - T)(g) = (id - T)(g)$$

Nous avons vu que $id - T$ est inversible, il faut donc trouver un point fixe pour l'application $(id - T)^{-1}(F - T)$. Cette application est contractante dès que $(F - T)$ a une constante de Lipschitz plus petite que $\|(id - T)^{-1}\|^{-1}$, Nous obtenons l'existence du point fixe g et la convergence

$$\left((id - T)^{-1}(F - T) \right)^n (0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

grâce au théorème du point fixe de Banach.

5. Expansivité

Les raisonnements précédents permettent de démontrer une propriété générale des ensembles hyperboliques.

Théorème 10 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme et Λ un ensemble hyperbolique. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Lambda$,*

$$\text{si } d(\varphi^k(x), \varphi^k(y)) < \varepsilon \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}, \text{ alors } x = y.$$

Une application qui vérifie la propriété précédente est dite *expansive* sur Λ .

Le théorème se démontre en utilisant la décomposition $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$ donnée dans la définition d'un ensemble hyperbolique et en introduisant les cônes $C_x^s, C_x^u \subset T_x M$

$$C_x^s = \{v \in T_x M \mid \|v_s\| \geq \|v_u\|\}, \quad C_x^u = \{v \in T_x M \mid \|v_s\| \leq \|v_u\|\}.$$

avec v_s, v_u les composantes de v selon E_x^s et E_x^u . On montre comme précédemment qu'ils sont invariants par la différentielle de φ et on raisonne dans des cartes locales pour montrer la dilatation des distances en temps positif ou négatif.

Ces cônes permettent également de montrer que les difféomorphismes Anosov forment un ensemble ouvert dans l'ensemble de toutes les applications C^1 de M dans M .

Proposition 7 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Anosov. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M$ satisfaisant $d_{C^1}(\varphi, \psi) < \varepsilon$ est Anosov.*

6. Exercices

Exercice 1

Soit $C > 0$, $\lambda \in [0,1[$ et A une matrice $d \times d$ telle que

$$\forall v \in \mathbf{R}^d, \forall n \in \mathbf{N}, \|A^n v\| \leq C \lambda^n \|v\|.$$

Montrer qu'il existe une norme sur \mathbf{R}^d telle que $\|A\| < 1$. On pourra chercher cette norme sous la forme $\|v\|' = \sum_{k=0}^m \rho^{-k} \|A^k v\|$ pour un ρ et un m bien choisis.

Exercice 2

Dans la définition d'un ensemble hyperbolique, montrer que, quitte à changer de métrique riemannienne sur la variété, on peut s'arranger pour que $\|d_x \varphi|_{E_x^s}\| < 1$ pour tout x dans l'ensemble hyperbolique.

Automorphismes du tore

Exercice 3

Montrer que les points de coordonnées rationnelles du tore \mathbf{T}^d sont des points périodiques pour les automorphismes hyperboliques de \mathbf{T}^d .

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, donner un exemple d'un automorphisme hyperbolique du tore \mathbf{T}^2 ayant exactement n points fixes. Donner un exemple d'un automorphisme hyperbolique du tore \mathbf{T}^2 ayant pour points fixes $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ et $(1/2, 1/2)$.

Exercice 5

On considère l'application du chat d'Arnold. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{T}^2$, $W^s(x) \cap W^u(y) \neq \emptyset$. En déduire qu'il existe un point du tore dont l'orbite converge vers 0 pour les temps négatifs et dont l'orbite positive est dense.

Propriétés ergodiques

Exercice 6

Peut-on trouver un exemple de matrice 3×3 à coefficients entiers de déterminant 1 qui n'est pas hyperbolique, mais dont l'action sur le tore \mathbf{T}^3 est mélangeante? Même question dans le cas 4×4 .

Exercice 7

Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace probabilisé et $T : X \rightarrow X$ une application mesurable qui préserve la mesure μ . Montrer que si μ est mélangeante relativement à T , elle est ergodique relativement à toutes les applications T^k , $k \geq 1$.

Exercice 8

Soit $\varphi : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{T}^d$ un automorphisme hyperbolique du tore. Considérons $H_0 \subset L^2(\mathbf{T}^d, \lambda_{\mathbf{T}^d}, \mathbf{C})$ le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle. Montrer que l'opérateur $U_0 : H_0 \rightarrow H_0$ donné par $g \mapsto g \circ \varphi$ n'a pas de valeurs propres.

Chapitre 3

Difféomorphismes Axiome A

La notion de difféomorphisme Axiome A est introduite par S. Smale dans les années soixante. Un tel difféomorphisme est uniformément hyperbolique en restriction à son ensemble non-errant, rappelons la définition de cet ensemble.

L'ensemble non errant Ω d'une application $\varphi : X \rightarrow X$ est défini par

$$\Omega = \{x \in X \mid \forall U \text{ contenant } x, \exists n_i \rightarrow \infty \text{ tel que } \varphi^{n_i}(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Cet ensemble est un fermé invariant qui contient les orbites périodiques de φ .

Définition 7 *Un difféomorphisme de classe C^k défini sur une variété compacte connexe M est dit Axiome A si son ensemble non errant Ω est hyperbolique et si ses points périodiques sont denses dans Ω .*

Nous verrons que les difféomorphismes Anosov sont Axiome A. On s'attend donc à avoir des résultats analogues à ceux que nous venons de décrire.

1. Propriétés

Le théorème suivant est un résultat majeur dans la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques.

Théorème 11 (stabilité structurelle) *Soit M une variété riemannienne compacte connexe et $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 . Alors φ est structurellement stable si et seulement s'il est Axiome A et satisfait la condition de transversalité forte.*

Nous expliquerons dans la suite la signification de cette condition de transversalité forte, une fois introduites les notions de variétés stables et instables.

Tout comme les difféomorphismes Anosov, les difféomorphismes Axiome A admettent un codage par un décalage de type fini.

Théorème 12 (modèle symbolique) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Axiome A de classe C^1 . Alors il existe une matrice carrée A et une application continue surjective $h : \Sigma_A \rightarrow M$ qui satisfait $h \circ \varphi = \sigma \circ h$.*

En général, un difféomorphisme Axiome A n'est pas transitif, mais on peut décomposer son ensemble non errant en un nombre fini de compacts invariants en restriction desquels on a transitivité. Pour énoncer ce théorème de décomposition, introduisons deux notions.

Un sous-ensemble compact invariant $\Lambda \subset M$ est dit *localement maximal* s'il existe un ouvert U contenant Λ tel que $\Lambda = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^k(U)$.

Théorème 13 (décomposition spectrale) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Axiome A et Ω son ensemble non errant. Alors il existe une décomposition de Ω en un nombre fini $m \geq 1$ de sous-ensembles disjoints invariants*

$$\Omega = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$$

tels que pour chaque i ,

- l'ensemble Λ_i est un compact hyperbolique localement maximal,
- φ est transitive en restriction à Λ_i ,
- il existe un compact $\Lambda'_i \subset \Lambda_i$ et $m_i \geq 1$ tel que $f^{m_i}(\Lambda'_i) = \Lambda'_i$, $f|_{\Lambda'_i}$ est topologiquement mélangeante et $\Lambda_i = \prod_{0 \leq k \leq m_i - 1} f^k(\Lambda'_i)$.

Un ensemble est dit *basique* s'il est invariant par le flot, localement maximal et si le flot est transitif en restriction à cet ensemble. L'ensemble non errant d'un difféomorphisme Axiome A se décompose en *ensembles basiques*. Il est transitif en restriction à Ω si et seulement si cette décomposition ne comprend qu'un ensemble basique.

Considérons une mesure de probabilité μ invariante par un difféomorphisme φ défini sur une variété compacte M . Le *bassin d'attraction* de la mesure est défini par

$$\mathcal{B}(\mu) = \left\{ x \in M \mid \forall f \in C^0, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu \right\}.$$

On note dans la suite λ_M le volume riemannien sur M .

Théorème 14 (mesures de Sinai-Ruelle-Bowen) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Axiome A de classe C^2 . Alors il existe un nombre fini de mesures ergodiques μ_i , $1 \leq i \leq m$, dites mesures SRB, dont les bassins coïncident chacun avec un ouvert U_i non vide de M à un ensemble λ_M -négligeable près et tels que l'union de tous ces bassins soit de λ_M -mesure totale.*

$$\lambda_M(\mathcal{B}(\mu_i) \setminus U_i) = 0, \quad \lambda_M(U_i \setminus \mathcal{B}(\mu_i)) = 0, \quad \lambda_M\left(M \setminus \bigcup_i \mathcal{B}(\mu_i)\right) = 0.$$

Ce résultat montre que pour λ_M -presque tout point $x \in M$ et toute fonction continue $f : M \rightarrow \mathbf{R}$, il existe un entier i tel que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_i.$$

Il permet donc de décrire le comportement asymptotique de presque toutes les orbites du système à l'aide d'un nombre fini de mesures.

2. Difféomorphismes sur les surfaces

L'exemple le plus simple de difféomorphisme uniformément hyperbolique est donné par une application linéaire $A : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ de déterminant non nul dont toutes les valeurs propres sont de module différent de 1. Une telle application linéaire est dite *hyperbolique*.

Nous avons vu qu'une telle application admet deux sous-espaces stables et instables notés E_s et E_u tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^d &= E_s \oplus E_u, \quad A(E_s) = E_s, \quad A(E_u) = E_u, \\ \|A|_{E_s}\| &< 1, \quad \|A|_{E_u}^{-1}\| < 1. \end{aligned}$$

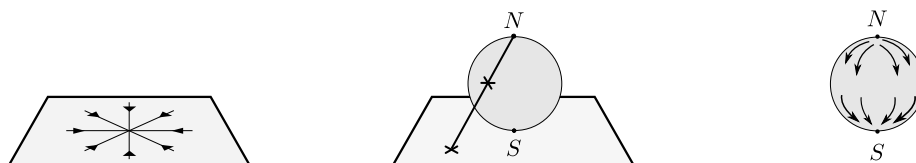
pour une norme bien choisie sur \mathbf{R}^d . L'ensemble non-errant de cette application est constituée de l'origine seulement, tous les autres points ayant une orbite partant à l'infini pour les temps positifs ou négatifs. Cet ensemble $\Omega = \{0\}$ est un ensemble hyperbolique avec pour décomposition $T_0\mathbf{R}^d = E_s \oplus E_u$.

Dynamique Nord-Sud

Pour construire un difféomorphisme Axiome A sur la sphère $S^2 \subset \mathbf{R}^3$, il suffit de partir de l'application $x \mapsto \frac{1}{2}x$ définie sur le plan \mathbf{R}^2 et de la transférer sur la sphère par le biais de la projection stéréographique à partir du pôle Nord N . Cette projection est donnée par

$$\begin{aligned} \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \mid \|x\|^2 + t^2 = 1\} &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x,t) &\mapsto \frac{2x}{1-t} \end{aligned}$$

On étend l'application à la sphère tout entière en envoyant le pôle Nord sur lui-même. Cette application fixe le pôle Sud S , son ensemble non errant est constitué des deux pôles Nord et Sud. Le Nord est un point fixe répulsif, le Sud un point fixe attractif. La projection stéréographique à partir du pôle Sud donne une carte autour du pôle Nord dans laquelle l'application coïncide avec $x \mapsto 2x$.



L'application obtenue est un difféomorphisme Axiome A de la sphère dont l'ensemble non errant est constitué du pôle Nord et du pôle Sud. Les distributions stables et instables sont données par

$$E_{Sud}^s = T_{Sud}S^2, E_{Sud}^u = \{0\}, E_{Nord}^s = \{0\}, E_{Nord}^u = T_{Nord}S^2.$$

Dynamique avec un point selle

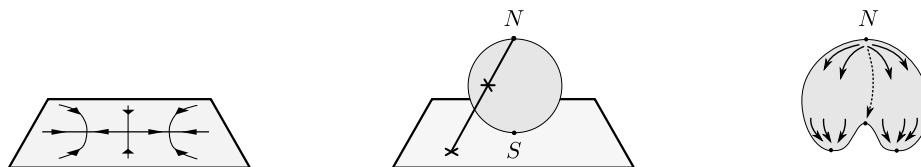
Construisons sur le plan une dynamique avec un point selle. Partons d'une application $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^1 qui satisfait

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } x \in [1/2, \infty], \\ 2x & \text{si } x \in [-1/4, 1/4], \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{si } x \in [-\infty, -1/2], \end{cases}$$

et définie ailleurs de façon à ce qu'elle soit strictement croissante sur \mathbf{R} . Considérons l'application du plan donnée par

$$(x, y) \mapsto (h(x), y/2).$$

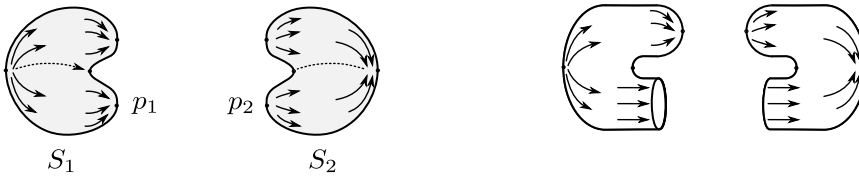
Elle possède deux points fixes attractifs $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. L'origine est un point selle. Les points sur l'axe des ordonnées convergent vers l'origine, tandis que les autres points convergent vers l'un des deux points attractifs. On relève cette application à la sphère pour obtenir un difféomorphisme Axiome A dont l'ensemble non errant est composé de quatre points fixes, un point répulsif, deux points attractifs et un point selle.



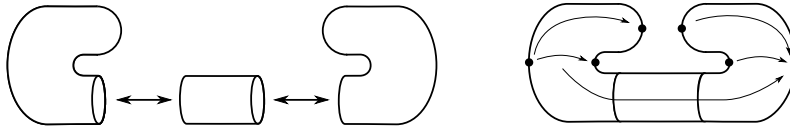
Nous avons construit un difféomorphisme Axiome A de la sphère dont l'ensemble non errant est composé de ces quatre points fixes. Le pôle Sud est un point selle dont les espaces stable et instable sont chacun de dimension 1. L'inverse de cette application est un difféomorphisme Axiome A possédant un point selle, un point attractif et deux points répulsifs.

Dynamique sur les surfaces

Considérons deux difféomorphismes φ_1 et φ_2 définis sur des surfaces S_1 et S_2 . On suppose que φ_1 possède un point fixe p_1 attractif et qu'il existe une carte locale U_1 autour de ce point dans laquelle φ_1 est de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}x$. On suppose également que φ_2 possède un point fixe p_2 répulsif de la forme $x \mapsto 2x$ dans une carte U_2 bien choisie. On peut par exemple prendre pour surfaces des sphères et pour φ_1 et φ_2 les difféomorphismes qu'on vient de construire ou leurs inverses.

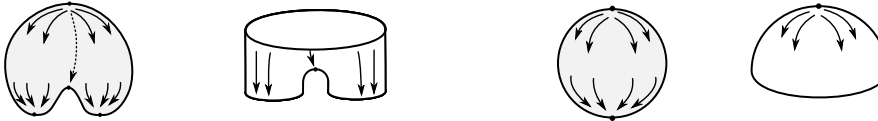


On peut construire une nouvelle surface à partir de S_1 et S_2 en supprimant des disques autour de p_1 et p_2 et en raccordant les deux surfaces à l'aide d'un cylindre joignant les deux trous. Plus précisément, on se place dans des systèmes de coordonnées polaires (r_1, θ_1) autour de p_1 et (r_2, θ_2) autour de p_2 . On supprime les deux disques $\{|r_1| \leq 1/4\}$, $\{|r_2| \leq 1/4\}$ et on raccorde les anneaux $\{1/4 < |r_1| < 1\}$, $\{1/4 < |r_2| < 1\}$ à l'aide de l'application $(r_2, \theta_2) = (4r_1^{-1}, \theta_1)$. Les applications φ_1 et φ_2 se correspondent par le biais de ce recollement et donnent un difféomorphisme φ de notre nouvelle surface.

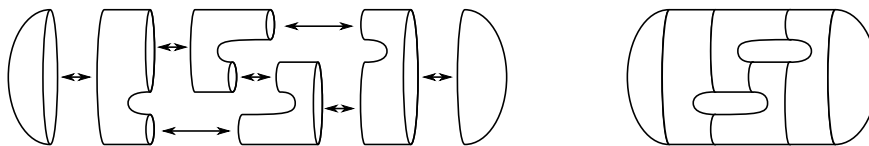


Si on part des applications que nous avons définies précédemment, on obtient un difféomorphisme Axiome A dont l'ensemble non-errant est égal à l'union des ensembles non-errants de φ_1 et φ_2 privés de p_1 et p_2 .

Dans l'exemple du difféomorphisme de la sphère comportant un point selle, supprimer des voisinages autour des points attractifs et répulsifs donne une surface à bords appelée *pantalon*.



En recollant des pantalons et des demi-sphères, on construit des exemples de difféomorphismes Axiome A ayant un ensemble non errant fini sur toute surface compacte orientable. Les ensembles basiques intervenant dans la décomposition spectrale sont les points fixes ou périodiques du difféomorphisme.

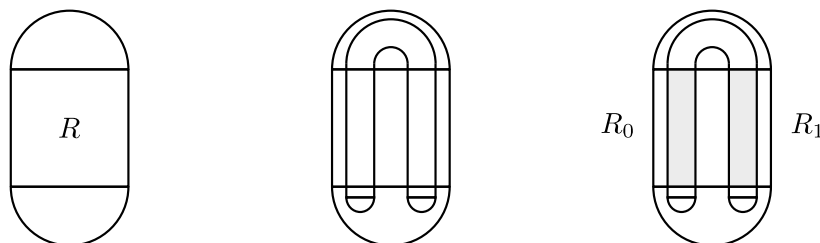


3. Le fer à cheval de Smale

Le fer à cheval de Smale est un difféomorphisme défini sur la sphère dont l'ensemble non errant est composé d'un point fixe attractif, d'un point fixe

répulsif et d'un ensemble compact invariant hyperbolique sur lequel la dynamique est conjuguée au décalage sur un alphabet à deux symboles. Ce compact est un ensemble de Cantor, il est totalement discontinu sans point isolé.

Pour le construire, on part d'un rectangle R dans le plan \mathbf{R}^2 . Ce rectangle est dilaté d'un facteur constant dans la direction verticale et contracté dans la direction horizontale, puis courbé de façon à couper R en deux rectangles R_0 et R_1 . Notons φ l'application obtenue, elle peut être étendue hors du rectangle R , par exemple en adjoignant deux demi-disques au dessus et en dessous de R . L'union de R et de ces deux demi-disques sera notée D . On s'arrange pour que les deux demi-disques soient contractés dans le demi-disque inférieur. De cette façon, tous les points dans les demi-disques ont une orbite qui converge vers l'unique point fixe se trouvant dans le demi-disque inférieur.



L'application φ envoie D dans lui-même, l'image de D est en forme de fer à cheval. Nous avons posé $R \cap \varphi(R) = R_0 \cup R_1$. L'ensemble

$$\Lambda = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^k(R)$$

est un compact invariant par φ , inclus dans $R_0 \cup R_1$. Les segments horizontaux et verticaux dans $\varphi^{-1}(R_0) \cup \varphi^{-1}(R_1)$ sont respectivement contractés et dilatés uniformément par φ . Le compact Λ est donc hyperbolique, avec comme distribution stable les droites horizontales et comme distribution instable les droites verticales. Étudions la dynamique de φ sur cet ensemble.

