

Systemes dynamiques  
Cours de M1

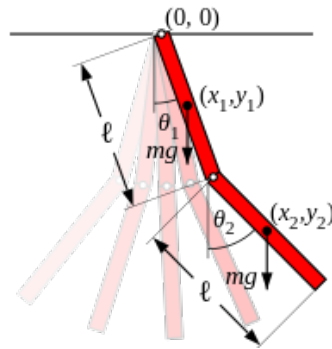


# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Systèmes dynamiques à temps discret</b>	<b>7</b>
<b>1 Dimension un (I) : l'application logistique</b>	<b>9</b>
1.1 Cadre général	9
1.2 Le modèle logistique de Verhulst	10
1.3 $T_4$ est chaotique	11
1.4 Base 2 et codage	15
1.5 Justification mathématique	15
1.6 Cas convergent	16
1.7 Ouverture : doublement de périodes, la "zone des tempêtes"	17
<b>2 Dimension un (II) : le théorème de Sharkovsky</b>	<b>19</b>
2.1 Énoncé	19
2.2 Lemmes	21
2.3 Preuve du théorème	22
2.4 Croissance des orbites périodiques	22
2.5 Énoncé complet	23
2.6 Ouverture : systèmes dynamiques topologiques	23
<b>3 Systèmes dynamiques linéaires</b>	<b>27</b>
3.1 Les lapins et la calculatrice	27
3.2 Systèmes dynamiques linéaires	29
3.3 Classification et dessins pour le plan	30
3.4 Dimension finie	31
3.5 Linéarisation des points fixes attractifs	35
3.6 Matrices de graphes, codage	35
3.7 Ouvertures	37
<b>4 Dimension un (III) : rotations du cercle</b>	<b>39</b>
4.1 La suite des premiers chiffres de 1, 2, 4, 8, 16, ...	39
4.2 Les rotations irrationnelles du cercle	39
4.3 Minimalité	41
4.4 Équirépartition	43

4.5	Observables continues . . . . .	46
4.6	Ouverture : la théorie ergodique . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Systèmes de fonctions itérées (IFS)</b>	<b>49</b>
5.1	Ensembles fractals et images de synthèse . . . . .	49
5.2	Formalisation . . . . .	52
5.3	La distance de Hausdorff . . . . .	53
5.4	Preuve de la complétude . . . . .	54
5.5	Complément : dépendance continue en un paramètre . . . . .	55
5.6	Ouverture : dimension fractale . . . . .	56
	<b>Intermède historique</b>	<b>57</b>
<b>II</b>	<b>Systèmes dynamiques à temps continu</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Théorème fondamentaux</b>	<b>61</b>
6.1	Existence et unicité . . . . .	62
6.2	Solutions maximales, explosion . . . . .	65
6.3	Autres cadres . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Dimension un</b>	<b>69</b>
7.1	Théorèmes fondamentaux . . . . .	69
7.2	Barrières . . . . .	71
7.3	Les équations différentielles à variables séparables . . . . .	72
7.4	Equations linéaires d'ordre 1 . . . . .	73
7.5	Changement de variable . . . . .	74
<b>8</b>	<b>Comparaison de solutions, flot</b>	<b>75</b>
8.1	Lemme de Gronwall . . . . .	75
8.2	Applications : comparaison de solutions . . . . .	76
8.3	Flot d'un champ de vecteurs complet . . . . .	77
8.4	Champs de vecteurs et difféomorphismes . . . . .	79
8.5	Théorème de redressement (la "boîte à flot") . . . . .	81
<b>9</b>	<b>Champs de vecteurs linéaires</b>	<b>83</b>
9.1	Généralités . . . . .	83
9.2	Dimension deux . . . . .	84
<b>10</b>	<b>Champs de vecteurs non linéaires du plan</b>	<b>87</b>
10.1	Propriétés asymptotiques . . . . .	87
10.2	Le théorème de Poincaré-Bendixson . . . . .	88
10.2.1	Variante . . . . .	92
10.3	Ouverture : équation différentielle sur les variétés . . . . .	92

# Introduction



Le [pendule double](#) est un exemple fascinant de système mécanique avec un comportement imprévisible, bien qu'il soit régit par un très petit nombre de degrés de liberté (deux angles et deux vitesses angulaires, soit quatre degrés de liberté). Ce type de comportement "sensible aux conditions initiales" est une découverte majeure du XX<sup>ème</sup> siècle, à la fois en mathématiques (de Henri Poincaré en 1887 à Stephen Smale vers 1960), en physique (Van der Pol, en 1920, réalise la première observation expérimental d'un système chaotique dans un circuit électrique), en biologie (May, en 1976, attire l'attention des biologistes sur des modèles mathématiques simples, en dynamique des populations, qui rendent compte une dynamique complexe), *etc.*