Proposition 8 *Le difféomorphisme $\varphi : D \rightarrow D$ possède un compact invariant hyperbolique Λ en restriction duquel il est conjugué au décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$.*

Démonstration

Nous construisons une semi-conjugaison entre φ et le décalage en posant

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow \{0,1\}^{\mathbf{Z}} \\ x &\mapsto \{\mathbf{1}_{R_1}(\varphi^k(x))\}_{k \in \mathbf{Z}} \end{aligned}$$

La suite $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ associée au point x est caractérisée par les relations

$$\varphi^k(x) \in R_{a_k} \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}.$$

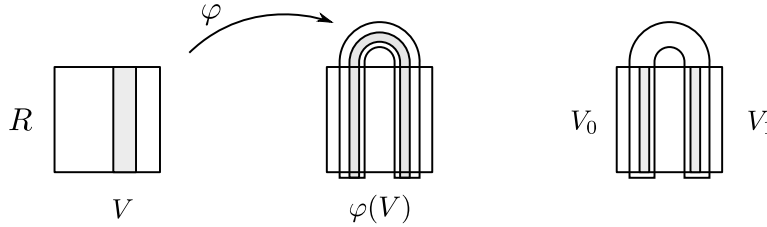
Cette application est continue car la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{R_1}$ est continue sur $\Lambda \subset R_0 \cup R_1$. Pour montrer que c'est une bijection, donnons-nous une suite $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ et vérifions que l'ensemble

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^{-k}(R_{a_k})$$

contient un seul point. L'application qui associe ce point à la suite (a_k) sera la réciproque de la semi-conjugaison.

Par construction, l'image par φ d'une bande verticale $V \subset R$ coupe le rectangle selon deux bandes verticales contenues dans R_0 et R_1 , et dont la largeur a été multipliée par un facteur de contraction $\lambda < 1$.

$$R \cap \varphi(V) = V_0 \cup V_1, \quad V_0 \subset R_0, \quad V_1 \subset R_1.$$



Montrons par récurrence que pour toute suite $(a_k)_{k \geq 0}$, l'intersection définie par $V_n = \bigcap_{k=0}^n \varphi^k(R_{a_k})$ est une bande verticale incluse dans R dont la largeur est de l'ordre de λ^n . C'est le cas pour $n = 0$. Supposons que cela soit vrai pour $\bigcap_{k=0}^n \varphi^k(R_{a_{k+1}})$. Alors

$$V_{n+1} = \bigcap_{k=0}^{n+1} \varphi^k(R_{a_k}) = R_{a_0} \cap R \cap \varphi\left(\bigcap_{k=0}^n \varphi^k(R_{a_{k+1}})\right)$$

est bien de la forme souhaitée.

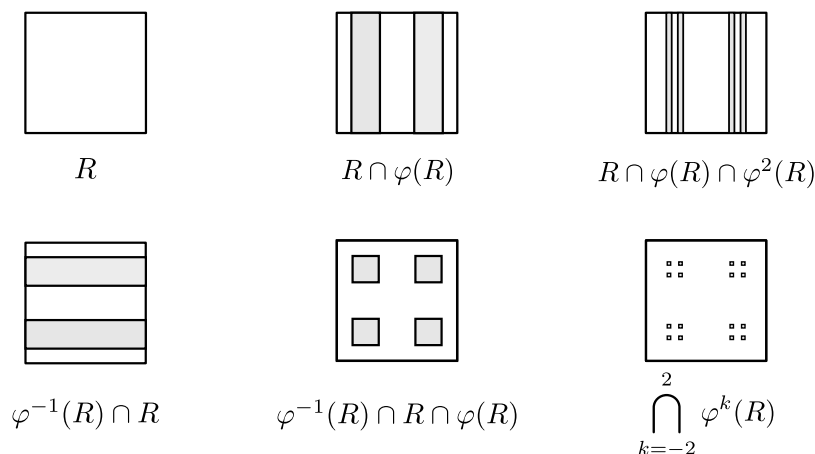
La projection des V_n sur l'axe des abscisses constitue une suite d'intervalles emboîtés dont la longueur tend vers zéro. L'intersection V_∞ est donc constituée d'un segment vertical reliant les deux bords horizontaux de R . En raisonnant de même avec φ^{-1} , on vérifie que $\bigcap_{k=0}^n \varphi^{-k}(R_{a_k})$ est un segment horizontal qui coupe le segment vertical en un point unique. La semi-conjugaison est donc une bijection entre deux espaces compacts, c'est un homéomorphisme. La proposition est démontrée.

Décrivons la dynamique de $\varphi : D \rightarrow D$ plus en détail. Posons

$$R = I \times J, \quad \pi_1 : R \rightarrow I, \quad \pi_2 : R \rightarrow J,$$

avec $I, J \subset \mathbf{R}$ et π_1, π_2 les projections verticales et horizontales associées. Le compact invariant hyperbolique $\Lambda \subset R$ est le produit cartésien $C_1 \times C_2$ de deux ensembles de Cantor donnés par

$$C_1 = \pi_1\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \varphi^k(R)\right) \quad \text{et} \quad C_2 = \pi_2\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \varphi^{-k}(R)\right).$$



Notons p le point attractif se trouvant dans le demi-disque inférieur.

Proposition 9

$$\forall x \in I \times C_2, \quad d(\varphi^n(x), \Lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\forall x \in D \setminus I \times C_2, \quad d(\varphi^n(x), p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration

Les segments horizontaux inclus dans $I \times C_2$ rencontrent tous Λ et sont contractés par φ . Si x est sur un tel segment et y est un point de Λ sur le même segment, la distance entre leurs itérés positifs tend vers 0. Comme ceux de y sont tous dans Λ , la distance des itérés de x à Λ tend vers 0.

Par construction, les points dans les deux demi-disques constituant $D \setminus R$ ont une orbite qui converge vers p . Les égalités suivantes

$$D \setminus I \times C_2 = D \setminus \bigcap_{k \geq 0} \varphi^{-k}(R) = \bigcup_{k \geq 0} \varphi^{-k}(D \setminus R)$$

montrent que tous les points de D qui ne sont pas sur $I \times C_2$ ont un itéré dans $D \setminus R$, leurs orbites convergent donc vers le point fixe attractif p . La proposition est démontrée.

Pour obtenir un difféomorphisme défini sur une surface compacte, on positionne D sur la sphère S^2 à l'aide d'une projection stéréographique et on étend φ à la sphère toute entière en plaçant une dynamique correspondant à un point répulsif hors de D .

Nous avons construit un difféomorphisme Axiome A de la sphère dont l'ensemble non errant est composé d'un point fixe répulsif, d'un point fixe attractif et d'un ensemble de Cantor invariant en restriction auquel la dynamique est conjuguée au décalage sur un alphabet à deux symboles. En recollant de tels exemples, on construit des difféomorphismes Axiome A sur

les surfaces dont l'ensemble non-errant est composé de points fixes et de plusieurs ensembles de Cantor invariants. La décomposition spectrale du difféomorphisme comporte plusieurs ensembles basiques homéomorphes à des ensembles de Cantor.

4. Intersections homoclines

L'exemple du fer à cheval illustre un phénomène général concernant les difféomorphismes possédant un point homoclinique transverse. Pour définir cette notion, introduisons la *variété stable* d'un point $x \in M$. Elle est composée des points dont l'orbite est asymptotique à celle de x .

$$W^s(x) = \{y \in M \mid d(\varphi^n(y), \varphi^n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

Le concept est général et vaut pour toute application définie sur un espace métrique. Lorsque l'application est inversible, on définit également la *variété instable* du point x , il s'agit de la variété stable de x relativement à φ^{-1} .

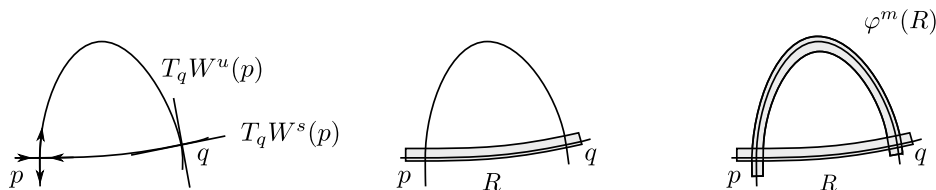
$$W^u(x) = \{y \in M \mid d(\varphi^{-n}(y), \varphi^{-n}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

Un point périodique p de période n d'un difféomorphisme est dit *hyperbolique* si la différentielle $d_p \varphi^n$ est une application linéaire hyperbolique, c'est-à-dire si ses valeurs propres sont toutes de module différent de 1. Lorsque φ est C^1 et que x est un point périodique hyperbolique, on montre que les variétés stables et instables sont des variétés immergées de classe C^1 tangentes en x aux sous-espaces stables et instables de $d_x \varphi$.

Définition 8 Soit M une variété différentielle. et $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme C^1 admettant un point périodique p . Un point q homocline à p est un point à l'intersection de la variété stable et de la variété instable de p . Il est transverse si les sous-espaces tangents à ces variétés en q sont transverses.

$$q \in W^s(p) \cap W^u(p), \quad T_q W^s(p) + T_q W^u(p) = T_q M.$$

La présence d'un point homoclinique transverse permet de construire un fer à cheval pour un itéré de la transformation. Considérons un rectangle disposé le long de la variété stable de p et contenant p et q . S'il est bien choisi, un de ses itérés va venir recouper le rectangle au voisinage de q tout en restant proche de la variété instable de p . La configuration est analogue à celle apparaissant dans la construction du fer à cheval de Smale.



Une fois correctement formalisée, cette heuristique conduit au théorème de Birkhoff-Smale.

Théorème 15 (Birkhoff-Smale) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme défini sur une variété M . Supposons que φ admette un point périodique hyperbolique p et un point homoclinique transverse q . Alors pour tout ouvert U contenant p et q , il existe un entier m pour lequel φ^m possède un ensemble hyperbolique Λ tel que*

- p, q sont dans Λ ,
- Λ est inclus dans U ,
- La restriction de φ^m à Λ est C^0 -conjuguée au décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$.

Rappelons que le décalage est transitif et qu'il possède une infinité d'orbites périodiques. On montre que tout difféomorphisme proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme ayant un point homoclinique transverse possède aussi un point homoclinique transverse, ce qui conduit au résultat suivant.

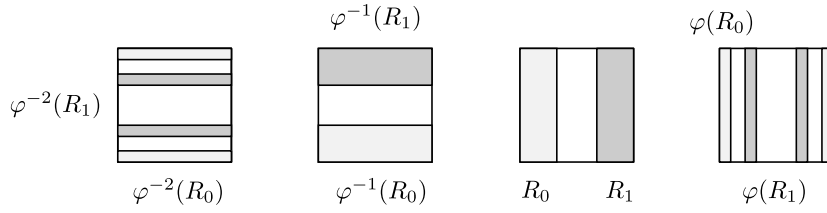
Corollaire 4 *Soit M une variété compacte et $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme ayant un point périodique hyperbolique p et un point homoclinique transverse q . Alors tout difféomorphisme C^1 -proche de φ admet une infinité d'orbites périodiques.*

En particulier, un système possédant un point homoclinique transverse ne peut pas être approché en topologie C^1 par un difféomorphisme ayant un nombre fini de points périodiques.

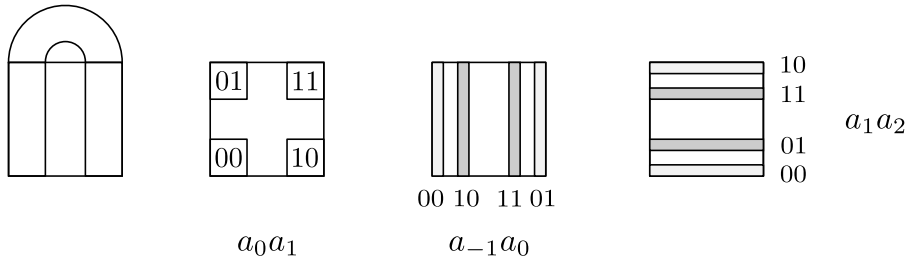
5. Compléments

5.1 Codage du fer à cheval

Les diagrammes suivant représentent les images et préimages des rectangles R_0 et R_1 dans la construction du fer à cheval de Smale et leurs intersections.



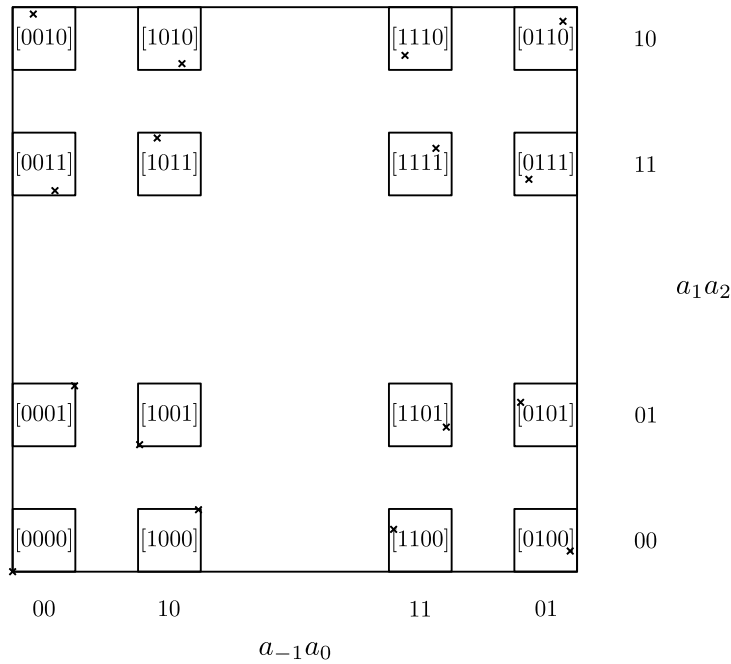
Voici les rectangles associés aux codes $a_0 a_1$, $a_{-1} a_0$ et $a_1 a_2$.



Voici les seize rectangles

$$[a_{-1} a_0 a_1 a_2] = \varphi(R_{a_{-1}}) \cap R_{a_0} \cap \varphi^{-1}(R_{a_1}) \cap \varphi^{-2}(R_{a_2}).$$

Les croix correspondent aux points périodiques de période quatre.



5.2 Points périodiques du fer à cheval

Étudions les points périodiques du fer à cheval. Partons des rectangles

$$R = [0,1] \times [0,1], \quad R_0 = [0,1/3] \times [0,1], \quad R_1 = [2/3,1] \times [0,1],$$

qui correspondent aux diagrammes de la section précédente. Prenons l'application φ affine sur les rectangles $\varphi^{-1}(R_0)$ et $\varphi^{-1}(R_1)$.

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} (\frac{x_1}{3}, 3x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in \varphi^{-1}(R_0), \\ (1 - \frac{x_1}{3}, 3 - 3x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in \varphi^{-1}(R_1). \end{cases}$$

Calculer les points périodiques revient à résoudre un système d'équations linéaires. Posons

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$ et (x,y) un point satisfaisant $\varphi^k(x,y) \in R_{a_k}$ pour $0 \leq k \leq n$. Ses itérés sont donnés par

$$\begin{pmatrix} \varphi^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} = M_{a_n} \dots M_{a_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule permet le calcul des points périodiques. On peut par exemple calculer ceux de période 4, ils sont associés aux codes suivants.

a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2	a_3	période	coordonnées
	0	0	0	0	0	0	0	1	$(0,0)$
	0	1	0	1	0	1	0	2	$(\frac{9}{10}, \frac{3}{10})$
	1	0	1	0	1	0	1	2	$(\frac{3}{10}, \frac{9}{10})$
	1	0	0	0	0	0	1	4	$(\frac{27}{82}, \frac{9}{82})$
	0	0	0	0	1	0	1	4	$(\frac{9}{82}, \frac{27}{82})$
	0	0	1	0	1	0	0	4	$(\frac{3}{82}, \frac{81}{82})$
	0	1	0	1	0	0	0	4	$(\frac{81}{82}, \frac{3}{82})$
	1	0	0	0	1	1	0	4	$(\frac{9}{40}, \frac{9}{40})$
	0	0	1	1	1	0	0	4	$(\frac{3}{40}, \frac{27}{40})$
	0	1	1	0	0	1	0	4	$(\frac{39}{40}, \frac{39}{40})$
	1	1	0	0	1	0	1	4	$(\frac{27}{40}, \frac{3}{40})$
	1	0	1	1	1	1	0	4	$(\frac{21}{82}, \frac{63}{82})$
	0	1	1	1	1	0	0	4	$(\frac{75}{82}, \frac{57}{82})$
	1	1	1	0	1	1	0	4	$(\frac{57}{82}, \frac{75}{82})$
	1	1	0	1	0	1	1	4	$(\frac{63}{82}, \frac{21}{82})$
	1	1	1	1	1	1	1	1	$(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

6. Exercices

Exercice 1

Montrer qu'un compact Λ est localement maximal si et seulement s'il existe un ouvert U contenant Λ tel que le seul compact invariant Λ' satisfaisant $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ est égal à Λ .

Exercice 2

Soit X un espace métrique séparable complet, $\varphi : X \rightarrow X$ une application continue. Montrer que le mélange topologique de φ implique sa transitivité.

Ensemble non errant

Exercice 3

Soit $\varphi : X \rightarrow X$ une application continue définie sur un espace métrique compact X et Ω son ensemble non errant. Montrer que pour tout $x \in X$,

$$d(\varphi^n(x), \Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donner un exemple d'application sur un espace non compact pour laquelle cette convergence n'est pas vraie.

Exercice 4

Soit $v \in \mathbf{T}^d$. À quoi est égal l'ensemble non-errant de l'application $x \mapsto x + v$ définie de \mathbf{T}^d dans \mathbf{T}^d ?

Exercice 5

Donner un exemple de difféomorphisme de S^2 dont l'ensemble non errant est réduit à un point.

Fer à cheval

Exercice 6

Montrer que dans l'exemple du fer à cheval, on peut positionner $\varphi(R)$ relativement à R de telle sorte que l'ensemble hyperbolique Λ soit de la forme $C \times C$, avec C l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 7

Construire un fer à cheval tel que la dynamique sur l'ensemble hyperbolique Λ est conjuguée au décalage sur un alphabet à trois symboles.

Exercice 8

On considère la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ agissant sur \mathbf{T}^2 . Montrer qu'il n'existe pas de compact invariant sur lequel la dynamique est conjuguée au décalage sur un alphabet à deux symboles.

Exercice 9

L'application de Hénon est définie sur le plan \mathbf{R}^2 par $(x, y) \mapsto (a - by - x^2, x)$. Prenons $a = 5.1$, $b = 0.3$, $r = 3$. Montrer que le rectangle $R = [-r, r] \times [r, r]$ a une image positionnée en fer à cheval.

Chapitre 4

Flots d'Anosov

Un *flot* $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ défini sur un espace métrique M est la donnée d'une application continue

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

satisfaisant pour tout $x \in M$ et $s, t \in \mathbf{R}$, $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$,

Lorsque M est une variété différentielle et que cette application est de classe C^k , on dit que le flot est de classe C^k . Il lui est alors naturellement associé un champ de vecteurs

$$X(x) = \left. \frac{d\varphi_t}{dt}(x) \right|_{t=0}.$$

Réciproquement, tout champ de vecteurs de classe C^1 défini sur une variété différentielle compacte est associé à un flot solution de l'équation différentielle

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=t_0} = X(\varphi_{t_0}(x)).$$

C'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les notions d'*orbite*, de *transitivité*, de *mélange topologique*, d'ensemble invariant et de mesure invariante, *ergodique* ou *mélangeante* se définissent pour les flots comme pour les difféomorphismes, en substituant au temps discret $n \in \mathbf{N}$ et aux itérés $\{\varphi^n\}_{n \geq 0}$ de la transformation un temps continu $t \in \mathbf{R}_+$ et les trajectoires $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ du flot dans les définitions. Introduisons une classe d'ensembles qui joue pour les flots un rôle analogue aux ensembles hyperboliques pour les difféomorphismes.