La physique fournit facilement un modèle mathématique pour le pendule double, sous forme d'un système de deux équations différentielles d'ordre deux. Comprendre le comportement du pendule double revient donc à étudier ce système d'équations différentielles. Depuis Poincaré, les mathématicien-ne-s ont compris qu'au-delà de certaines équations très simples, il était illusoire d'espérer décrire les solutions à l'aide de formules ; on cherche donc à comprendre les propriétés *qualitatives* des solutions : y a-t-il des solutions périodiques ? Est-ce que toute solution non périodique se rapproche asymptotiquement d'une solution périodique ? *etc.* Voici un résultat typique de cette théorie : *Pour toute suite d'entiers positifs  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , il existe une condition initiale (une façon de lancer le pendule double) pour laquelle le bras inférieur fait  $n_1$  tours dans le sens direct, puis  $n_2$  tours dans le sens indirect,  $n_3$*

tours dans le sens direct, etc.

Avant d'aborder les rudiments de théorie qualitative des équations différentielles (EDO), encore appelées *systèmes dynamiques à temps continu*, nous commencerons par considérer des *systèmes dynamiques à temps discret*, qui consistent à répéter une même application, autrement à étudier le comportement des suites

$$x, f(x), f(f(x)), \dots$$

où  $f$  est une application d'un ensemble  $X$  dans lui-même ; ces suites sont appelés *orbites* de l'application  $f$ . Il faut penser à  $X$  comme un espace d'état du système (positions et vitesses pour un système mécanique, pyramide des âges pour une population, etc.), et à  $f$  comme la loi d'évolution du système, qui indique l'état du système à l'instant  $t + 1$  en fonction de l'état du système à l'instant  $t$ . Par rapport aux EDO, les systèmes dynamiques à temps discret ont l'avantage de la simplicité technique, tout en gardant une grande richesse de comportements, permettant donc d'introduire les principaux concepts à moindre frais. Les passerelles entre les deux théories sont d'ailleurs multiples : pour s'en tenir au cas du pendule double, on peut noter qu'au cours du mouvement, le bras supérieur du pendule repasse sans cesse par la position verticale basse ; pour une énergie donnée  $E$  (qui est constante au cours du mouvement si on néglige les frottements), étant donnée un temps  $t$  où le bras supérieur est en position verticale basse, il existe donc un temps  $t'$  avec la même propriété, et la configuration au temps  $t'$  est complètement déterminée par la donnée au temps  $t$  (1) de l'angle  $\theta$  que le bras inférieur fait avec la verticale, (2) de la vitesse angulaire  $\vec{v} = \frac{d\theta}{dt}$  (qui est un nombre réel). En appelant  $f$  l'application qui associe à un couple  $(\theta, \vec{v})$  au temps  $t$  le couple  $(\theta', \vec{v}')$  au temps  $t'$ , on a ainsi ramené l'étude du pendule double à l'étude des orbites de l'application  $f$ .

Ce cours introductif ne permettra malheureusement pas de traiter le pendule double...

Ce cours de M1 est conçu à la fois comme une introduction aux différentes branches du domaine et une illustration des outils mathématiques variés que les étudiants ont acquis en Licence. Nous avons volontairement limité les développements théoriques qui sont traités dans les cours de systèmes dynamiques en M2.

*Dans l'optique d'aider le lecteur à s'approprier le sujet par une lecture active, un certain nombre d'arguments sont rédigés sous forme d'exercice. Ces exercices, dont certains seront traités en TD, font partie intégrante du cours. Les preuves contiennent également un certain nombre de points à détailler par la lectrice, indiqués par **des verbes d'action en couleur**. Par contre, les sections d'ouverture en fin de chapitres ne font pas partie du programme de l'examen.*

Première partie

Systemes dynamiques à temps  
discret





# Chapitre 1

## Dimension un (I) : l'application logistique

Dans ce chapitre, nous introduisons les toutes premières notions de systèmes dynamiques, et nous étudions la dynamique des polynômes de degré 2. En particulier, nous montrons que l'application  $x \mapsto 4x(1-x)$  possède une orbite dense dans le segment  $[-1, 1]$ .<sup>1</sup>

### 1.1 Cadre général

*Dans tous les textes de systèmes dynamiques, on utilise la notation exponentielle pour la composition des applications :  $T^n = T \circ \dots \circ T$ .*

**Définition.** Un *système dynamique topologique* est une application continue  $T : X \rightarrow X$  d'un espace topologique dans lui-même. L'*orbite positive* d'un point  $x$  de  $X$  est l'ensemble

$$O^+(x) = \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

qu'on notera  $O_T^+(x)$  lorsqu'on veut préciser l'application considérée. Le point  $x$  est *fixe* si  $T(x) = x$ , *périodique* s'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $T^n(x) = x$ . L'orbite positive d'un point périodique est aussi appelée *cycle*.