Définition 9 Soit M une variété riemannienne de classe C^k et $\varphi_t : M \rightarrow M$ un flot de classe C^k associé à un champ de vecteurs X . Un sous-ensemble $\Lambda \subset M$ est dit hyperbolique s'il est compact, invariant par φ_t , s'il existe des constantes $C > 0$, $\lambda > 0$ et pour tout $x \in \Lambda$ des espaces vectoriels $E_x^s \subset T_x M$, $E_x^u \subset T_x M$ tels que

- $T_x^1 M = E_x^s \oplus \mathbf{R}X(x) \oplus E_x^u$,
- $\forall t \in \mathbf{R}$, $d_x \varphi_t(E_x^s) = E_{\varphi_t(x)}^s$, $d_x \varphi_t(E_x^u) = E_{\varphi_t(x)}^u$,
- $\forall v \in E_x^s$, $\forall t \geq 0$, $\|d_x \varphi_t(v)\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|$,
- $\forall v \in E_x^u$, $\forall t \geq 0$, $\|d_x \varphi_t(v)\| \geq C e^{\lambda t} \|v\|$.

Toutes les métriques riemanniennes sur Λ sont équivalentes, changer de métrique modifie la constante C sans modifier λ . Les métriques pour lesquelles $C = 1$ sont dites *adaptées*. Il existe toujours des métriques adaptées.

Lorsque Λ est un ensemble hyperbolique sur Λ , On dit que le flot φ_t est *uniformément hyperbolique* en restriction à Λ . L'uniformité fait référence aux constantes C et λ qui ne dépendent pas du point $x \in \Lambda$. Les familles $\{E_x^s\}_{x \in \Lambda}$ et $\{E_x^u\}_{x \in \Lambda}$ sont appelées respectivement *distributions stables et instables*, elles dépendent continûment du point x .

Tout comme pour les difféomorphismes, il existe deux classes importantes de flots uniformément hyperboliques, les flots d'Anosov et les flots Axiome A. On retrouve des résultats analogues à ceux énoncés pour les difféomorphismes : stabilité structurelle, codage et ergodicité.

1. Propriétés

Définition 10 *Un flot de classe C^k , $k \geq 1$, défini sur une variété compacte connexe M est dit Anosov si M est un ensemble hyperbolique.*

La notion de stabilité structurelle pour les flots fait appel à la notion d'équivalence orbitale. On pourrait vouloir conjuguer deux flots φ_t et ψ_t par un homéomorphisme de M pour tout temps t . Il s'avère que cette notion est trop restrictive en pratique. Notons par \mathcal{O}_x^φ l'orbite de x sous l'action de φ , $\mathcal{O}_x^\varphi = \{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

Définition 11 *Un homéomorphisme $h : M \rightarrow M$ est une équivalence orbitale entre deux flots φ_t et ψ_t si elle satisfait pour tout x , $h(\mathcal{O}_x^\varphi) = \mathcal{O}_{h(x)}^\psi$.*

Un flot φ est dit *structurellement stable* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout flot ψ satisfaisant $d_{C^1}(\varphi, \psi) < \varepsilon$, il existe une équivalence orbitale entre φ et ψ .

Théorème 16 (stabilité structurelle) *Les flots d'Anosov de classe C^1 sont structurellement stables.*

La construction de modèles symboliques pour les flots d'Anosov fait appel à la notion de suspension. Expliquons comment suspendre une application continue T définie sur un espace métrique X . Partons d'une application continue $r : X \rightarrow]0, \infty[$ appelée fonction plateau et considérons la relation d'équivalence sur $X \times \mathbf{R}$ engendrée par

$$(x, t) \sim (T(x), t - r(x)).$$

L'espace X^r est le quotient de $X \times \mathbf{R}$ par cette relation d'équivalence. Le flot de translation $x \mapsto x + t$ sur $X \times \mathbf{R}$ passe au quotient pour donner un flot sur X^r appelé flot de suspension.

$$X^r = X / \sim, \quad T_t^r(x) = (x + t).$$

L'application de premier retour sur la base $X \times \{0\} \subset X^r$ est donnée par T .

Les flots d'Anosov admettent des modèles symboliques qui proviennent d'une suspension d'un décalage de type fini. Soit $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ un décalage de type fini et $r : \Sigma_A \rightarrow]0, \infty[$ une fonction plateau. On note le flot suspendu par $\sigma_t^r : \Sigma_A^r \rightarrow \Sigma_A^r$.

Théorème 17 (modèle symbolique) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un flot d'Anosov de classe C^1 . Alors il existe une matrice carrée A , une fonction plateau $r : \Sigma_A \rightarrow]0, \infty[$ et une application continue surjective $h : \Sigma_A^r \rightarrow M$ qui satisfait $h \circ \sigma_t^r = \varphi_t \circ h$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A^r & \xrightarrow{\sigma_t^r} & \Sigma_A^r \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{\varphi_t} & M \end{array}$$

En général, un flot d'Anosov ne préserve pas de mesure absolument continue relativement au volume riemannien. Mais s'il préserve une telle mesure, celle-ci est ergodique.

Théorème 18 (ergodicité) *Soit $\varphi_t : M \rightarrow M$ un flot d'Anosov de classe C^2 préservant une mesure de probabilité absolument continue relativement au volume riemannien. Alors cette mesure est ergodique.*

La mesure n'est pas nécessairement mélangeante, contrairement au cas des difféomorphismes Anosov. On sait aussi construire des flots d'Anosov qui ne sont pas transitifs. À ce stade, on connaît de nombreux exemples de flots d'Anosov et aucune classification ne semble émerger, même en dimension 3.

Un flot est *Axiome A* si son ensemble non errant est hyperbolique et si les orbites périodiques sont denses dans cet ensemble. Il existe une théorie analogue pour ces flots.

L'exemple le plus simple de flot d'Anosov s'obtient en suspendant un difféomorphisme Anosov par une application de classe C^k . Un deuxième exemple de flot d'Anosov est le flot géodésique défini sur une variété compacte à courbure strictement négative. C'est son étude qui a amené D. V. Anosov à introduire les flots qui portent désormais son nom.

2. Le demi-plan de Poincaré

Le demi-plan de Poincaré est une surface simplement connexe à courbure négative constante égale à -1 . Nous en donnons une présentation élémentaire avant d'introduire la notion de flot géodésique sur cette variété et d'en étudier la dynamique.

2.1 Métrique hyperbolique

Le demi-plan de Poincaré est défini par

$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Soit $z = x + iy \in \mathbf{H}$, l'espace tangent $T_z\mathbf{H}$ est un espace vectoriel de dimension deux engendré par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$. La norme hyperbolique d'un vecteur $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \in T_z\mathbf{H}$ est définie par

$$\|v\|_z = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{\text{Im}(z)}.$$

Il est d'usage d'identifier le plan $T_z\mathbf{H}$ avec \mathbf{C} par l'intermédiaire de l'application $v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \mapsto v_1 + iv_2$. La norme devient $|dz|/\text{Im}(z)$, où $dz = dx + idy$. Le fibré tangent unitaire $T^1\mathbf{H}$ du demi-plan de Poincaré est l'ensemble de tous les vecteurs de norme 1 dans le fibré tangent $T\mathbf{H}$. Une base orthonormée (e_1, e_2) du plan tangent $T_z\mathbf{H}$ est donnée par

$$e_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Désignons par θ l'angle entre e_2 et v . Le fibré $T^1\mathbf{H}$ est paramétré par

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} & \rightarrow & T^1\mathbf{H} & \hookrightarrow & \mathbf{H} \times \mathbf{C} \\ (x, y, \theta) & \mapsto & (z, -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_2) & \mapsto & (x + iy, iye^{i\theta}) \end{array}$$

La *longueur hyperbolique* d'une courbe $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{H}$ est définie par

$$l(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2}}{c_2(t)} dt.$$

La *distance hyperbolique* entre deux points du demi-plan est la borne inférieure des longueurs de tous les chemins reliant ces deux points.

2.2 Isométries

Un difféomorphisme $\gamma : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ de classe C^1 est une *isométrie* du demi-plan s'il satisfait, pour tout $z \in \mathbf{H}$ et tout $v \in T_z\mathbf{H}$,

$$\|d_z \gamma \cdot v\|_{\gamma z} = \|v\|_z.$$

La longueur des courbes est préservée par une telle transformation. Ceci implique que la distance hyperbolique est invariante par les isométries :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{H}, \quad d(\gamma z_1, \gamma z_2) = d(z_1, z_2).$$

Faisons agir les homographies sur $T^1\mathbf{H}$ par l'intermédiaire de leurs différentielles. L'action de $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ sur $T^1\mathbf{H} \simeq \mathbf{H} \times \mathbf{C}$ est donnée par

$$(z, v) \mapsto (\varphi(z), d_z\varphi.v) \simeq (\varphi(z), \varphi'(z)v).$$

Théorème 19 *Les transformations homographiques $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et $ad - bc = 1$, sont des isométries de \mathbf{H} .*

Ces homographies agissent simplement transitivement sur $T^1\mathbf{H}$. Étant donnés deux vecteurs $v_1, v_2 \in T^1\mathbf{H}$, il existe une unique homographie envoyant v_1 sur v_2 .

Démonstration

Posons $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Les deux formules

$$dw = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} dz, \quad \text{Im}(w) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im}(z),$$

impliquent l'invariance de la norme hyperbolique, $\frac{|dw|}{\text{Im}(w)} = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$.

Définissons la rotation hyperbolique autour de i par

$$R_\theta(z) = \frac{\cos(\theta/2)z + \sin(\theta/2)}{-\sin(\theta/2)z + \cos(\theta/2)} = \frac{z + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)z}.$$

Cette transformation envoie le point i sur lui-même et agit comme une rotation d'angle θ sur l'espace tangent $T_i\mathbf{H}$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{H}$. L'homographie $z \mapsto R_\theta(z)y_0 + x_0$ envoie le vecteur unitaire e_2 avec point base i sur le vecteur dont le point base est z_0 et faisant un angle θ avec la direction verticale. La transitivité est démontrée. L'unicité est proposée en exercice.

2.3 Géodésiques

Soit I un intervalle réel non vide. Une *géodésique* est une courbe $c : I \rightarrow \mathbf{H}$ de vitesse constante, qui minimise la distance entre deux de ses points proches. En d'autres termes, pour tout $t \in I$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\forall s \in]t - \delta, t + \delta[, \quad l(c_{|s,t}) = d(c(s), c(t)).$$

Nous limitons notre attention aux géodésiques parcourues à vitesse unitaire : $\|c'(t)\|_{c(t)} = 1$ pour tout $t \in I$. Ceci entraîne l'égalité $d(c(s), c(t)) = |s - t|$ dès que $|s - t| < \delta$. Décrivons les géodésiques du demi-plan de Poincaré.

Théorème 20

Étant donnés $z \in \mathbf{H}$ et $v \in T_z^1\mathbf{H}$, il existe une unique géodésique partant de z tangente à v en z et définie pour tout $t \in \mathbf{R}$.

- Deux points distincts z_1, z_2 de \mathbf{H} sont joints par une unique géodésique. Il existe un seul $\ell > 0$ et une seule géodésique $c : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{H}$ tels que $c(0) = z_1$, $c(\ell) = z_2$ et $\|c'(0)\| = 1$.
- D'un point de vue géométrique, les géodésiques sont soit des demi-cercles dont le centre est situé sur l'axe réel, soit des lignes verticales.

Démonstration

Considérons une géodésique joignant deux points iy_1 et iy_2 , $y_1 < y_2$, situés sur l'axe imaginaire. Soit $c : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{H}$ une courbe telle que $c(0) = iy_1$ et $c(\ell) = iy_2$.

$$l(c) = \int_0^\ell \frac{\sqrt{c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2}}{c_2(t)} dt \geq \int_0^\ell \frac{\sqrt{c_2'(t)^2}}{c_2(t)} dt \geq \int_0^\ell \frac{c_2'(t)}{c_2(t)} dt = \ln(c_2(\ell)/c_2(0)).$$

L'égalité se produit si et seulement si $c_1'(t) = 0$ et $c_2'(t) \geq 0$ pour tout t , auquel cas $d(c(0), c(\ell)) = \ln(c_2(\ell)/c_2(0))$. La condition $\|c'\| = 1$ devient alors $c_2'(t)/c_2(t) = 1$, ce qui donne $c(t) = c(0)e^t$. Cette courbe est la seule géodésique allant de iy_1 à iy_2 et sa longueur est donnée par

$$d(iy_1, iy_2) = \ln(y_2/y_1) = \ell.$$

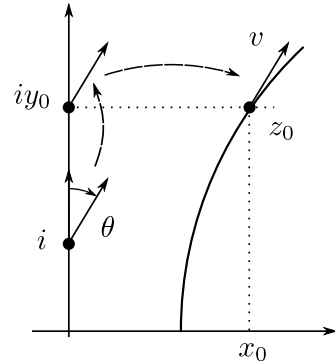
Le vecteur tangent à la géodésique est toujours vertical.

Montrons qu'il existe une unique géodésique partant de i tangente au vecteur vertical e_2 . Nous vérifions qu'une telle géodésique est bien contenue dans l'axe des ordonnées. Si ce n'est pas le cas, choisissons un point z_0 sur la géodésique en dehors de l'axe imaginaire, et envoyons ce point sur cet axe à l'aide de la rotation R_φ , où φ est tel que $\tan(\varphi) = \frac{2\operatorname{Re}(z_0)}{|z_0|^2 - 1}$. Cela donnerait une géodésique joignant deux points sur l'axe imaginaire, avec une tangente au point i qui n'est pas dans la direction verticale.

Soit maintenant $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{H}$ et $v \in T_{z_0}\mathbf{H}$ de telle sorte que l'angle entre la direction verticale ascendante et v est égal à θ . L'homographie $\gamma(z) = x_0 + R_\theta(z)y_0$ envoie $e_2 \in T^1\mathbf{H}$ sur v . Il s'agit d'une isométrie qui établit une correspondance entre les géodésiques partant de z_0 , tangentes à v et la géodésique verticale partant de i . Son équation est donnée par

$$t \mapsto x_0 + R_\theta(ie^t)y_0.$$

Il existe également une unique géodésique joignant deux points distincts de \mathbf{H} , on le démontre en envoyant ces points sur l'axe imaginaire à l'aide d'une homographie.



Enfin, une homographie peut s'écrire comme la composition d'une translation $z \mapsto z+w$, d'une homothétie $z \mapsto \lambda z$ et éventuellement d'une inversion $z \mapsto -1/z$. Ces transformations envoient les droites verticales et les cercles centrés sur l'axe réel, sur des courbes du même type. Le théorème est démontré.

3. Flot géodésique en courbure négative

Le flot géodésique associe à un vecteur unitaire du demi-plan de Poincaré son translaté le long de la géodésique issue de ce vecteur. Le demi-plan de Poincaré admet de nombreux quotients compacts ou de volume fini, le flot géodésique se définit de même sur ces quotients. Lorsque le quotient est compact, on obtient un flot d'Anosov qui préserve une mesure naturelle, associée à la métrique riemannienne du demi-plan. Nous allons nous intéresser aux propriétés ergodiques de ce flot et montrer son caractère mélangeant.

3.1 Flots géodésique et horocyclique

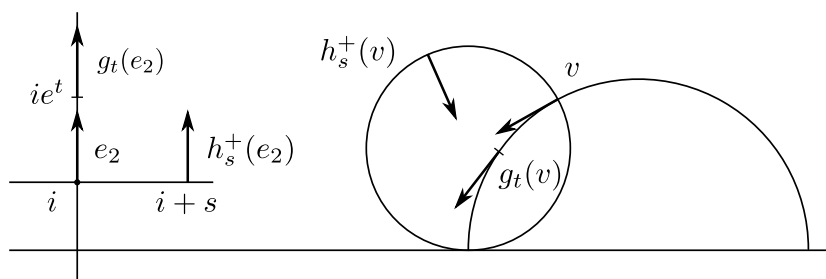
Définissons deux flots sur le demi-plan de Poincaré, en commençant par indiquer leurs actions sur le vecteur e_2 au point base i , qui a comme coordonnées $(0,1,0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Le vecteur e_2 est translaté par le flot g_t le long de la géodésique verticale jusqu'au point situé à distance t de i . Le flot h_s translate le vecteur e_2 le long de la droite horizontale passant par i .

$$g_t(0,1,0) = (0,e^t,0), \quad h_s^+(0,1,0) = (s,1,0).$$

Étendons ces flots à $T^1\mathbf{H}$ tout entier en utilisant la transitivité du groupe des homographies. Posons, pour toute homographie γ ,

$$g_t(\gamma(0,1,0)) = \gamma(g_t(0,1,0)) = \gamma(0,e^t,0),$$

$$h_s^+(\gamma(0,1,0)) = \gamma(h_s^+(0,1,0)) = \gamma(s,1,0).$$



Cette définition fait commuter les flots et les isométries,

$$g_t \circ \gamma = \gamma \circ g_t, \quad h_s^+ \circ \gamma = \gamma \circ h_s^+.$$

Notons $\pi : T^1\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ la projection canonique. Les projections sur \mathbf{H} des trajectoires issues du point de coordonnées (x,y,θ) s'expriment par

$$\pi(g_t(x,y,\theta)) = x + R_\theta(i e^t) y, \quad \pi(h_s(x,y,\theta)) = x + R_\theta(s + i) y.$$

Le flot $g_t : T^1\mathbf{H} \rightarrow T^1\mathbf{H}$ est appelé *flot géodésique*, il translate les vecteurs parallèlement le long des géodésiques, de façon à ce que le point base d'un vecteur et de son image par g_t soit à distance t l'un de l'autre. Ses orbites sont des géodésiques.

Le flot $h_s^+ : T^1\mathbf{H} \rightarrow T^1\mathbf{H}$ est appelé *flot horocyclique contractant*. Ses orbites sont appelées des *horocycles*, elles sont constituées de vecteurs basés en des droites verticales ou des cercles tangents à l'axe des abscisses.

Notons $I : T_z\mathbf{H} \rightarrow T_z\mathbf{H}$ l'antipodie qui associe à un vecteur de $T_z\mathbf{H}$ son opposé: $I(v) = -v$. C'est une involution: $I = I^{-1}$. Le flot géodésique satisfait la relation

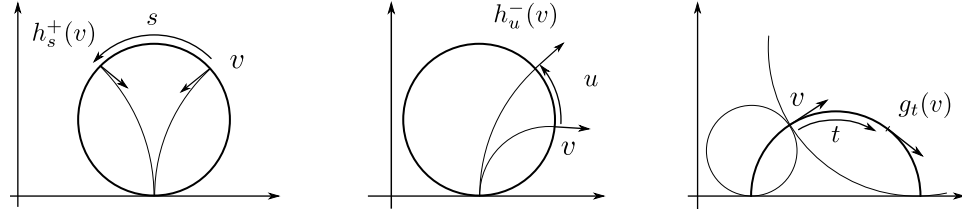
$$g_t \circ I = I \circ g_{-t}.$$



On définit un *flot horocyclique dilatant* $h_u^- : T^1\mathbf{H} \rightarrow T^1\mathbf{H}$ par l'expression

$$h_u^-(v) = I \circ h_u^+ \circ I.$$

Ses orbites sont dilatées par le flot géodésique: $g_t \circ h_u^- = h_{ue^t}^- \circ g_t$.



3.2 Mesure de Liouville

Nous définissons une mesure sur $T^1\mathbf{H}$ qui est invariante par le groupe d'isométrie de \mathbf{H} et par les flots géodésique et horocyclique. L'aire infinitésimale associée à la métrique riemannienne sur \mathbf{H} est donnée par la formule $dvol(x,y) = \frac{dx dy}{y^2}$.

Définition 12 La mesure de Liouville, de $T^1\mathbf{H}$ est la mesure définie par

$$d\mu(x,y,\theta) = \frac{dx dy d\theta}{y^2}$$

dans le système de coordonnées (x,y,θ) ,

Cette mesure est associée à la forme différentielle

$$\frac{1}{2i} \frac{d\bar{z}}{\operatorname{Im}(z)} \wedge \frac{dz}{\operatorname{Im}(z)} \wedge d\theta.$$

Nous avons vu précédemment comment se transformait la forme $dz/\operatorname{Im}(z)$ par l'action d'une homographie, un calcul similaire montre que la mesure μ est invariante par les isométries de $T^1\mathbf{H}$ et par les flots géodésiques et horocycliques.

L'espace $T^1\mathbf{H}$ est de mesure de Liouville infinie. Il admet par contre des quotients qui sont de mesure finie. Le théorème suivant remonte à Poincaré, il montre que toute surface compacte à courbure -1 peut être réalisée comme un quotient de $T^1\mathbf{H}$. Comme le quotient est compact, la mesure induite par la mesure de Liouville de $T^1\mathbf{H}$ est finie.

Théorème 21 (uniformisation des surfaces) *Soit S une surface connexe complète à courbure négative constante égale à -1 . Alors il existe un sous-groupe discret d'homographies Γ agissant sur \mathbf{H} et un difféomorphisme $h : S \rightarrow \mathbf{H}/\Gamma$ qui est une isométrie.*

La démonstration consiste à vérifier que l'application exponentielle de $T_{x_0}S$ dans S est un revêtement pour un point $x_0 \in S$ donné, du fait de la courbure négative. Un calcul explicite en coordonnées polaires permet d'identifier la métrique sur $T_{x_0}S$ obtenue à partir de celle de S à celle de \mathbf{H} .

Lorsque la surface est compacte, le groupe Γ admet un nombre fini de générateurs. Ces générateurs sont des homographies identifiant les côtés opposés d'un polygone bien choisi de \mathbf{H} . Ce polygone devient le domaine fondamental de l'action de Γ sur \mathbf{H} , ses images par le groupe Γ recouvrent le demi-plan et sont d'intérieurs disjoints.

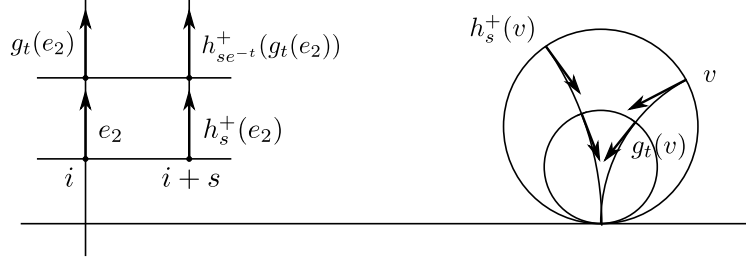
Lorsque la surface est de volume fini, le groupe Γ admet encore un nombre fini de générateurs, associés à un polygone ayant un ou plusieurs sommets à l'infini. Un exemple de surface à courbure constante négative d'aire finie mais non compacte est donné par la surface modulaire, présentée en complément.

3.3 Mélange du flot géodésique

On se donne un groupe discret d'homographies Γ tel que le quotient $X = T^1\mathbf{H}/\Gamma$ soit de volume fini. Les flots géodésique et horocyclique passent au quotient pour donner des flots sur X qui préservent la mesure de Liouville. On veut montrer que le flot géodésique $g_t : X \rightarrow X$ est mélangeant. La preuve repose sur des relations remarquables liant les trois flots présentés ci-dessus. Les deux premières affirment que les flots horocycliques h^+ et h^- sont contractés et dilatés par le flot géodésique.

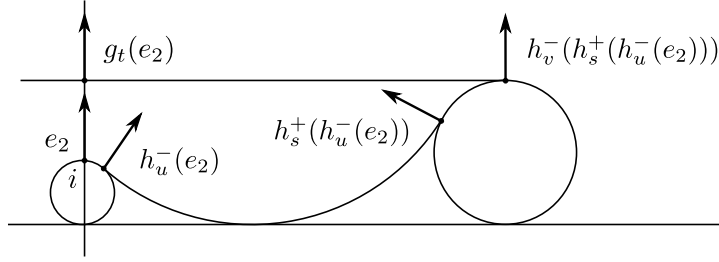
$$g_t \circ h_s^+ = h_{se^{-t}}^+ \circ g_t, \quad g_t \circ h_u^- = h_{ue^t}^- \circ g_t.$$

La première égalité se démontre pour le vecteur vertical e_2 basé en i par un calcul explicite. Elle se généralise ensuite à tous les vecteurs de $T^1\mathbf{H}$ en appliquant une isométrie. La seconde égalité se montre en inversant le temps.



Une troisième relation montre qu'on peut se déplacer le long d'une géodésique en suivant les flots horocycliques contractants et dilatants.

$$h_{\frac{s-1-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- = g_{2 \ln s}.$$



Ces relations se réduisent à des calculs avec des matrices dans le modèle algébrique du flot géodésique présenté dans la section suivante. Nous sommes en mesure de démontrer le mélange du flot géodésique.

Proposition 10 Soit $F \in L^2(X)$. Les valeurs d'adhérence faibles de la suite $(F \circ g_t)_{t>0}$ sont invariantes par h_s^+ , celles de $(F \circ g_t)_{t<0}$ sont invariantes par h_u^- .

Démonstration

Soit $\bar{F} \in L^2(X)$ et $t_i \rightarrow +\infty$ tels que $F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \bar{F}$. Il faut montrer que $\bar{F} \circ h_s^+ = \bar{F}$. La preuve repose sur l'égalité $g_t \circ h_s^+ = h_{se^{-t}}^+ \circ g_t$. Cette égalité implique :

$$\|F \circ g_t \circ h_s^+ - F \circ g_t\| = \|F \circ h_{se^{-t}}^+ \circ g_t - F \circ g_t\| = \|F \circ h_{se^{-t}}^+ - F\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On sait de plus que la suite $F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i}$ est faiblement convergente :

$$F \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - F \circ g_{t_i} \rightharpoonup \bar{F} \circ h_s^+ - \bar{F}.$$

Le résultat s'ensuit en identifiant les deux limites. Le cas des temps négatifs se traite de la même façon, en partant de l'égalité $g_{-t} \circ h_u^- = h_{ue^{-t}}^- \circ g_{-t}$.

Corollaire 5 (argument de Hopf) *Toute fonction invariante par g_t est invariante par h_s^+ et h_u^- .*

Proposition 11 *Toute fonction $F \in L^2(X)$ invariante par h_s^+ est invariante par g_t .*

Démonstration

Soit $s, \varepsilon > 0$. De la relation : $h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- = g_{2 \ln s}$, on déduit :

$$\begin{aligned} & \|F \circ g_{2 \ln s} - F\| \\ &= \|F \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - F\| \\ &= \|F \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - F \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- + F \circ h_{-\varepsilon/s}^- - F\| \\ &\leq \|F \circ h_{\varepsilon}^- - F\| + \|F \circ h_{\varepsilon/s}^- - F\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Théorème 22 (mélange du flot géodésique) *Soit Γ un sous-groupe discret d'homographies tel que le quotient $X = T^1\mathbf{H}/\Gamma$ soit de mesure de Liouville finie. Alors cette mesure, une fois renormalisée, est mélangeante relativement au flot géodésique $g_t : X \rightarrow X$.*

Le mélange du flot géodésique implique bien sûr son ergodicité.

Démonstration

Soit $F \in L^2(X)$ une fonction d'intégrale nulle. Par compacité faible, il suffit de démontrer que toute valeur d'adhérence faible \bar{F} de la suite $F \circ g_t$ est nulle presque partout. On a vu que \bar{F} est invariante par le flot h_s^+ , puis par les flots g_t et h_u^- .

Pour tout $s, t, u \in \mathbf{R}$, pour presque tout $v \in X$, $\bar{F}(h_s^+ \circ g_t \circ h_u^-(v)) = \bar{F}(v)$.

En appliquant le théorème de Fubini, on en déduit qu'il existe v_0 pour lequel

$$\text{pour presque tout } s, t, u \in \mathbf{R}, \bar{F}(h_s^+ \circ g_t \circ h_u^-(v_0)) = \bar{F}(v_0).$$

Tout vecteur $v \in X$ qui n'est pas asymptotique à v_0 est de la forme $h_s^+ \circ g_t \circ h_u^-(v_0)$ et l'application $(s, t, u) \mapsto h_s^+ \circ g_t \circ h_u^-(v_0)$ est un difféomorphisme C^1 de \mathbf{R}^3 sur son image, qui est de mesure totale. la fonction \bar{F} est constante presque partout sur T^1M , d'intégrale nulle, donc nulle presque partout.

4. Modèles non euclidiens

Il existe divers modèles des géométries euclidiennes. Le disque de Poincaré et le groupe $PSL_2(\mathbf{R})$ sont deux alternatives au demi-plan de Poincaré.

4.1 Le disque de Poincaré

Un modèle alternatif au demi-plan de Poincaré est le disque de Poincaré,

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

Il existe une unique homographie du demi-plan sur le disque envoyant le point i sur 0, le point 0 sur -1 et l'infini sur 1.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} & \rightarrow & \mathbf{D} \\ z & \rightarrow & \frac{z-i}{z+i} \\ -i \frac{w+1}{w-1} & \leftarrow & w \\ \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} & \leftrightarrow & 2 \frac{|dz|}{1-|z|^2} \end{array}$$

Au groupe des homographies préservant le demi-plan de Poincaré correspond le groupe des homographies préservant le disque. Elles sont de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{bz + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbf{C} \text{ tels que } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Du point de vue géométrique, les géodésiques du disque sont des droites ou des cercles orthogonaux au bord. Les géodésiques qui sont des droites sont celles qui passent par l'origine.

4.2 Le modèle algébrique

Construisons un modèle algébrique pour le fibré unitaire du demi-plan de Poincaré. Le groupe $PSL_2(\mathbf{R})$ est le groupe des matrices de taille 2×2 à coefficients réels, avec identification de deux matrices différant par un signe.

$$PSL_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1 \right\} / \{id, -id\}.$$

Posons $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Nous identifions $PSL_2(\mathbf{R})$ et $T^1\mathbf{H}$ en faisant correspondre à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le vecteur $(\gamma(i), d_i \gamma \cdot e_2)$.

$$\begin{aligned} \Psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= (\gamma(i), d_i \gamma \cdot e_2) \simeq (\gamma(i), \gamma'(i) i) \\ \Psi : PSL_2(\mathbf{R}) &\simeq T^1\mathbf{H} \simeq \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(\frac{ai+b}{ci+d}, \frac{i}{(ci+d)^2}\right) \mapsto \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{1}{c^2+d^2}, -2\text{Arg}(ci+d)\right) \end{aligned}$$

La matrice identité est envoyée sur le vecteur $e_2 \in T_i^1\mathbf{H}$ par Ψ . L'action à gauche de $PSL_2(\mathbf{R})$ sur elle-même est conjuguée à son action sur $T^1\mathbf{H}$ par homographies.

Décrivons l'action des flots géodésique et horocyclique dans ce modèle. Un bref calcul montre que la matrice

$$\Psi^{-1}(x, y, \theta) \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

est envoyée par Ψ sur le vecteur $(\gamma(i), d_i \gamma \cdot e_2)$, où $\gamma(z) = x + yR_\theta(e^t z)$. Rappelons que la projection sur \mathbf{H} de la géodésique partant de (x, y, θ) est donnée par l'équation $t \mapsto x + yR_\theta(ie^t)$. On voit que le vecteur $(\gamma(i), d_i \gamma \cdot e_2)$ est l'image de (x, y, θ) par le flot géodésique g_t . Ce flot est donc conjugué au produit à droite sur $PSL_2(\mathbf{R})$ par la matrice $\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \xrightarrow{\Psi} & (x, y, \theta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\Psi} & g_t(x, y, \theta) \end{array}$$

La matrice $\Psi^{-1}(x, y, \theta) \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est envoyée par Ψ sur le vecteur $(\gamma(i), d_i \gamma \cdot e_2)$, où $\gamma(z) = x + yR_\theta(z + s)$. Nous savons que la projection sur \mathbf{H} de l'horocycle contractant partant du point (x, y, θ) est donnée par l'équation $t \mapsto x + yR_\theta(s + i)$. Le flot h_s^+ est donc conjugué au produit à droite sur $PSL_2(\mathbf{R})$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul similaire montre que le flot h_u^- est conjugué au produit par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$.

Les flots géodésiques et horocycliques ont une expression particulièrement simple dans ce modèle. Les calculs les concernant se ramènent à des produits de matrices. On vérifie que la mesure de Liouville prend l'expression

$$d\mu(b, c, d) = 4 \frac{db \, dc \, dd}{d}$$

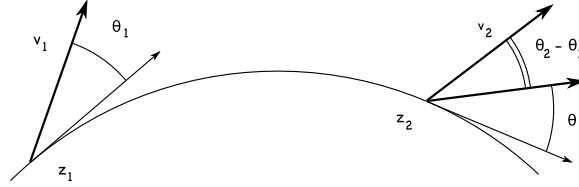
dans la carte $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid d > 0 \right\} \subset PSL_2(\mathbf{R})$. Il s'agit de la mesure de Haar du groupe $PSL_2(\mathbf{R})$, elle est invariante par l'action à gauche et à droite du groupe sur lui-même.

5. Compléments

5.1 Quotients du demi-plan de Poincaré

Expliquons comment munir un quotient de $T^1\mathbf{H}$ par un sous-groupe discret d'homographies d'une structure d'espace métrique. Commençons par définir une distance sur $T^1\mathbf{H}$ invariante par isométries comme suit. Soit v_1, v_2 deux vecteurs unitaires ayant pour points base z_1, z_2 . Soient θ_1, θ_2 les angles entre ces vecteurs et les vecteurs dont les points base sont z_1, z_2 , et tangents à la géodésique allant de z_1 à z_2 .

$$d(v_1, v_2) = d(z_1, z_2) + |\theta_1 - \theta_2|.$$



La distance entre deux vecteurs ayant le même point base z est simplement la distance angulaire sur $T_z^1\mathbf{H}$. La distance entre un vecteur et l'une de ses images par le flot géodésique est la distance entre leurs points base.

Rappelons qu'un groupe Γ est *discret* si pour toute suite $g_n \in \Gamma$ convergeant vers l'identité, il existe un entier n_0 tel que $g_n = id$ pour tout $n \geq n_0$.

Lemme 4 Soit v un élément de $T^1\mathbf{H}$ et γ_n une suite d'homographies. Si $d(v, \gamma_n(v))$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, alors la suite γ_n converge vers l'identité.

Démonstration

On peut supposer que v coïncide avec le vecteur e_2 , au point base i . Le cas général s'obtient par l'application d'une homographie envoyant e_2 sur v . Écrivons $\gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$ avec $a_n d_n - b_n c_n = 1$.

$$Im(\gamma_n(i)) = \frac{1}{c_n^2 + d_n^2}, \quad |\gamma_n(i)|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2}, \quad Arg(\gamma_n'(i)) = -2Arg(c_n i + d_n).$$

Ceci implique $c_n^2 + d_n^2 \rightarrow 1$, $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 1$, $c_n/d_n \rightarrow 0$ et le lemme s'ensuit.

Proposition 12 Soit Γ un sous-groupe discret d'homographies de \mathbf{H} . Pour tout $v \in T^1\mathbf{H}$, l'ensemble $\Gamma v = \{\gamma(v) \in T^1\mathbf{H} \mid \gamma \in \Gamma\}$ est fermé et discret.

Démonstration

Soit $\gamma_n \in \Gamma$ une suite telle que $\gamma_n v$ converge vers un certain vecteur $\tilde{v} \in T^1\mathbf{H}$.

$$d(\gamma_{n+1}^{-1} \gamma_n(v), v) = d(\gamma_n(v), \gamma_{n+1}(v)) \rightarrow 0.$$

On voit que la suite $\gamma_{n+1}^{-1}\gamma_n$ converge vers l'identité lorsque n tend vers l'infini. On a donc $\gamma_{n+1} = \gamma_n$ pour n grand, et la limite \tilde{v} est égale à $\gamma_n v$. La proposition est démontrée.

Définissons maintenant une métrique sur l'espace quotient $T^1\mathbf{H}/\Gamma$. Pour tout $v \in T^1\mathbf{H}$, l'ensemble $\Gamma v - \{v\}$ est fermé car Γv est à la fois fermé et discret. Cela entraîne

$$\forall v \in T^1\mathbf{H}, \quad d(v, \Gamma v - \{v\}) > 0.$$

Soit $r = d(v, \Gamma v - \{v\})/2$, on a la relation $d(v', v) = d(v', \Gamma v)$ pour tout $v' \in B(v, r)$. Nous avons prouvé le résultat suivant.

Théorème 23 *Soit Γ un groupe discret d'homographies de \mathbf{H} . La formule*

$$d(v', v) = d(v', \Gamma v) = \inf\{d(v', \gamma(v)) \mid \gamma \in \Gamma\} \quad \text{pour } v, v' \in T^1\mathbf{H},$$

induit une métrique sur l'espace quotient $T^1\mathbf{H}/\Gamma$. La projection $\pi : T^1\mathbf{H} \rightarrow T^1\mathbf{H}/\Gamma$ est une isométrie locale : tous les vecteurs $v \in T^1\mathbf{H}$ ont un voisinage sur lequel π est bijective et préserve la distance.

5.2 La surface modulaire

La surface modulaire est un exemple intéressant de surface à courbure négative constante de volume fini. Elle est construite à partir du sous-groupe Γ des homographies à coefficients entiers.

$$\Gamma = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

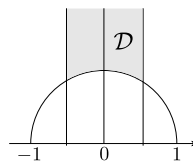
Ce groupe opère sur \mathbf{H} par isométries. L'espace quotient a pour domaine fondamental

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbf{H} \mid |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Proposition 13

- Si $\gamma \neq id$, alors $\gamma(\mathcal{D}) \cap \mathring{\mathcal{D}} = \emptyset$,

- $\mathbf{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{D})$.



Démonstration

Soit $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathcal{D}$. Posons $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, Nous avons $\text{Im}(\gamma(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

$$|cz+d|^2 = c^2|z|^2 + d^2 + 2cd\text{Re}(z) \geq c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq 1.$$

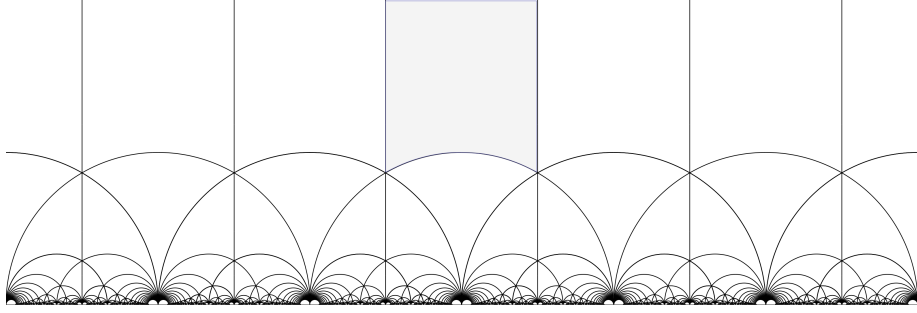
L'inégalité précédente est stricte si $c \neq 0$ et $z \in \mathring{\mathcal{D}}$. Cela montre que $\text{Im}(\gamma(z)) < \text{Im}(z)$ si γ n'est pas une translation. Si $\gamma(z)$ appartient à \mathcal{D} ,

le même argument s'applique à γ^{-1} et $\gamma(z)$ pour donner l'inégalité inverse $\text{Im}(z) \leq \text{Im}(\gamma(z))$, d'où une contradiction. L'ensemble $\gamma(\mathcal{D})$ ne rencontre donc pas l'intérieur de \mathcal{D} . Cette propriété est à nouveau vraie lorsque γ est une translation non triviale.

Montrons que tous les points de \mathbf{H} peuvent être envoyés vers \mathbf{H} en appliquant un élément de Γ . Tous les points $z \in \mathbf{H}$ satisfaisant $|\text{Re}(z)| \geq \frac{1}{2}$ et $\text{Im}(z) > \frac{1}{3}$ sont dans l'image de \mathcal{D} par l'une des trois transformations

$$z \mapsto -\frac{1}{z}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z}, \quad z \mapsto -\frac{1}{1+z}.$$

Lorsque la partie imaginaire de z est plus petite que $1/3$, nous appliquons la rotation $R_\pi: z \mapsto -\frac{1}{z}$ suivie d'une translation, de façon à envoyer le point dans la bande $|\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$. La partie imaginaire de z est multipliée par $\frac{1}{|z|^2} > \frac{9}{4}$ par ces transformations. On obtient un point dont la partie imaginaire est supérieure à $1/3$ si l'on répète ce schéma. Ceci termine la preuve.