**Définition.** Soit  $T : X \rightarrow X$  et  $U : Y \rightarrow Y$  deux applications continues sur des espaces topologiques. On dit qu'elles sont *semi-conjugées* ( $U$  est un *facteur* de  $T$ ,  $T$  est une *extension* de  $U$ ) s'il existe une application continue surjective  $\Phi : X \rightarrow Y$  tel que  $U\Phi = \Phi T$ . Si  $\Phi$  est un homéomorphisme, alors on dit que  $U$  et  $T$  sont *conjugées*.

---

**Exercice 1.**— Vérifier que sous les notations de la définition précédente, on a  $U^n\Phi = \Phi T^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . En déduire que  $\Phi$  envoie l'orbite positive d'un point  $x$  de  $X$  pour l'itération de  $T$  sur l'orbite positive du point  $y = \Phi(x)$  pour  $U$ . Vérifier que  $y$  est un point fixe de  $U$  si  $x$  est

---

1. Ce chapitre est largement inspiré du texte de Daniel Perrin sur l'application logistique, qu'on trouve facilement sur Internet.

un point fixe de  $T$ . La réciproque est-elle vraie ? Montrer une correspondance analogue pour les orbites périodiques.

---

Pour le mathématicien, la conjugaison est l'isomorphisme des systèmes dynamiques : de même que le théoricien des groupes considère que deux groupes isomorphes ont des propriétés en tout point semblables, que le topologue identifie deux espaces s'ils sont homéomorphes, *etc.*, le dynamique ne fait pas de différence entre deux systèmes dynamiques conjugués. Autrement dit, les systèmes dynamiques topologiques sont l'étude des propriétés des applications continues qui sont invariantes par conjugaison. Pour le physicien, une conjugaison n'est rien d'autre qu'un changement de coordonnées, un point de vue différent sur le même phénomène. Si ceci vous semble trop abstrait, faites l'exercice ci-dessous sur les homothéties vues en coordonnées cartésiennes ou polaires !

---

**Exercice 2.**— **1.** Décrire l'homothétie du plan de centre 0 et de rapport  $\frac{1}{2}$  en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires. **2.** Interprétez le passage du premier point de vue au second comme une (semi-)conjugaison.

---



---

**Exercice 3.**— Dans les petites classes, on étudie les suites réelles définies par une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = f(u_n)$  : il s'agit du premier exemple d'orbites pour un système dynamique topologique ( $X = \mathbb{R}$  et  $T = f$ ). Considérons l'application  $f(x) = \alpha x + \beta$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est conjugué à l'application linéaire  $g(x) = \alpha x$  (chercher une conjugaison affine). En supposant par exemple  $\alpha > 1$ , décrire le comportement de la suite des itérés  $(g^n(y))_{n \geq 0}$  pour un point  $y$  quelconque lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (on dit qu'on a décrit le comportement asymptotique de cette suite). En déduire le comportement asymptotique de la suite des itérés  $(f^n(x))_{n \geq 0}$  pour un point  $x \in \mathbb{R}$  quelconque.

---

## 1.2 Le modèle logistique de Verhulst

Dans son *essai sur le principe de population* (1798), Malthus formule la loi selon laquelle la population d'un pays et du monde en général tend à s'accroître de façon géométrique. Ce modèle conduit à une croissance exponentielle qui n'est évidemment pas soutenable : le seul exemple d'une croissance exponentielle sur une période assez longue concerne l'introduction des lapins en Australie (12 lapins en 1859, 600 millions cinquante ans plus tard...).

Verhulst (1840) cherche un modèle compatible avec l'existence d'une population maximale  $M$  ; il postule alors que l'accroissement de la population  $p$  est proportionnelle à  $p(M - p)$ . Bien plus tard Robert May, biologiste motivé par la modélisation de population d'insectes, attire l'attention des scientifiques sur le comportement étonnant des systèmes dynamiques obtenus (*Simple mathematical models with very complicated dynamics*, 1974). Le physicien théoricien Feigenbaum en décrit les premières propriétés en 1975.

Si on change de variable en posant  $x = p/M$ , on voit que le modèle de Verhulst à temps discret revient à itérer un polynôme  $T_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  de degré 2, qu'on peut

mettre sous la forme  $T_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ , où  $\mu$  est un paramètre fixé. Le nombre  $x$  est le rapport entre la population et la population maximale, si on veut qu'il reste entre 0 et 1 on prend  $\mu \in [0, 4]$ .