Définition 13 La surface modulaire est le quotient $S = \mathbf{H}/\Gamma$.

Le théorème précédent montre que la projection de \mathbf{H} sur S envoie \mathcal{D} surjectivement sur S et qu'elle est injective en restriction à l'intérieur de \mathcal{D} . Cette projection est un difféomorphisme au voisinage de tous les points qui ne sont pas les images de i ou $e^{i\pi/3}$ par un élément de Γ . Avec un léger abus de notation, nous notons $T^1S = (T^1\mathbf{H})/\Gamma$. Comme le groupe Γ agit sans point fixe sur $T^1\mathbf{H}$, le quotient T^1S est une variété différentielle qui coïncide avec le fibré unitaire de S en dehors des singularités i et $e^{i\pi/3}$.

La mesure de Liouville est invariante par Γ , on obtient donc une mesure sur le quotient T^1S , que nous noterons encore μ . La mesure d'un ensemble borélien $A \subset T^1S$ est donnée par

$$\mu(A) = \mu(\mathcal{D} \cap \pi^{-1}(A)).$$

Vérifions que le quotient T^1S est de masse finie.

$$\mu(T^1S) = \mu(T^1\mathcal{D}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx d\theta = \frac{2}{3}\pi^2.$$

La mesure μ est mélangeante relativement au flot géodésique sur T^1S .

6. Exercices

Géométrie hyperbolique

Exercice 1

On rappelle que la courbure de la métrique riemannienne $ds = f(z) |dz|$ est donnée par la formule

$$K = -\frac{\Delta(\ln f)}{f^2} = -\frac{4}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\ln f)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le Laplacien, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

Montrer que le demi-plan de Poincaré est de courbure -1 .

Exercice 2

Soit $z, w \in \mathbf{H}$. Montrer que la distance hyperbolique entre ces points vérifie

$$\operatorname{ch} d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}.$$

Exercice 3

Montrer que l'aire d'un triangle d'angles α, β, γ dans le demi-plan de Poincaré est égale à $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Homographies

Exercice 4

Soit Γ un groupe d'homographies opérant sur $T^1\mathbf{H}$. On rappelle que Γ opère proprement sur $T^1\mathbf{H}$ si pour tout compact $K \subset T^1\mathbf{H}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Montrer l'équivalence :

- le groupe Γ est discret,
- le groupe Γ opère proprement sur $T^1\mathbf{H}$,
- le groupe Γ est dénombrable et Γv est fermée pour tout $v \in T^1\mathbf{H}$,
- pour tout $v \in T^1\mathbf{H}$, $d(v, \Gamma v \setminus \{v\}) > 0$.

Exercice 5

Montrer qu'une homographie $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de \mathbf{H} qui préserve le point i est une rotation hyperbolique. En déduire que si deux homographies envoient un vecteur donné sur le même vecteur, alors elles sont égales.

Exercice 6

Soit $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie de \mathbf{H} telle que $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$. Calculer ses points fixes. Montrer qu'elle est conjuguée à $z \mapsto \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$ si $|a + d| > 2$, à $z \mapsto z + 1$ si $|a + d| = 1$, et à la rotation hyperbolique autour de i si $|a + d| < 1$. On pourra chercher la conjugaison sous forme d'une homographie.

Flots géodésiques et horocycliques

Exercice 7

Montrer que l'ensemble non errant du flot géodésique défini sur le fibré unitaire d'une surface d'aire finie est égal au fibré tout entier.

Exercice 8

Montrer que dans les coordonnées (x, y, θ) , le flot géodésique s'exprime par $g_t(x, y, \theta) =$

$$\left(x - y \frac{\sin(\theta) \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \cos(\theta)}, \frac{y}{\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \cos(\theta)}, 2 \operatorname{atan}(e^t \tan(\theta/2)) \right)$$

Exprimer le flot horocyclique dans ces coordonnées.

Exercice 9

Soit $s, t, u \in \mathbf{R}$ et $d = e^{t/2}$, $b = se^{t/2}$, $c = se^{t/2}$, $a = e^{-t/2} + e^{t/2}su$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = h_{c/d}^+ \circ g_{2 \ln d} \circ h_{b/d}^-(id) = h_s^+ \circ g_t \circ h_u^-(id).$$

Montrer que la mesure de Liouville a pour expression $e^t ds dt du/2$ dans les coordonnées (s, t, u) .

Exercice 10

On se place sur un quotient de $T^1\mathbf{H}$ de volume fini. Montrer que la mesure de Liouville est ergodique par rapport au flot horocyclique.

Exercice 11

Soit S une surface compacte orientable à courbure négative -1 , $v_1, v_2 \in T^1S$ des vecteurs engendrant des orbites périodiques. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in T^1S$ dont la trajectoire est asymptotique à celle de v_1 pour les temps positifs et à celle de v_2 pour les temps négatifs.

Exercice 12

Montrer qu'une suspension d'une application continue $T : X \rightarrow X$ par le biais d'une fonction plateau constante n'est jamais topologiquement mélangeante. Peut-elle être transitive ?

Exercice 13

Soit $\varphi_t : X \rightarrow X$ mélangeante relativement à une mesure de probabilité μ . Montrer que pour tout $t \neq 0$, l'application $x \mapsto \varphi_t(x)$ est ergodique relativement à la mesure μ .

Chapitre 5

Dynamique symbolique

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux modèles symboliques associés aux systèmes dynamiques hyperboliques. Nous allons expliquer comment construire ces modèles. On se place dans le cas des difféomorphismes pour simplifier la présentation.

1. Variétés stables et instables

À l'origine de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques se trouve la notion d'ensemble hyperbolique, introduite au second chapitre. Un tel ensemble admet une décomposition de son espace tangent en directions stables et instables, respectivement contractées et dilatées par la différentielle de l'application.

1.1 Régularité des variétés stables

La première étape est d'intégrer ces distributions pour obtenir des sous-variétés invariantes contractées et dilatées par le système. Stricto sensu, ces variétés peuvent être définies de manière très générale. Rappelons la définition donnée lors d'un chapitre antérieur.

Définition 14 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un homéomorphisme défini sur un espace métrique M . Les variétés stables et instables d'un point $x \in M$ sont composées des points dont l'orbite est asymptotique à celle de x pour les temps positifs et négatifs.*

$$W^s(x) = \{y \in M \mid d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M \mid d(\varphi^{-n}(x), \varphi^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

On définit aussi des versions locales de ces variétés. Un $\varepsilon > 0$ étant donné, la *variété stable locale* au point x est donnée par

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in W^s(x) \mid \forall n \geq 0, d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq \varepsilon\}.$$

On définit de même la variété instable locale. Le théorème de la variété stable affirme que ces ensembles sont des sous-variétés différentiables de M

lorsque l'application est différentiable et admet un ensemble hyperbolique.

Théorème 24 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^k défini sur une variété différentiable M et soit $\Lambda \subset M$ un ensemble hyperbolique pour φ . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \Lambda$,*

- $W_\varepsilon^s(x)$ est une sous-variété différentiable plongée dans M ,
- $T_x W_\varepsilon^s(x) = E_x^s$,
- pour tout $y \in W_\varepsilon^s(x)$, pour tout $n \geq 0$, $d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq C\lambda^n d(x, y)$,
- $W^s(x)$ est une sous-variété différentiable immergée dans M ,
- $W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} \varphi^{-n}(W_\varepsilon^s(\varphi^n(x)))$.

Les constantes C , λ et les espaces E_x^s , E_x^u sont ceux intervenant dans la définition d'un ensemble hyperbolique. La constante C est égale à 1 lorsque la métrique est adaptée.

Les variétés $W_\varepsilon^s(x)$ dépendent continûment de x au sens suivant : il existe un voisinage U de x et une application continue h de $U \times \mathbf{R}^d$ dans M telle que $z \mapsto h(y, z)$ soit un difféomorphisme sur $W_\varepsilon^s(y)$ pour tout $y \in U$. De plus les dérivées de h relativement à z dépendent continûment de y . Le même théorème est valide pour les variétés instables quitte à inverser le sens du temps, car ce sont les variétés stables de φ^{-1} .

Il est maintenant possible d'énoncer la condition de transversalité forte intervenant dans le théorème 11 portant sur la stabilité structurelle pour les difféomorphismes Axiome A.

Définition 15 *Un difféomorphisme Axiome A satisfait la condition de transversalité forte si pour tout point x, y de l'ensemble non errant Ω dont les variétés stables et instables s'intersectent, les intersections sont transverses :*

$$\forall z \in W^s(x) \cap W^u(y), \quad T_z W^s(x) + T_z W^u(y) = T_z M.$$

1.2 Structure de produit local

On définit ensuite une structure de produit local sur Λ à l'aide des variétés stables et instables.

Théorème 25 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^k définie sur une variété différentiable M et soit $\Lambda \subset M$ un ensemble hyperbolique pour φ . Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Lambda$ satisfaisant $d(x, y) < \delta$, l'intersection $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$ contient exactement un point.*

Ce point est noté $[x,y]$, c'est le *produit local* de x et y . La trajectoire du point $[x,y]$ est asymptotique à celle de x pour les temps positifs et asymptotique à celle de y pour les temps négatifs. On a donc recollé les trajectoires de x et de y .

Définition 16 *L'ensemble hyperbolique Λ admet une structure de produit local s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Lambda$ satisfaisant $d(x,y) < \delta$, l'intersection $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$ contient exactement un point et ce point appartient à Λ .*

Un ensemble hyperbolique localement maximal admet une structure de produit local car toute orbite proche de Λ est en fait dans Λ . On peut montrer la réciproque.

La notion de produit local garde un sens pour des homéomorphismes qui ne sont pas différentiables. Par exemple, le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ possède une structure de produit local. Le produit est même global, il suffit d'accoler les symboles d'indices négatifs de y à ceux d'indices positifs de x pour former le produit.

$$[x,y]_n = x_n \text{ si } n \geq 0, \quad [x,y]_n = y_n \text{ si } n < 0.$$

1.3 Pistage

Une fois qu'on sait recoller deux trajectoires, on peut chercher à recoller une infinité de trajectoires entre elles, ou bien recoller une trajectoire avec elle-même.

Définition 17 *Soit $\delta > 0$ et φ un homéomorphisme. Une δ -pseudo-orbite $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est une suite satisfaisant $d(x_{k+1}, \varphi(x_k)) < \delta$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. L'orbite d'un point y piste à ε près une pseudo-orbite $\{x_k\}$ si*

$$d(x_k, \varphi^k(y)) < \varepsilon \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z}.$$

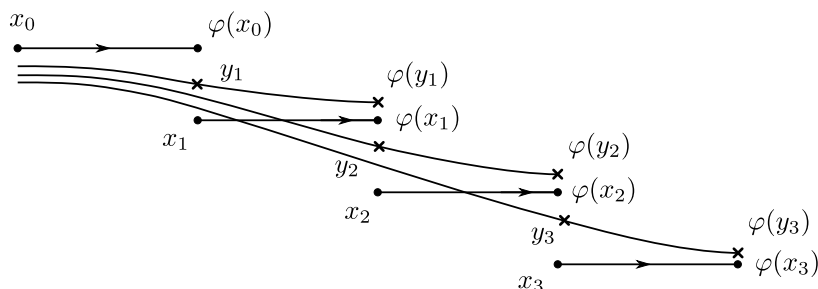
Les pseudo-orbites d'un ensemble hyperbolique sont pistées par des vraies orbites si l'ensemble hyperbolique est localement maximal.

Théorème 26 (pistage) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^k défini sur une variété différentiable M et soit $\Lambda \subset M$ un ensemble hyperbolique localement maximal. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute δ -pseudo-orbite dans Λ est pistée à ε près par un unique point $y \in \Lambda$.*

Démonstration

On commence par pister les itérés positifs de x . On suppose la métrique adaptée. Définissons par récurrence une suite (y_k) telle que

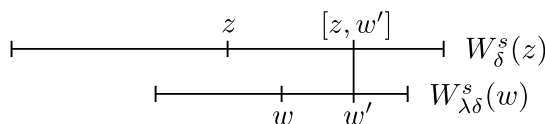
$$y_0 = x_0, \quad y_k = [x_k, \varphi(y_{k-1})].$$



Montrons par récurrence que y_k appartient à $W_\delta^s(x_k) \cap \Lambda$, où δ est le paramètre associé au produit local. Par continuité de ce produit, il existe $\alpha < \delta$ tel que

$$d(z, w) < \alpha \text{ implique } [z, w'] \subset W_\delta^s(z) \text{ pour tout } w' \in W_{\lambda\delta}^s(w),$$

où λ est la constante d'hyperbolicité associée à l'ensemble hyperbolique Λ .



Supposons que la suite (x_k) soit une α -pseudo-orbite. D'après le théorème de la variété stable, le point $\varphi(y_k)$ appartient à $W_{\lambda\delta}^s(\varphi(x_{k+1}))$ et d'après la propriété précédente, le produit local $y_{k+1} = [x_{k+1}, \varphi(y_k)]$ est dans $W_\delta^s(x_{k+1})$ comme souhaité. Nous avons aussi montré que la suite (y_k) est bien définie.

Le point y_k appartient à $W_\delta^u(\varphi(y_{k-1}))$, ce qui implique

$$d(\varphi^{-k}(y_k), \varphi^{-k+1}(y_{k-1})) \leq \lambda^{-k} \delta.$$

La suite de terme général $\varphi^{-k}(y_k)$ est donc convergente lorsque k tend vers l'infini et la limite y_∞ satisfait, pour tout $k \geq 0$,

$$d(\varphi^k(y_\infty), x_k) \leq d(\varphi^k(y_\infty), y_k) + \leq d(y_k, x_k) \leq \left(\frac{1}{1-\lambda} + 1 \right) \delta.$$

On piste de même $(x_k)_{k \leq 0}$ puis on prend le produit local des deux limites. Le théorème est démontré.

Si la pseudo-orbite (x_k) est périodique de période n , le point y doit aussi être périodique de période n car y et $\varphi^n(y)$ pistent tous deux la pseudo-orbite. Une orbite qui revient proche de sa position initiale peut donc être pistée par une orbite périodique, on parle de *lemme de fermeture*. La première version d'un tel lemme a été mis au point par J. Hadamard pour le flot géodésique sur certaines surfaces à courbure négative. Il a été ensuite généralisé par D. V. Anosov aux systèmes qui portent son nom, si bien qu'on parle aujourd'hui de *closing lemma* d'Anosov.

Théorème 27 (closing lemma) *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^k défini sur une variété différentiable M et soit $\Lambda \subset M$ un ensemble hyperbolique localement maximal. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point $x \in \Lambda$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$ satisfaisant $d(x, \varphi^n(x)) < \delta$, il existe un point $y \in \Lambda$ périodique de période n pour lequel*

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad d(\varphi^k(x), \varphi^k(y)) < \varepsilon.$$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du lemme de fermeture, il montre qu'un difféomorphisme Anosov est Axiome A.

Théorème 28 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Anosov de classe C^1 . Alors les orbites périodiques de φ sont denses dans son ensemble non errant Ω .*

2. Partitions de Markov

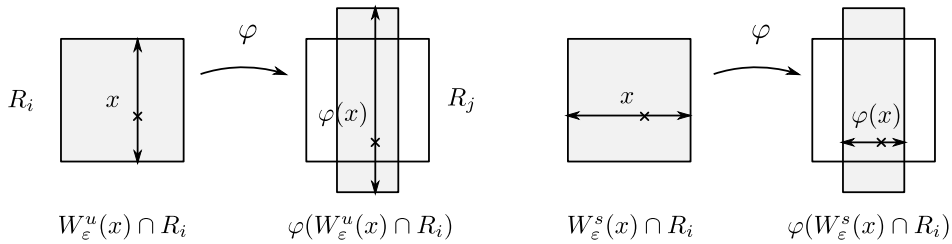
La construction d'un modèle symbolique pour les difféomorphismes hyperboliques repose sur la notion de partition de Markov.

Définition 18 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 défini sur une variété différentiable M et Λ un ensemble hyperbolique localement maximal. Une partition de Markov est la donnée d'un nombre fini de sous-ensembles compacts $R_i \subset \Lambda$, $1 \leq i \leq m$, satisfaisant les conditions suivantes :*

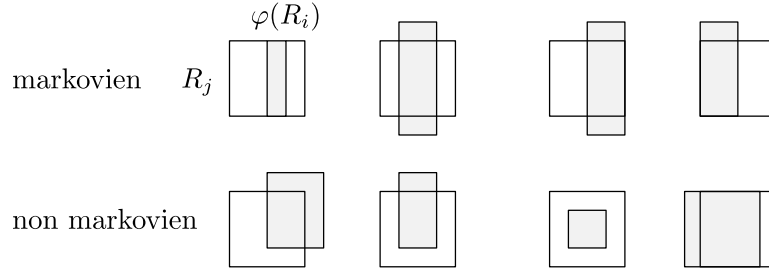
- R_i est l'adhérence de son intérieur,
- le produit local est bien défini sur R_i et $[x, y] \in R_i$ pour tout $x, y \in R_i$,
- $\Lambda = \bigcup R_i$,
- $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
- pour tout $x \in \overset{\circ}{R}_i \cap \varphi^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$,

$$\varphi(W_\varepsilon^s(x) \cap R_i) \subset W_\varepsilon^s(\varphi(x)) \cap R_j,$$

$$W_\varepsilon^u(\varphi(x)) \cap R_j \subset \varphi(W_\varepsilon^u(x) \cap R_i).$$



On dit que R est *propre* s'il satisfait la première condition, on dit que c'est un *rectangle* s'il satisfait la seconde. La notion d'intérieur dans la première condition fait référence à l'intérieur de R en tant que sous-ensemble de Λ et non de M . On a vu dans l'exemple du fer à cheval que Λ pouvait être d'intérieur vide dans M . La dernière condition est la *propriété de Markov* de la partition.



Théorème 29 Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 défini sur une variété différentielle M et Λ un ensemble hyperbolique localement maximal. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition de Markov dont les rectangles sont tous de diamètre inférieur à ε .

Le reste de cette section est consacré à la construction d'une partition de Markov. Nous commençons par définir une semi-conjugaison entre un décalage de type fini et notre application φ restreinte à Λ grâce au pistage. Nous montrons ensuite que cette semi-conjugaison préserve la structure de produit local, ce qui permet de projeter la partition naturelle du décalage pour obtenir des rectangles sur Λ . Ces rectangles ne sont pas d'intérieurs disjoints, il faut donc les découper pour obtenir une partition de Markov sur Λ .

2.1 Préliminaires

Pour alléger les notations, nous posons

$$W^u(x, R) = W_\varepsilon^u(x) \cap R, \quad W^s(x, R) = W_\varepsilon^s(x) \cap R,$$

$$[A, B] = \{[x, y] \mid x \in A, y \in B\}$$

où ε est donné par la structure de produit local et A et B sont deux sous-ensembles d'un rectangle donné.

Ajustons les paramètres qui vont intervenir dans la construction de la partition. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que le produit local soit bien défini, supposons également que ε est une valeur pour laquelle la propriété d'expansivité est satisfaite. Si ε est suffisamment petit, l'application

$$\begin{array}{ccc} W_\varepsilon^s(x) \cap \Lambda \times W_\varepsilon^u(x) \cap \Lambda & \rightarrow & \Lambda \\ (x, y) & \rightarrow & [x, y] \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image, d'inverse $z \mapsto ([z, x], [x, z])$.

Prenons $\delta' < \varepsilon$ tel que toute δ' -pseudo-orbite soit pistée à $\varepsilon/2$ près par un point de Λ puis choisissons $\delta < \delta'$ tel que toute δ -pseudo-orbite soit pistée à $\delta'/2$ près par un point de Λ . Choisissons enfin $\gamma < \delta/2$ tel que $d(\varphi(x), \varphi(y)) < \delta/2$ pour tout $x, y \in \Lambda$ satisfaisant $d(x, y) < \gamma$.

2.2 Semi-conjugaison

Considérons une partie finie $\{p_1, \dots, p_r\}$ de Λ telle que Λ soit recouvert par les boules centrées aux points p_k et de rayon γ . Posons

$$A_{i,j} = 1 \text{ si } d(f(p_i), p_j) < \delta, \quad A_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Pour toute suite $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \Sigma_A$, la suite $\{p_{a_k}\}$ est une δ -pseudo-orbite. Par le théorème de pistage, il existe un unique point $x \in \Lambda$ satisfaisant

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad d(\varphi^k(x), p_{a_k}) < \varepsilon.$$

Notons ce point $\theta(a)$.

Proposition 14 *L'application $\theta : \Sigma_A \rightarrow \Lambda$ est une semi-conjugaison continue surjective entre le décalage σ et l'application φ .*

Démonstration

– Montrons que π est une semi-conjugaison. La trajectoire du point $\varphi(\pi(\{a_k\}))$ est l'image par φ de la trajectoire qui piste la suite $\{a_k\}$, elle piste la suite $\{a_{k+1}\}$ tout comme la trajectoire de $\pi(\{a_{k+1}\}) = \pi(\sigma(\{a_k\}))$. Par unicité, $\varphi \circ \pi = \pi \circ \sigma$.

– Montrons la continuité de θ . Soit $(\omega^n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Σ_A convergeant vers un point $\bar{\omega} \in \Sigma_A$ et (ω^{n_i}) une sous-suite telle que $\theta(\omega^{n_i})$ converge vers un point $x \in \Lambda$. Il s'agit de montrer que $x = \bar{\omega}$. Fixons $k \in \mathbf{Z}$. Nous avons

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \omega_k^n = \bar{\omega}_k.$$

La suite $\theta(\sigma^k(\omega^{n_i})) = \varphi^k(\theta(\omega^{n_i}))$ converge vers $\varphi^k(x)$ si bien que

$$d(\varphi^k(x), p_{\omega_k^{n_i}}) < \varepsilon$$

pour i suffisamment grand. On en déduit $d(\varphi^k(x), p_{\bar{\omega}_k}) < \varepsilon$ et $x = \pi(\bar{\omega})$.

– Montrons la surjectivité de θ . Prenons $x \in \Lambda$ et pour tout $k \in \mathbf{Z}$, choisissons $a_k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $d(\varphi^k(x), p_{a_k}) < \gamma$. Vérifions que $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est dans Σ_A .

$$d(\varphi(p_{a_k}), p_{a_{k+1}}) \leq d(\varphi(p_{a_k}), \varphi(\varphi^k(x))) + d(\varphi^{k+1}(x), p_{a_{k+1}}) < \delta/2 + \delta/2.$$

La proposition est démontrée.

2.3 Produit local

Le décalage Σ_A admet une partition en compacts $R_i = \{a \in \Sigma_A \mid a_0 = i\}$ et possède un produit local défini sur chacun des rectangles par

$$[a, b]_k = \begin{cases} a_k & \text{si } k \geq 0, \\ b_k & \text{si } k \leq 0. \end{cases}$$

Les R_i sont des rectangles pour ce produit et pour tout $x \in R_i$,

$$R_i = [W_{1/2}^u(x), W_{1/2}^s(x)].$$

Montrons que le produit local est préservé par la semi-conjugaison θ .

Proposition 15 $\forall i, \forall a, b \in R_i, \quad \theta([a, b]) = [\theta(a), \theta(b)].$

Démonstration

Nous avons $a_0 = b_0 = i$ et $d(\theta(a), \theta(b)) \leq d(\theta(a), p_{a_0}) + d(p_{b_0}, \theta(b)) < \delta'$,

$$[\theta(a), \theta(b)] \in W_{\varepsilon/2}^s(\theta(a)) \cap W_{\varepsilon/2}^u(\theta(b)).$$

Pour tout $k \geq 0$,

$$d(\varphi^k([\theta(a), \theta(b)]), p_{a_k}) \leq d(\varphi^k([\theta(a), \theta(b)]), \varphi^k(\theta(a))) + d(\varphi^k(\theta(a)), p_{a_k}) < \varepsilon.$$

Cette inégalité, combinée avec l'estimée analogue pour $k \leq 0$, caractérise le point $\theta([a, b])$. La proposition est démontrée.

2.4 Construction des rectangles

Vérifions que les projections des rectangles R_i par l'application θ sont des rectangles de Λ . Soit $x, y \in \theta(R_i)$ et \tilde{x}, \tilde{y} des préimages de x et y par θ .

$$\forall x, y \in \theta(R_i), \quad [x, y] = [\theta(\tilde{x}), \theta(\tilde{y})] = \theta([\tilde{x}, \tilde{y}]) \in \theta(R_i).$$

C'est la propriété souhaitée. Posons $T_i = \theta(R_i)$ et montrons qu'ils vérifient une propriété proche de la propriété de Markov.

Proposition 16 *Soit $a \in R_i, x = \theta(a) \in T_i$ et $j = a_1$. Alors*

$$\varphi(W^s(x, T_i)) \subset W^s(\varphi(x), T_j), \quad W^u(\varphi(x), T_j) \subset \varphi(W^u(x, T_i)).$$

Démonstration

Soit $y \in W^s(x, T_i)$ et $b \in R_i$ tel que $y = \theta(b)$. Comme $y = [x, y] = \theta([a, b])$,

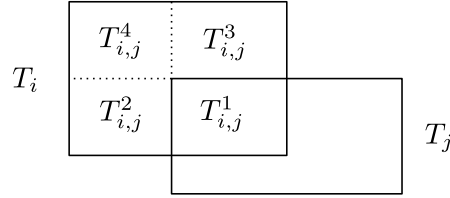
$$\varphi(y) = \varphi(\theta([a, b])) = \theta(\sigma([a, b])) \in \theta(R_j) = T_j.$$

De plus $\varphi(y) \in W_\varepsilon^s(\varphi(x))$ ce qui implique $\varphi(y) \in W^s(\varphi(x), T_j)$. La preuve est analogue pour les variétés instables locales. La proposition est démontrée.

Les T_i ne forment pas une partition de Markov car ils ne sont a priori pas d'intérieurs disjoints. Subdivisons les T_i de manière à obtenir des rectangles d'intérieurs disjoints et propres. Pour tout i, j , considérons les ensembles

$$\begin{aligned} & \{x \in T_i \mid W^s(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset, W^u(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset\}, \\ & \{x \in T_i \mid W^s(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset, W^u(x, T_i) \cap T_j = \emptyset\}, \\ & \{x \in T_i \mid W^s(x, T_i) \cap T_j = \emptyset, W^u(x, T_i) \cap T_j \neq \emptyset\}, \\ & \{x \in T_i \mid W^s(x, T_i) \cap T_j = \emptyset, W^u(x, T_i) \cap T_j = \emptyset\}. \end{aligned}$$

et notons leurs adhérences par $T_{i,j}^1$, $T_{i,j}^2$, $T_{i,j}^3$ et $T_{i,j}^4$. Les quatre ensembles $T_{i,j}^k$ forment une partition de $T_{i,j}$ en rectangles d'intérieurs disjoints.



Remarquons que $T_{i,i}^1 = T_i$. Si T_i et T_j sont disjoints, $T_{i,j}^4 = T_i$. Posons

$$R(x) = \bigcap_{i,j,m} \{T_{i,j}^m \mid x \in T_{i,j}^m\}.$$

Si x est sur le bord d'un des ensembles $T_{i,j}^m$, le rectangle $R(x)$ est vide, sinon il contient x . La famille $\{R(x) \mid x \in \Lambda\}$ est une famille finie de rectangles ouverts, disjoints deux à deux, dont l'union est égale à l'ouvert dense de Λ complémentaire des bords des $T_{i,j}^m$. La famille formée par l'adhérence des rectangles $R(x)$,

$$\{\overline{R(x)} \mid x \in \Lambda\}$$

est la partition de Markov recherchée.

Le caractère propre des $\overline{R(x)}$ provient des propriétés suivantes, valides dans tout espace topologique.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{\overset{\circ}{A}}.$$

La vérification de la propriété de Markov découle de la proposition précédente. Elle est assez longue, nous l'omettons. Le théorème 29 est démontré.

3. Modèle symbolique

Nous sommes en mesure de construire un modèle symbolique pour la dynamique de φ en restriction à Λ . Le décalage associé à une matrice A de taille m composée de 0 et de 1 est défini par

$$\Sigma_A = \{\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \{1, \dots, m\}^{\mathbf{Z}} \mid \forall i \in \mathbf{Z}, A_{a_i a_{i+1}} = 1\},$$

$$\sigma(\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}}) = \{a_{k+1}\}_{k \in \mathbf{Z}}.$$

La matrice A est appelée *matrice de transition*, on peut la visualiser grâce à un graphe orienté dont les sommets sont indexés par les entiers entre 1 et m . Une arête relie les sommets i et j si $A_{i,j} = 1$.

Une partition de Markov dont les rectangles sont de diamètre petit permet de construire une semi-conjugaison entre σ et φ .

Théorème 30 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 défini sur une variété différentielle M , soit Λ un ensemble hyperbolique localement maximal et $\{R_i\}_{i=1\dots m}$ une partition de Markov. Posons*

$$A_{i,j} = 1 \text{ si } \overset{\circ}{R}_i \cap \varphi^{-1}(\overset{\circ}{R}_j) \neq \emptyset, \quad A_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Alors pour toute suite $a = \{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \Sigma_A$, il existe un unique point $x \in \Lambda$ tel que

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \varphi^k(x) \in R_{a_k}.$$

Notons ce point $\pi(a)$. L'application $\pi : \Sigma_A \rightarrow \Lambda$ est une semi-conjugaison continue surjective entre le décalage σ et le difféomorphisme φ :

$$\pi \circ \sigma = \varphi \circ \pi.$$

De plus, il existe un sous-ensemble de Λ qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses et dont les éléments ont une seule préimage par π .

Le graphe orienté associé à la matrice A a autant de sommets qu'il y a de rectangles dans la partition et un sommet est relié à un autre sommet si l'intérieur de l'image du rectangle associé à ce sommet rencontre l'intérieur du rectangle associé à l'autre sommet.

La construction de la semi-conjugaison π suit le même schéma que pour le fer à cheval. Une *bande instable* S dans un rectangle R est un sous-ensemble non vide de R tel que $W^u(x,R) \subset S$ pour tout $x \in S$.

Lemme 5 *Soit i, j tels que $A_{i,j} = 1$ et soit $S \subset R_i$ une bande instable. Alors l'image $\varphi(S) \cap R_j$ est une bande instable. Si de plus S est propre, il en va de même pour $\varphi(S) \cap R_j$.*

Démonstration du lemme

Vérifions que $\varphi(S) \cap R_j$ est non vide. Soit $x \in \overset{\circ}{R}_i \cap \varphi^{-1}(\overset{\circ}{R}_j)$ et $y \in S \subset R_i$.

$$[x,y] \in W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \cap R_i = W^s(x,R_i) \cap W^u(y,R_i) \subset W^s(x,R_i) \cap S.$$

Par la propriété de Markov, $\varphi([x,y]) \subset \varphi(W^s(x,R_i)) \cap \varphi(S) \subset \varphi(S) \cap R_j$.

Montrons que $\varphi(S) \cap R_j$ est une bande. Soit $y \in \varphi(S) \cap R_j$, posons $x = \varphi^{-1}(y) \in S$. Par la propriété de Markov,

$$W^u(y,R_j) = W^u(\varphi(x),R_j) \subset \varphi(W^u(x,R_i)) \subset \varphi(S).$$

C'est la propriété désirée.

Supposons S propre, montrons qu'il en va de même pour $\varphi(S) \cap R_j$. Soit R un rectangle et $x \in R$. Pour tout $C \subset W^u(x, R)$ et $D \subset W^s(x, R)$, le rectangle $[C, D]$ est propre si et seulement si C et D sont propres en tant que sous-ensembles de $W^u(x, R)$ et $W^s(x, R)$ car l'application $[\cdot, \cdot] : W^u(x, R) \times W^s(x, R) \rightarrow R$ est un homéomorphisme.

Soit $D = W^s(x, R_i) \cap S$. Nous avons l'égalité

$$\varphi(S) \cap R_j = [W^u(\varphi(x), R_j), \varphi(D)]$$

L'ensemble $W^u(\varphi(x), R_j)$ est propre car $R_j = [W^u(\varphi(x), R_j), W^s(\varphi(x), R_j)]$ est propre. L'ensemble $D \subset W^s(x, R_i)$ est propre car S est propre. Son image $\varphi(D)$ par le difféomorphisme φ est donc un sous-ensemble propre de $\varphi(W^s(x, R_i)) \subset W^s(\varphi(x), R_j)$. Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème

– *Définition de π*

Grâce au lemme précédent, on montre par récurrence que pour tout $b_0, \dots, b_{n+1} \in \{1, \dots, m\}$ tels que $A_{b_i, b_{i+1}} = 1$ si $1 \leq i \leq m$, l'ensemble

$$\bigcap_{j=0}^{n+1} \varphi^j(R_{b_j}) = R_{b_0} \cap \varphi\left(\bigcap_{j=0}^n \varphi^j(R_{b_{j+1}})\right)$$

est une bande instable. La suite

$$\bigcap_{k=-n}^n \varphi^{-k}(R_{a_k}) = \varphi^{-n}\left(\bigcap_{j=0}^{2n} \varphi^j(R_{a_{n-j}})\right)$$

est donc une suite d'ensembles compacts non vides emboîtés, ce qui entraîne

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^{-k}(R_{a_k}) \neq \emptyset.$$

Considérons x, x' deux points dans cette intersection. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, les points $\varphi^k(x)$ et $\varphi^k(x')$ sont dans le même rectangle R_{a_k} , donc à une distance l'un de l'autre inférieure au diamètre de ce rectangle. Par expansivité, si les rectangles ont tous un diamètre suffisamment petit, ces deux points coïncident et le point $\pi(a)$ est bien défini.

– *Continuité de π*

Soit $(\omega^n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de Σ_A qui converge vers $\bar{\omega} \in \Sigma_A$. Montrons que $\pi(\omega^n)$ converge vers $\pi(\bar{\omega})$ en vérifiant que toute valeur d'adhérence de la suite $\pi(\omega^n)$ est égale à $\pi(\bar{\omega})$. Soit n_i tel que $\pi(\omega^{n_i})$ tende vers x et $k \in \mathbf{Z}$. Nous avons

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, \quad \omega_k^n = \bar{\omega}_k,$$

ce qui entraîne

$$\exists i_0 \in \mathbf{N}, \forall i \geq i_0, \quad \varphi^k(\pi(\omega^{n_i})) \in R_{\omega_k^{n_i}} = R_{\bar{\omega}_k}.$$

En passant à la limite sur i et en utilisant la continuité de φ^k , nous voyons que $\varphi^k(x) \in R_{\bar{\omega}_k}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, d'où l'égalité $x = \pi(\bar{\omega})$.

– *Surjectivité de π*

L'union des intérieurs des R_i est dense dans Λ . L'ensemble

$$G = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^{-k}(\cup_i \overset{\circ}{R}_i)$$

est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Par le théorème de Baire, il est dense dans Λ . Soit $x \in G$. Les intérieurs des rectangles sont disjoints et les rectangles sont égaux à l'adhérence de leur intérieur, si bien que

$$\text{pour tout } i, j \text{ distincts, } \overset{\circ}{R}_i \cap R_j = \emptyset.$$

On en déduit que pour tout entier k , il existe un unique $a_k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\varphi^k(x)$ est dans R_{a_k} , ce qui montre que x a un antécédent par π et qu'il est unique. L'image $\pi(\Sigma_A)$ est un compact qui contient un sous-ensemble de Λ dense dans Λ , l'application π est donc surjective.

– *Semi-conjugaison par π*

Soit $a = (a_k) \in \Sigma_A$. Par définition de π et σ , pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\varphi^k(\pi \circ \sigma(a)) \in R_{a_{k+1}}, \quad \varphi^k(\varphi \circ \pi(a)) \in R_{a_{k+1}}.$$

Comme il existe un unique $x \in \Lambda$ vérifiant $\varphi^k(x) \in R_{a_{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on en déduit l'égalité $\pi \circ \sigma = \varphi \circ \pi$. Le théorème est démontré.

Corollaire 6 *L'application $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ est transitive si et seulement si $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ est transitive. De même pour le mélange topologique.*

Démonstration

Montrons que pour tout ouvert U non vide, $\pi(U)$ est d'intérieur non vide. Cette projection contient un ensemble de la forme

$$\bigcap_{k=-N}^N \varphi^{-k}(R_{a_k})$$

qui est d'intérieur non vide car il est propre, par le lemme précédent.

Supposons φ transitive. Soit U, V deux ouverts non vides de Σ_A et $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$\varphi^n(\pi(\overset{\circ}{U})) \cap \pi(\overset{\circ}{V}) \neq \emptyset.$$

Considérons un point y de cet ensemble qui se trouve dans l'ensemble dense G défini précédemment. Comme y est dans $\pi(\overset{\circ}{V})$ et qu'il possède une seule préimage par π , celle-ci est nécessairement dans V . Elle est aussi dans $\varphi^n(U)$ par le même raisonnement. Nous avons montré que $\varphi^n(U) \cap V$ est non vide, le décalage σ est donc transitif. On raisonne de même pour établir le mélange.

4. Décalages de type fini

La notion de partition de Markov permet de transposer les théorèmes classiques de la théorie des chaînes de Markov à la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques.

4.1 Mesures markoviennes

Nous allons nous servir du modèle symbolique associé à la partition pour construire des mesures de probabilité invariantes qui peuvent être décrites de manière détaillée.

Définition 19 Une matrice $P = \{p_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs et si sur chaque ligne, la somme des coefficients est égale à 1.

$$\forall i, j, \quad p_{i,j} \geq 0, \quad \sum_k p_{i,k} = 1.$$

Un vecteur $p = (p_1, \dots, p_m)$ est un *vecteur de probabilité* si tous ses termes sont positifs et si leur somme est égale à 1. Toute matrice stochastique admet un vecteur de probabilité satisfaisant $pP = p$. Pour construire un tel vecteur, il suffit de partir d'un vecteur de probabilité x et de considérer une valeur d'adhérence de la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n xP^k$.

Plaçons-nous sur le décalage unilatère $\{1, \dots, m\}^{\mathbf{N}}$ et rappelons que le *cylindre* associé à la suite $a_0, \dots, a_n \in \{1, \dots, m\}$ est défini par

$$[a_0, \dots, a_n] = \{(\omega_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \{1, \dots, m\}^{\mathbf{N}} \mid \omega_i = a_i \text{ si } 0 \leq i \leq n\}.$$

Le théorème suivant est dû à A. N. Kolmogorov et permet de construire des mesures invariantes par le décalage.

Théorème 31 Soit P une matrice stochastique de taille $m \times m$ et p un vecteur de probabilité satisfaisant $pP = p$. Alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur $\{1, \dots, m\}^{\mathbf{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $a_0, \dots, a_n \in \{1, \dots, m\}$,

$$\mu([a_0, \dots, a_n]) = p_{a_0} p_{a_0, a_1} p_{a_1, a_2} \cdots p_{a_{n-1}, a_n}.$$

Cette mesure est invariante par le décalage σ .