Avant de lire la suite, le lecteur est vivement incité à expérimenter le comportement des orbites des applications  $T_\mu$  en utilisant [cette page web](#)<sup>2</sup>. Observer l'existence d'un point fixe qui attire toutes les orbites pour les petites valeurs du paramètre, puis la "bifurcation" où le point fixe devient répulsif avec apparition d'une orbite périodique attractive de période deux, qui finit elle-même par devenir répulsive avec apparition d'une orbite périodique attractive de période 4, et ainsi de suite, jusqu'à un paramètre limite (à déterminer approximativement). Observer enfin ce qui se passe pour  $\mu = 4$ .

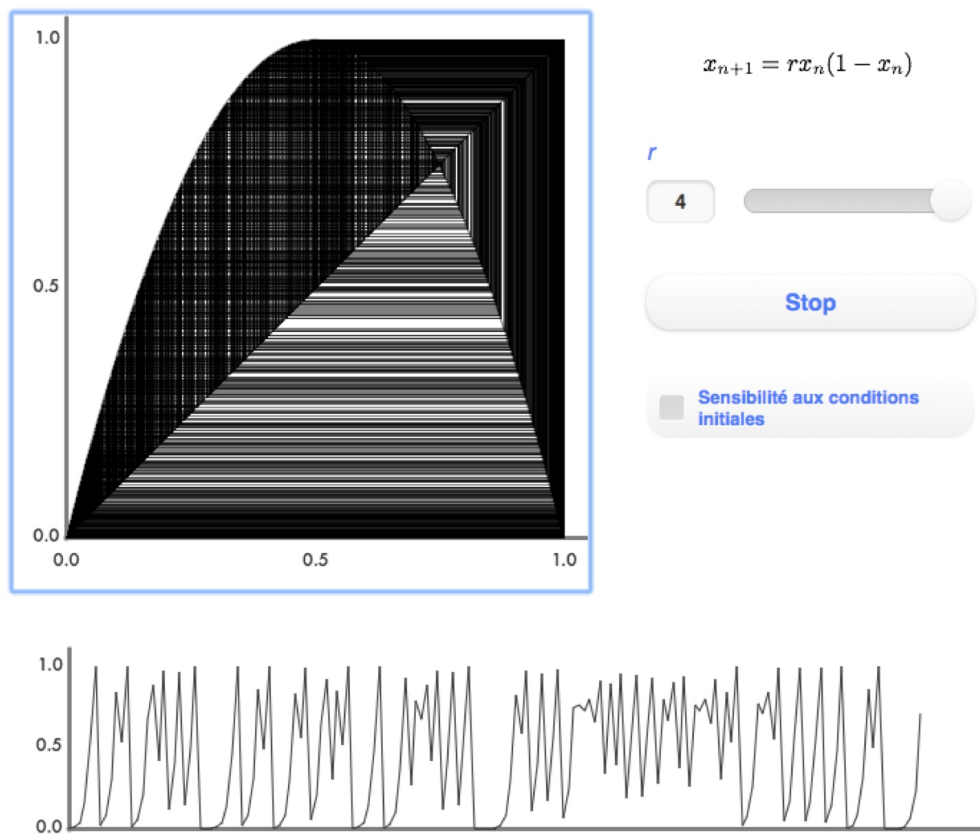


FIGURE 1.1 – Représentation graphique de la suite  $u_{n+1} = T_4(u_n)$  pour une valeur aléatoire de  $u_0$

### 1.3 $T_4$ est chaotique

Pour aiguïser l'appétit de la lectrice, nous commençons par décrire le comportement étonnant des orbites de  $T_4$ .

2. <http://experiences.math.cnrs.fr/Iterations-de-l-application.html>

**Théorème.**

- Il existe un point  $x \in [0, 1]$  dont l'orbite  $O^+(x)$  est dense dans  $[0, 1]$ .
- L'ensemble  $Per(T_4)$  des points périodiques pour  $T_4$  est dense dans  $[0, 1]$ .
- $T_4$  est “sensible aux conditions initiales” (voir la définition plus loin).

**Exercice 4.**—(rappel sur la densité) Soit  $X$  un espace métrique, et  $F$  une partie de  $X$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes (on dit alors que  $F$  est dense dans  $X$ ) :

1.  $F$  rencontre tout ouvert non vide de  $X$ ,
2.  $F$  rencontre toute boule ouverte de  $X$ ,
3. l'adhérence de  $F$  est  $X$ , c'est-à-dire que tout point  $x$  de  $X$  est limite d'une suite d'éléments de  $F$ .