Cette mesure admet une unique extension σ -invariante au décalage bilatère $\{1, \dots, m\}^{\mathbf{Z}}$. Étant donnée une matrice A de taille $m \times m$ à coefficients dans $\{0,1\}$, on construit des mesures de probabilité sur le décalage bilatère Σ_A en considérant les mesures associées à des matrices stochastiques satisfaisant

$$A_{i,j} = 0 \text{ implique } P_{i,j} = 0.$$

cette condition assurant que la mesure donnée par le théorème précédent est supportée par Σ_A . Les mesures obtenues sur Σ_A par ce procédé sont dites *markoviennes*.

4.2 Mesure de Parry

Nous nous intéressons à un exemple explicite de mesure markovienne étudiée par W. Parry en 1964.

Rappelons qu'une matrice à coefficients positifs est irréductible si si pour tout i, j , on peut trouver $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A^k)_{i,j} > 0$. D'après le théorème de Perron-Frobenius, rappelé en annexe, la matrice A admet une valeur propre λ strictement positive qui majore le module de toutes les autres valeurs propres complexes de A . De plus, il existe un unique vecteur de probabilité v satisfaisant $Av = \lambda v$ et ses coordonnées sont toutes strictement positives. En appliquant le théorème de Perron-Frobenius à la matrice transposée de A , on construit un autre vecteur de probabilité w satisfaisant $wA = \lambda w$ dont les coordonnées sont toutes strictement positives. La proposition suivante s'obtient par un calcul direct.

Proposition 17 *Une matrice irréductible A de taille $m \times m$ étant donnée, considérons la matrice $P = \{P_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ et le vecteur $p = (p_1, \dots, p_m)$ définis par*

$$P_{i,j} = \frac{A_{i,j}v_j}{\lambda v_i}, \quad p_i = \frac{v_i w_i}{\sum_k v_k w_k}.$$

Alors P est une matrice stochastique et le vecteur p est un vecteur de probabilité satisfaisant $pP = p$.

Définition 20 *La mesure sur Σ_A associée à P est appelée mesure de Parry.*

On montre que l'entropie de cette mesure est égale à l'entropie topologique du décalage. De plus, toutes les autres mesures de probabilité invariantes par le décalage ont une entropie strictement inférieure à cette entropie topologique. On dit que le décalage possède une unique mesure d'entropie maximale.

La théorie des chaînes de Markov à nombre d'états finis s'applique à cette mesure et permet d'en étudier les propriétés d'un point de vue probabiliste. On peut par exemple montrer un théorème central limite ou donner des formules explicites pour le temps de retour moyen d'une trajectoire dans un cylindre.

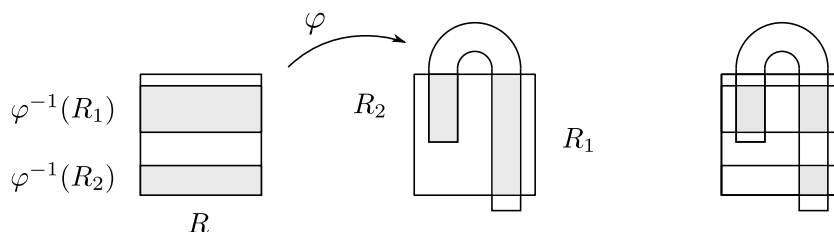
Appliquons ce qui précède à la dynamique des systèmes hyperboliques. Considérons un difféomorphisme φ en restriction à un ensemble hyperbolique Λ . Ce difféomorphisme possède une partition de Markov qui donne une semi-conjugaison entre le décalage sur un espace de symboles Σ_A et φ . Si φ est transitif en restriction à Λ , alors il en va de même pour le décalage $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ et la matrice A est irréductible. Projetons la mesure de Parry de Σ_A sur Λ à l'aide de la semi-conjugaison. On vérifie que la mesure de probabilité obtenue est l'unique mesure d'entropie maximale de $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$.

Théorème 32 *Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 défini sur une variété différentielle M , soit Λ un ensemble hyperbolique localement*

maximal en restriction auquel φ est transitif. Alors $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ admet une unique mesure d'entropie maximale.

4.3 Un exemple de fer à cheval

Modifions le fer à cheval de Smale pour illustrer le théorème précédent. On part d'un rectangle R dans le plan \mathbf{R}^2 . Ce rectangle est dilaté d'un facteur constant dans la direction verticale et contracté dans la direction horizontale, puis courbé de façon à couper R en deux rectangles R_1 et R_2 . Faisons en sorte que le rectangle R_2 soit plus court, avec une partie inférieure strictement incluse dans R et n'intersectant pas l'image réciproque de R_2 .



Notons φ l'application obtenue. On peut supposer φ affine de $\varphi^{-1}(R_1)$ dans R_1 et de $\varphi^{-1}(R_2)$ dans R_2 pour fixer les idées. Posons

$$\Lambda = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \varphi^k(R).$$

L'ensemble Λ est hyperbolique et la famille $\{R_1 \cap \Lambda, R_2 \cap \Lambda\}$ est une partition de Markov. Remarquons que les rectangles R_2 et $\varphi^{-1}(R_2)$ sont disjoints, si bien que la matrice de transition associée à la partition et l'espace symbolique sont donnés par

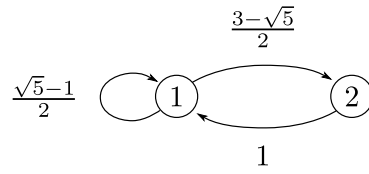
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_A = \{(a_k)_{k \in \mathbf{Z}} \in \{1, 2\}^{\mathbf{Z}} \mid a_j = 2 \Rightarrow a_{j+1} = 1\}.$$

La valeur propre dominante λ de A et un vecteur propre v associé valent

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons μ la mesure de Parry. Les formules vues précédemment permettent de calculer la matrice stochastique et le vecteur de probabilité qui lui sont associés.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}, \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right).$$



On en déduit la mesure des rectangles R_1 et R_2 ,

$$\mu(R_1) = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \simeq 0,724, \quad \mu(R_2) = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \simeq 0,276.$$

Les valeurs $p_{i,j}$ s'interprètent comme des probabilités conditionnelles. Par exemple, la probabilité que l'itéré d'un point soit dans R_1 sachant que le point appartient à R_1 est égale à

$$\mu(\varphi(x) \in R_1 \mid x \in R_1) = \frac{\mu(R_1 \cap \varphi^{-1}(R_1))}{\mu(R_1)} = p_{1,1} \simeq 0,618.$$

5. Exercices

Exercice 1

Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme Anosov mélangeant, x et y deux points de M . Montrer que l'ensemble $W^s(x) \cap W^u(y)$ est dense dans M . En déduire que le feuilletage stable est *minimal* : pour tout $x \in M$, $W^s(x)$ est dense dans M .

Exercice 2

Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme et Λ un ensemble hyperbolique localement maximal. Supposons qu'il y ait un point fixe $x \in \Lambda$ tel que $W^s(x) \cap \Lambda$ et $W^u(x) \cap \Lambda$ soient denses dans Λ . Alors φ est topologiquement mélangeant en restriction à Λ .

Décalage

Exercice 3

Montrer que le décalage $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ est transitif si et seulement si la matrice A est *irréductible*. Montrer qu'il est topologiquement mélangeant si et seulement si la matrice A est *régulière*, c'est-à-dire si on peut trouver $k \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout i, j , $(A^k)_{i,j} > 0$.

Exercice 4

Dans l'exemple du fer à cheval décrit dans ce chapitre, calculer le temps moyen nécessaire pour passer de l'état 1 à l'état 2, ainsi que le temps moyen nécessaire pour passer de l'état 2 à l'état 2.

Exercice 5

On considère la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Tracer le graphe associé à la matrice A .
- Construire un difféomorphisme possédant un compact invariant Λ en restriction duquel il est conjugué au décalage sur l'espace Σ_A .
- Expliciter la mesure de Parry associée à la matrice A .
- Quelle est la mesure de l'ensemble des points dans l'état 1 dont l'itéré second est à nouveau dans l'état 1 ?

Chapitre 6

Annexes

Nous rappelons quelques théorèmes d'analyse utilisés dans le cours.

1. Théorème du point fixe de Banach

Soit $K \in [0, \infty[$. Une application $T : X \rightarrow X$ définie sur un espace métrique est dite K -lipschitzienne si pour tout $x, y \in X$,

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y).$$

Le plus petit réel K satisfaisant l'inégalité précédente est la *constante de Lipschitz* de T . Si $K < 1$, l'application est dite *contractante*. Le théorème du point fixe de Banach affirme qu'une telle application admet un unique point fixe et que la suite $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ce point fixe pour tout $x \in X$ si X est complet.

Théorème 33 *Soit X un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une application K -lipschitzienne, avec $K < 1$. Alors l'application T admet un unique point fixe x_0 et pour tout $x \in X$ et tout $N \geq 0$,*

$$d(T^N(x), x_0) \leq \frac{K^N}{1-K} d(T(x), x).$$

Démonstration

Soit $x \in X$, montrons que la suite $\{T^n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge en vérifiant qu'elle est de Cauchy. Soit $N \in \mathbf{N}$ et $m, n \in \mathbf{N}$ tels que $N \leq m \leq n$.

$$d(T^n(x), T^m(x)) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(T^{k+1}(x), T^k(x)) \leq \sum_{k=m}^{n-1} K^k d(T(x), x),$$

La série géométrique est majorée par $\frac{K^m}{1-K}$ ce qui implique

$$d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{K^N}{1-K} d(T(x), x).$$

La suite est bien de Cauchy, la majoration de l'énoncé s'obtient en prenant $m = N$ et en faisant tendre n vers l'infini. Notons x_0 la limite de la suite et montrons qu'elle est point fixe de T .

$$T(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(T^k(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k+1}(x) = x_0.$$

Enfin, vérifions que T ne possède qu'un seul point fixe. Soit x_0, x_1 tels que $T(x_0) = x_0$ et $T(x_1) = x_1$.

$$d(x_0, x_1) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq Kd(x_0, x_1).$$

Cela n'est possible que si $d(x_0, x_1)$ est nul car K est plus petit que 1. Le théorème est démontré.

2. Densité dans les espaces L^p

Dans un espace métrique muni d'une mesure borélienne finie, toute fonction de L^p peut être approchée par des fonctions continues bornées en norme L^p si $1 \leq p < \infty$. Ce résultat se démontre à partir d'une propriété de régularité de la mesure.

Théorème 34 (régularité extérieure) *Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie et $A \subset X$ un ensemble μ -mesurable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert U contenant A tel que $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$.*

On dit que la mesure est *extérieurement régulière*. Ceci implique que tout ensemble μ -mesurable peut s'écrire sous la forme $(\cap U_i) \setminus N$, avec U_i suite d'ouverts de X et N ensemble négligeable.

Démonstration

Posons

$$\mathcal{T} = \{A \text{ mesurable} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists U \text{ ouvert tel que } A \subset U \text{ et } \mu(U \setminus A) < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists V \text{ ouvert tel que } A^c \subset V \text{ et } \mu(V \setminus A^c) < \varepsilon\}$$

Les ouverts sont dans \mathcal{T} : le complémentaire de tout ouvert U peut s'écrire comme intersection des ouverts $V_n = \{x \in X \mid d(x, U^c) < \varepsilon\}$, la mesure des V_n tend donc vers celle de U^c . Les ensembles négligeables sont aussi dans \mathcal{T} . Il suffit maintenant de montrer que \mathcal{T} est une tribu. L'invariance par passage au complémentaire est évidente. Soit A_i des ensembles mesurables dans \mathcal{T} et U_i des ouverts tels que $A_i \subset U_i$ et $\mu(U_i \setminus A_i) < \varepsilon/2^i$. L'union des U_i approche bien l'union des A_i :

$$\cup A_i \subset \cup U_i, \quad \mu(\cup U_i \setminus \cup A_i) \leq \sum \mu(U_i \setminus A_i) < \varepsilon$$

Pour les complémentaires, on peut trouver n tel que $\mu(\bigcap_1^n A_i \setminus \bigcap_1^\infty A_i) < \varepsilon/2$ et on utilise l'inclusion

$$\bigcap_1^n V_i \setminus \bigcap_1^n A_i^c \subset \bigcup_1^n (V_i \setminus A_i^c)$$

Théorème 35 (densité L^p) *Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne finie et $1 \leq p < \infty$. Alors toute fonction $f \in L^p(X, \mu)$ est limite, en norme L^p , d'une suite de fonctions lipschitziennes bornées appartenant à L^p .*

Démonstration

Comme les fonctions qui sont combinaisons linéaires de fonctions indicatrices sont denses dans les L^p , on peut se restreindre au cas où f est une fonction indicatrice, $f = \mathbf{1}_A$. Soit U un ouvert contenant A tel que $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$.

$$\|\mathbf{1}_U - \mathbf{1}_A\|_{L^p} = \mu(U \setminus A)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$$

Il suffit maintenant d'approcher $\mathbf{1}_U$ par une suite de fonctions lipschitziennes bornées. Posons $f_k = \min(1, kd(x, U^c))$. Ces fonctions sont lipschitziennes,

$$\forall x, y \in X, \quad |f_k(x) - f_k(y)| \leq k d(x, y).$$

La suite f_k converge vers $\mathbf{1}_U$ simplement et les fonctions $|\mathbf{1}_U - f_k|$ sont majorées uniformément par 1. Ceci assure la convergence des f_k vers $\mathbf{1}_U$ en norme L^p par le théorème de convergence dominée.

Remarque

Ce théorème est encore vrai si X est métrique séparable et μ est localement finie.

3. Théorème de Radon-Nikodym

On se place sur un espace mesurable (X, \mathcal{T}) . Une mesure μ est *absolument continue* par rapport à une autre mesure ν si tout ensemble ν -négligeable est ν -négligeable.

$$\nu(A) = 0 \text{ implique } \mu(A) = 0.$$

On note parfois $\mu \ll \nu$.

Théorème 36 Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable, soit μ et ν deux mesures finies définies sur \mathcal{T} telles que μ soit absolument continue par rapport à ν . Alors il existe une fonction ν -intégrable définie de X dans \mathbf{R}_+ notée $\frac{d\mu}{d\nu}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\nu} d\nu.$$

Cette fonction $\frac{d\mu}{d\nu}$ est appelée densité de μ par rapport à ν ou encore dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ν .

Démonstration

Considérons la forme linéaire continue définie sur $L^2(X, \mu + \nu)$ par

$$f \mapsto \int_X f d\mu.$$

Le théorème de représentation de Riesz affirme que pour toute forme linéaire l sur un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, il existe un vecteur $h \in H$ tel

que $l(x) = \langle h, x \rangle$ pour tout $x \in H$. Soit donc $h \in L^2(X, \mu + \nu)$ la fonction satisfaisant

$$\int f d\mu = \int f h d(\mu + \nu), \quad \int (1 - h) f d\mu = \int f h d\nu.$$

La fonction h est à valeurs dans $[0, 1]$. Prenons pour f la fonction indicatrice de l'ensemble $(h = 1)$ dans la relation précédente, on obtient $\nu(h = 1) = 0$ et par absolue continuité, $\mu(h = 1) = 0$. Appliquons ensuite la relation à la fonction bornée $f = \frac{\mathbf{1}_A}{1-h} \mathbf{1}_{(1-h > \varepsilon)}$ pour $\varepsilon > 0$.

$$\mu(A \cap (1 - h > \varepsilon)) = \int_A \frac{h}{1-h} \mathbf{1}_{(1-h > \varepsilon)} d\nu.$$

Faisons tendre ε vers 0 pour obtenir par convergence croissante

$$\mu(A) = \int_A \frac{h}{1-h} d\nu.$$

Il suffit de prendre $A = X$ dans cette relation pour montrer que $h/(1-h)$ est intégrable. Le théorème est démontré.

Deux mesures finies μ, ν sont *équivalentes* si $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll \mu$. Cela signifie que les deux mesures ont mêmes ensembles négligeables. On vérifie alors la relation

$$\frac{d\mu}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu} = 1 \text{ presque partout,}$$

ce qui montre que les dérivées sont inverses l'une de l'autre, à valeurs dans $]0, \infty[$.

4. Convergence étroite des mesures

Soit X un espace métrique, $\mu_n, n \in \mathbf{N}$ et μ des mesures de probabilités définies sur la tribu des boréliens de X . La suite $(\mu_n)_n$ converge vers μ *étroitement* vers μ si pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ continue bornée,

$$\int_X f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

Lorsque X est compact, on parle de *convergence faible*. L'intérêt de cette notion de convergence provient du théorème de compacité suivant.

Théorème 37 *Soit X un espace métrique compact et $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de mesures de probabilité définies sur la tribu des boréliens de X . Alors il existe une sous-suite (n_k) tendant vers l'infini et une mesure de probabilité μ telles que μ_{n_k} converge vers μ faiblement.*

Ce théorème découle de l'identification de l'espace $\mathcal{M}^1(X)$ des mesures de probabilités sur X avec un sous-ensemble fermé de la boule unité du dual de $C^0(X, \mathbf{R})$ et du fait que cette boule est métrisable et compacte pour la topologie faible-*, d'après le théorème de Banach-Alaoglu.

En général, la convergence étroite d'une suite (μ_n) vers une mesure μ n'est pas suffisante pour impliquer la convergence de la suite $\mu_n(A)$ vers $\mu(A)$ pour tout borélien $A \subset X$. On a tout de même l'équivalence suivante.

Proposition 18 *Soit μ et μ_n , $n \in \mathbf{N}$, des mesures de probabilité définies sur la tribu des boréliens d'un espace métrique X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$ pour toute fonction f continue bornée,
- $\mu(U) \leq \underline{\lim} \mu_n(U)$ pour tout ouvert $U \subset X$,
- $\mu(F) \geq \overline{\lim} \mu_n(F)$ pour tout fermé $F \subset X$,
- $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$ pour tout ensemble $A \subset X$ tel que $\mu(\partial A) = 0$.

On peut cependant utiliser la densité des fonctions continues dans les fonctions intégrables pour montrer que certaines propriétés de nature mesurable passent à la limite dans une convergence étroite. En voici un exemple.

Proposition 19 *Soit X un espace métrique et (μ_n) et (ν_n) deux suites de mesures de probabilités convergeant étroitement vers des mesures μ et ν respectivement. Si $\mu_n(A) \leq \nu_n(A)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout borélien $A \subset X$, alors $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien $A \subset X$.*

Démonstration

Il suffit de constater qu'une inégalité de la forme

$$\mu(A) \leq \nu(A) \text{ pour tout borélien } A \subset X$$

est équivalente à l'inégalité

$$\int_X f d\mu \leq \int_X f d\nu \text{ pour toute fonction } f \text{ continue bornée.}$$

On le démontre en approchant la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ par une suite de fonctions continues bornées $\{f_k\}$ en norme $L^1(\mu + \nu)$, ce qui entraîne la convergence de la suite $\{f_k\}$ à la fois en norme $L^1(\mu)$ et en norme $L^1(\nu)$.

5. Théorème ergodique de Birkhoff

Le théorème ergodique de Birkhoff permet de décrire le comportement asymptotique des orbites d'un système dynamique, il est valide sur tout espace mesuré fini. Rappelons qu'une mesure μ définie sur un espace mesurable (X, \mathcal{T})

est *invariante* par une application mesurable $T : X \rightarrow X$ si elle satisfait l'égalité $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.

Théorème 38 *Considérons un espace mesuré (X, \mathcal{T}, μ) tel que $\mu(X) < \infty$, une application mesurable $T : X \rightarrow X$ qui préserve la mesure μ et une fonction intégrable $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. Alors la moyenne*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$$

converge μ -presque partout lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration

Posons $\bar{f}(x) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$, $\underline{f}(x) = \underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$.

Pour montrer le théorème, il suffit d'obtenir l'encadrement

$$\int \bar{f} d\mu \leq \int f d\mu \leq \int \underline{f} d\mu$$

car alors $\bar{f} - \underline{f}$ est une fonction positive d'intégrale nulle, donc nulle presque partout. On montre $\int \bar{f} d\mu \leq \int f d\mu$, l'autre inégalité s'obtient en changeant le signe de f .

Supposons pour commencer f bornée par une constante $M > 0$. Il en va alors de même pour \bar{f} . Rappelons que la limite supérieure d'une suite est sa plus grande valeur d'adhérence. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une infinité de $n \in \mathbf{N}^*$ qui satisfont l'inégalité $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \geq \bar{f}(x) - \varepsilon$. Soit $n(x)$ le plus petit de ces entiers :

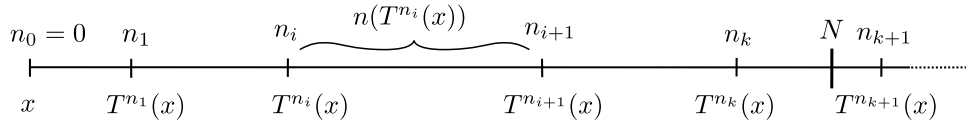
$$\bar{f}(x) \leq \frac{1}{n(x)} \sum_{k=0}^{n(x)-1} f(T^k(x)) + \varepsilon.$$

L'intersection des ensembles $\{x \in X \mid n(x) > R\}$, $R \in \mathbf{N}$, est vide. Choisissons R de telle sorte que $A = \{x \in X \mid n(x) > R\}$ soit de mesure plus petite que ε et définissons par récurrence une suite n_i , dépendant de x , comme suit.

- Si $T^{n_i}(x) \notin A$, on pose $n_{i+1} = n_i + n(T^{n_i}(x))$ et on majore comme suit.

$$n(T^{n_i}(x)) \bar{f}(T^{n_i}x) \leq \sum_{j=0}^{n(T^{n_i}(x))-1} f(T^j(T^{n_i}x)) + n(T^{n_i}(x)) \varepsilon.$$

- Si $T^{n_i}(x) \in A$, on pose $n_{i+1} = n_i + 1$ et on utilise la majoration $\bar{f}(x) \leq M$.



Soit $\tilde{f} = f \mathbf{1}_{A^c} + M \mathbf{1}_A$. Comme \tilde{f} est T -invariante, ces majorations impliquent

$$\forall x \in X, \quad (n_{i+1} - n_i) \tilde{f}(x) \leq \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \tilde{f}(T^j(x)) + (n_{i+1} - n_i) \varepsilon.$$

Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et k l'entier satisfaisant l'encadrement $n_k \leq N < n_{k+1}$. Cet entier dépend de x . Remarquons que $0 \leq N - n_k \leq R$ et sommons les inégalités précédentes.

$$N \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^k (n_{i+1} - n_i) \tilde{f}(x) + (N - n_k) \tilde{f}(x) \leq \sum_{j=0}^N \tilde{f}(T^j(x)) + N\varepsilon + 2RM.$$

Intégrons l'inégalité précédente, nous obtenons les majorations

$$\int \tilde{f} d\mu \leq \int f d\mu + \left(\varepsilon + \frac{2RM}{N}\right) \mu(X), \quad \int \tilde{f} d\mu \leq \int f d\mu + 2M\varepsilon.$$

Le résultat s'ensuit en faisant tendre N vers l'infini puis ε vers 0.

Lorsque f n'est pas bornée, l'ensemble $\{\tilde{f} = -\infty\}$ reste négligeable car \tilde{f} est minorée par la fonction intégrable $-\liminf \frac{1}{n} \sum |f \circ T^k|$. On fixe une constante $M > 0$ et on choisit A tel que $\int_A |f| + M d\mu < \varepsilon$. On reprend le calcul précédent avec \tilde{f} remplacé par $\min(\tilde{f}, M)$. De là, on obtient l'inégalité

$$\int \min(\tilde{f}, M) d\mu \leq \int \tilde{f} d\mu + \mu(X) \varepsilon, \quad \int \tilde{f} d\mu \leq \int f d\mu + \varepsilon.$$

On fait alors tendre ε vers 0 puis M vers l'infini pour conclure. Le théorème est démontré.

Rappelons qu'une mesure est *ergodique* si tout ensemble invariant par T est de mesure nulle ou de complémentaire de mesure nulle,

$$T^{-1}A = A \text{ implique } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A^c) = 0.$$

De manière équivalente, une mesure est ergodique si toute fonction mesurable invariante est constante presque partout,

$$f \circ T = f \text{ implique l'existence d'un } C \in \mathbf{R} \text{ tel que } f = C \text{ presque partout.}$$

Comme la limite presque sûre \bar{f} dans le théorème ergodique est invariante par T , elle doit être égale à sa moyenne et on obtient le corollaire suivant.

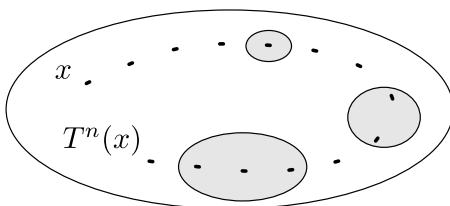
Corollaire 7 *Supposons que la mesure μ est ergodique. Alors pour μ -presque tout $x \in X$,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(X)} \int f d\mu.$$

Soit $A \in \mathcal{T}$, appliquons ce corollaire à la fonction indicatrice de A afin d'obtenir la convergence, pour μ -presque tout $x \in X$,

$$\frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid T^k(x) \in A\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A)}{\mu(X)}.$$

On dit que les moyennes temporelles coïncident avec les moyennes spatiales dans le cas ergodique. Le temps passé dans un ensemble est proportionnel à sa mesure.



Le théorème ergodique a un analogue pour les flots. Un flot défini sur un espace (X, \mathcal{T}, μ) est une application mesurable $T : \mathbf{R} \times X \rightarrow X$ satisfaisant pour tout $x \in X$ et $s, t \in \mathbf{R}$,

$$T_0(x) = x, \quad T_t(T_s(x)) = T_{t+s}(x).$$

Une mesure, un ensemble mesurable, une fonction mesurable est *invariante* par le flot si elle est invariante par T_t pour tout $t \in \mathbf{R}$. Une mesure est *ergodique* si les seuls ensembles invariants sont négligeables ou de compléments négligeables.

Théorème 39 Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$, soit $T_t : X \rightarrow X$ un flot qui préserve la mesure μ et $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable. Alors la moyenne

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(T_s(x)) ds$$

converge μ -presque partout lorsque t tend vers l'infini. Dans le cas ergodique, la limite est égale à $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$.

6. Théorème de Perron-Frobenius

Le théorème de Perron-Frobenius est un résultat d'algèbre linéaire utilisé dans la théorie des chaînes de Markov. Il concerne les matrices à coefficients positifs irréductibles.

Définition 21 Une matrice A à coefficients réels de taille $m \times m$ est dite positive si pour tout i, j , $A_{i,j} \geq 0$. Elle est dite irréductible si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \exists k \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } (A^k)_{i,j} > 0.$$

Associons à une matrice positive un graphe dont les sommets sont indexés par les entiers allant de 1 à m et possédant une arête pour chaque paire de sommets i et j telle que $A_{i,j} > 0$. La matrice est irréductible si et seulement si tout sommet est relié à tout autre sommet par un chemin dans le graphe.

Théorème 40 (Perron-Frobenius) *Soit $A = \{A_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ une matrice positive irréductible. Alors*

- *il existe une valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ majorant le module de toutes les valeurs propres réelles et complexes de A ,*
- *il existe un unique vecteur propre associé à λ dont toutes les coordonnées sont strictement positives,*
- *tout vecteur propre associé à λ est proportionnel à ce vecteur propre.*

La valeur propre λ est appelée *valeur propre dominante* de A . Les vecteurs propres intervenant dans le théorème sont des vecteurs propres à droite, c'est-à-dire des vecteurs v satisfaisant $Av = \lambda v$. Remarquons que la transposée d'une matrice irréductible est irréductible, le théorème produit donc aussi un unique vecteur propre w satisfaisant $wA = \lambda w$ dont toutes les coordonnées sont positives. Les vecteurs v et w sont différents en général.

7. Exercices

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ une application K -lipschitzienne avec $K < 1$. Montrer que le point fixe de T est donné par la série convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} (T - id_X)(T^k(0)).$$

Exercice 2

Soit X un espace de Banach et $L : X \rightarrow X$ une application linéaire continue satisfaisant $\|1 - L\| < 1$. Montrer que L est inversible et que son inverse satisfait $\|L^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|1 - L\|}$.

Exercice 3

Soit X un espace métrique, μ et ν deux mesures de masses finies définies sur la tribu des boréliens de X . Supposons que pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ continue bornée,

$$\int_X f d\mu \leq \int_X f d\nu.$$

Montrer que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout sous-ensemble borélien $A \subset X$.

Exercice 4

On se place sur la droite réelle. Montrer que la suite des mesures de Dirac $\delta_{\frac{1}{n}}$ converge étroitement vers δ_0 . Donner des exemples d'ensembles A ouverts ou fermés tels que $\delta_{\frac{1}{n}}(A)$ ne converge pas vers $\delta_0(A)$.

Exercice 5

Soit X un espace métrique compact muni d'une mesure de probabilité borélienne μ et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On pose

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_*^k \mu.$$

Montrer que la suite (μ_n) admet une sous-suite faiblement convergente et que toute valeur d'adhérence faible de cette suite est T -invariante. En déduire qu'il existe toujours une mesure de probabilité invariante par T .

Exercice 6

Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable et $T : X \rightarrow X$ une application mesurable qui préserve deux mesures finies μ_1 et μ_2 . Montrer que si μ_1 est absolument continue par rapport à μ_2 , alors la dérivée $\frac{d\mu_1}{d\mu_2}$ est invariante par T .

Exercice 7

Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace probabilisé et $T : X \rightarrow X$ une application mesurable qui préserve μ . On suppose μ ergodique. Montrer que toute mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à μ est égale à μ .

Notations

Les ensembles des nombres entiers, entiers relatifs, rationnels, réels et complexes sont notés respectivement \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} et \mathbf{C} . L'ensemble \mathbf{N} contient le nombre 0.

ach, ash	arcosinus et arcsinus hyperboliques
$\mathbf{1}_A$	fonction indicatrice de A
$C^0([0,1],\mathbf{R})$	espace des applications continues sur $[0,1]$
ch, sh	cosinus et sinus hyperboliques
det	déterminant
\mathbf{D}	disque de Poincaré
$M_n(\mathbf{R})$	ensemble des matrices de taille $n \times n$
$\ x\ $	norme de x
$\ f\ _1$	norme C^1 de f
$\ f\ _k$	norme C^k de f
$\ f\ _\infty$	norme uniforme de f
$\ f\ _{L^p}$	norme L^p de f
g_t	flot géodésique
h_s^+	flot horocyclique contractant
\mathbf{H}	demi-plan de Poincaré
id	application identité
\emptyset	ensemble vide
λ	mesure de Lebesgue
$\lambda_{\mathbf{R}}$	mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}
$\lambda_{\mathbf{M}}$	mesure de Lebesgue sur M
Λ	ensemble hyperbolique
$L^p(X)$	espace des fonctions de puissance p -ième intégrable
M	variété différentielle
μ	mesure de probabilité
φ	difféomorphisme
\mathbf{R}_+	$[0, \infty[$
\in	appartenance
\subset	inclusion
S^1	cercle
Σ_A	décalage de type fini
\mathbf{T}^1	tore de dimension 1
\mathbf{T}^d	tore de dimension d
$T_x M$	espace tangent à M en x
$T^1 M$	fibré unitaire de M
X	espace métrique
\cap	intersection
\oplus	somme directe
\circ	composition

Bibliographie

- [AA] Arnold Vladimir, Avez André. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, No. 9 Gauthier-Villars, Éditeur, Paris 1967. ii, 243 p.
- [Bo] Bowen Rufus. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. 2nd revised ed. Zbl 1172.37001 Lecture Notes in Mathematics 470. Springer, 2008. viii, 74 p.
- [BS] Brin Michael, Stuck Garret. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press. 2015. xii, 240 p.
- [C] Yves Coudène. *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*. Savoirs Actuels. Les Ulis: EDP Sciences; Paris: CNRS Éditions, 2012. vi, 198 p.
- [GH] Guckenheimer John, Holmes Philip. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences, 42. New York etc.: Springer-Verlag, 1983. xvi, 453 p.
- [GHL] Gallot Sylvestre, Hulin Dominique, Lafontaine Jacques. *Riemannian Geometry*. Universitext. Berlin: Springer, 2004. xv, 322-p.
- [KH] Katok Anatole, Hasselblatt Boris. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xviii, 802 p.
- [K] Kitchens Bruce. *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*. Universitext. Berlin: Springer, 1998. 252 p.
- [M] Moise Edwin. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. New York : Springer-Verlag, 1977.
- [Rob] Robinson Clark. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Second edition. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1999. xiv, 506 p.
- [Sh1] Shub Michael. *Stabilité globale des systèmes dynamiques*. Astérisque, 56. Société Mathématique de France, Paris, 1978. iv, 211 p.
- [Sh2] Shub Michael. *Global Stability of Dynamical Systems*. With the collab. of Albert Fathi and Remi Langevin. Transl. from the French by Joseph Christy. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. 150 p.

Index

- λ_M , 36
- $\lambda_{\mathbf{R}}$, 11
- absolument continue
 - mesure, 87
- adaptée, métrique, 25, 50
- Anosov
 - difféomorphisme, **26**, 27, 31, 71
 - flot, **50**
- application
 - chat d'Arnold, 27
 - dilatante, 12, 14
 - linéaire hyperbolique, 31, **37**
 - lipschitzienne, **85**
- argument de Hopf, 58
- automorphisme
 - du tore, 27
 - hyperbolique, 27
- Axiome A, 71
 - difféomorphisme, **35**
 - flot, **51**
- bande instable, 76
- basique, **36**
- bassin d'attraction, 36
- cercle, 12
- champ de vecteurs, 49
- chat d'Arnold, 27
- classification
 - cas dilatant, 16
 - cas hyperbolique, 31
- closing lemma, 70
- codage, 16
 - difféomorphisme Anosov, 26
 - difféomorphisme Axiome A, 35
 - fer à cheval, 40, 81
 - flot d'Anosov, 51
- compact
 - hyperbolique, **25**, **49**
 - localement maximal, **36**, 69
- condition de transversalité forte, 35, **68**
- cône, 30
- conjugaison, **10**
- constante
 - d'hyperbolicité, 25
 - de Lipschitz, 85
- contractante, **85**
- convergence
 - faible, 88
 - étroite, 88
- cylindre, 79
- décalage, **8**, **10**, **16**, 26, 40, 47
 - bilatère, **26**
 - de type fini, **26**, 51, **75**
 - transitivité, 10
- degré, **16**
- demi-plan de Poincaré, **52**
- difféomorphisme
 - Anosov, **26**, 27, 31, 71
 - Axiome A, **35**
- dilatant, 7, 14
- discret, 62
- disque de Poincaré, **60**
- distance hyperbolique, 52, 65
- distribution stable, 50
- dynamique Nord-Sud, 37
- décomposition spectrale, 36, 39, 43
- endomorphisme
 - du tore, 27
 - dilatant, 27
- ensemble
 - basique, **36**
 - hyperbolique, **25**, **49**

- invariant, **11**
- non errant, **35**
- équivalence de mesures, 17
- équivalence orbitale, 50
- ergodicité
 - application dilatante, 17
 - automorphisme, 28
 - difféomorphisme Anosov, 27
 - difféomorphisme Axiome A, 36
 - flot, 92
 - flot d'Anosov, 51
 - flot géodésique, 59
- ergodique, **11**, 27, 36, **91**
- étroite, convergence, 88
- exacte, 24
- expansivité, 32
- faible, 88
- fer à cheval, 40, 81
- fermeture, 70
- flot, **49**, **92**
 - Anosov, **50**
 - Axiome A, **51**
 - de suspension, **50**
 - géodésique, **56**
 - horocyclique, **56**
 - structurellement stable, **50**
- fonction
 - invariante, **11**, 91
- fonction plateau, 50
- géodésique, 53
- groupe discret, 62
- homocline, 43
- horocycle, 56
- hyperbolicité
 - constante d' , 25
 - uniforme, 25
- hyperbolicité uniforme, 50
- hyperbolique
 - application linéaire, 31, **37**
 - distance, 52
 - ensemble, **25**, **49**
 - métrique, **52**
 - point périodique, **43**
- instable
 - distribution, **26**
 - variété, 43, 67
- invariant
 - ensemble, **11**
 - fonction, **11**, 91
 - mesure, **11**
- irréductible, 83, 92
- isométrie, 52, 53
- lemme de fermeture, 70
- lipschitzienne, **85**
- localement maximal, **36**, 69
- longueur hyperbolique, 52
- matrice
 - de transition, 76
 - irréductible, 92
 - positive, **92**
 - régulière, 83
 - stochastique, 79
- mélange, 27
 - application dilatante, 24
 - automorphisme, 28
 - difféomorphisme, **12**
 - endomorphisme du tore, 28
 - flot, 49
 - flot d'Anosov, 51
 - flot géodésique, 59
 - topologique, **9**, 24, 36, 83
- mesure
 - absolument continue, 87
 - d'entropie maximale, 80
 - de Haar, 61
 - de Lebesgue, 11
 - de Liouville, **56**
 - de Parry, **80**, 81
 - ergodique, **91**
 - exacte, 24
 - image, **11**
 - invariante, **11**, 90
 - mélangeante, **12**, 24
 - SRB, 36

- équivalente, 17, 88
- métrique
 - adaptée, 25, 50
 - hyperbolique, **52**
- minimal, 83
- modèle symbolique
 - cas dilatant, 16
 - difféomorphisme, 26
 - fer à cheval, 40, 81
 - flot, 51
- non errant, **35**
- norme
 - C^k , 9
 - hyperbolique, **52**
 - uniforme, 9
- orbite, **9**
 - flot, 49
 - positive, **9**
- pantalon, 39
- partition de Markov, **71**, 81
- période primitive, 9
- périodique, **9**, 34, 44, 51, 70, 71
- pistage, 69
- plateau, 50
- point
 - fixe, **9**
 - homocline, **43**
 - périodique, **9**, 34, 44, 70, 71
 - périodique hyperbolique, **43**
 - selle, 38
- positive, **92**
- primitive, 9
- produit local, 69
- propre, 72
- rectangle, **72**
- régularité extérieure, 86
- régulière, matrice, 83
- semi-conjugaison, **10**, 41
- simplement transitivement, 53
- SRB, mesure, 36
- stabilité
 - difféomorphisme Anosov, 26
 - flot d'Anosov, 50
 - structurelle, **10**, 26
 - structurelle, Axiome A, 35
 - structurelle, flot, **50**
- stable
 - variété locale, 67
 - distribution, **26**
 - variété, 43, 67
- stochastique, 79
- surface, 38
- surface modulaire, 57, 64
- surface à courbure négative, 57
- suspension, **50**
- système dynamique
 - discret, 8
 - inversible, 8
- théorème
 - de fermeture, 70
 - d'uniformisation, 57
 - de Birkhoff-Smale, 44
 - de classification, 16, 31
 - de codage, cas Anosov, 26
 - de codage, cas Anosov, flot, 51
 - de codage, cas Axiome A, 35
 - de codage, cas dilatant, 16
 - de densité L^p , 86
 - de Perron-Frobenius, 80
 - de pistage, 69
 - de Radon-Nikodym, 20, 87
 - de stabilité structurelle, 26, 35, 50
 - du point fixe de Banach, 85
 - du point fixe hyperbolique, 32
 - ergodique de Birkhoff, 89
 - ergodique, flot, 92
- topologiquement mélangeant, **9**, 24, 36, 83
- tore, 12
- transitivité, 9
 - Anosov, 31
 - application dilatante, 17

- difféomorphisme Anosov, 26
- décalage, 10, 83
- flot, 49
- flot d'Anosov, 51
- transitivité, Anosov, 26
- transversalité forte, 35, **68**
- uniformément hyperbolique, **25, 50**
- variété
 - instable, 43, 67
 - stable, 43, 67
 - stable locale, 67
- vecteur de probabilité, **79**