Pour montrer le théorème, nous allons utiliser une stratégie qui fait appel à deux “miracles”. Premier miracle, la dynamique de  $T_4$  “ressemble” à celle de l'application  $z \mapsto z^2$  définie sur le cercle unité du plan complexe, et appelée *doublement de l'angle*. Second miracle, l'écriture en base 2 permet de décrire complètement la dynamique du doublement de l'angle. L'aspect miraculeux de la preuve explique pourquoi ce système dynamique est facilement compréhensible, alors que décrire la dynamique de  $T_\mu$  est un problème ouvert pour de nombreux paramètres  $\mu$  proches mais différents de 4.

**(a) Semi-conjugaison avec le doublement de l'angle** On note  $\mathbb{S}^1$  le cercle unité du plan complexe,

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

et on considère le système dynamique  $S : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  défini par  $S(z) = z^2$ .

**Exercice 5.**— Expliquer pourquoi l'application  $S$  est appelée doublement de l'angle. Aide : utiliser l'argument des nombres complexes.

**Lemme.** *Il existe  $\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1]$  qui réalise une semi-conjugaison entre  $S$  et  $T_4$ .*

*Démonstration.* On pose  $\Phi_1(x + iy) = x$ . En posant  $z = e^{i\theta}$  et en calculant  $\Phi_1(z^2)$ , trouver un polynôme de  $P$  degré 2 tel que  $\Phi_1$  réalise une semi-conjugaison entre  $S$  et la restriction de  $P$  à  $[-1, 1]$ . Conjuguer ensuite  $P$  par l'application affine qui envoie  $-1$  sur  $1$  et  $1$  sur  $0$ .  $\square$

**(b) Ecriture en base deux** Rappelez-vous : en base dix, le nombre  $0,5678$  est défini par

$$0,5678 = 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4}.$$

Multiplier par dix revient à décaler la virgule. Deux nombres dans  $[0, 1]$  dont les  $p$  premières décimales coïncident diffèrent de moins de  $10^{-p}$ .

Toutes ces propriétés ont un équivalent en toute base, et en particulier dans l'écriture en base deux, qu'on appelle aussi écriture binaire. Étant donnée une suite  $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$  de chiffres valant tous 0 ou 1, on définit

$$0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots := \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i 2^{-i}.$$

Noter que la série converge car elle est à termes positifs, la suite des sommes partielles est donc croissante, et majorée par  $0, 111\dots = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} = 1$ . Tout nombre dans  $[0, 1]$  admet une écriture de ce type (on trouve l'écriture en base 2 d'un nombre  $x_0$  en appliquant l'algorithme suivant : si  $x_0 < 2^{-1}$  on pose  $\varepsilon_1 = 0$  et  $x_1 = 2x_0$ ; sinon on pose  $\varepsilon_1 = 1$  et  $x_1 = 2x_0 - 1$ ; ensuite on réapplique le procédé avec  $x_1$  à la place de  $x_0$ , etc.). La multiplication par deux consiste à décaler la virgule

$$2 \times 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots = \varepsilon_1 + 0, \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cdots.$$

(vérifier à l'aide de la définition). Enfin, deux nombres dans  $[0, 1[$  qui admettent une écriture en base 2 dont les  $p$  premiers chiffres coïncident diffèrent de moins de  $2^{-p}$ .

Le lien avec notre application  $S$  se fait via l'argument. En effet, on a  $S(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi 2t}$ . Si on écrit  $t = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$  en base 2, alors  $2t = \varepsilon_1 + 0, \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cdots$  et donc  $2\pi \times 2t = 2\pi \times 0, \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cdots$  modulo  $2\pi$ , on a donc

$$S(e^{2i\pi 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots}) = e^{2i\pi 0, \varepsilon_2 \varepsilon_3 \cdots}.$$

En résumé, **appliquer  $S$  revient à décaler les chiffres de l'écriture en base 2 de  $t$  en effaçant le premier chiffre**. Cette petite observation va être la clé de la compréhension de la dynamique de  $S$ .<sup>3</sup>

### (c) Points périodiques

**Exercice 6.**—

1. Exemple : décrire l'orbite par  $S$  de  $e^{2i\pi 0,001001001001\dots}$ .
2. À l'aide de l'écriture en base 2, décrire l'ensemble  $\text{Per}(S)$  des points périodiques de  $S$ .
3. Montrer que  $\text{Per}(S)$  est dense dans  $\mathbb{S}^1$  : étant donné un  $x = e^{2i\pi 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots} \in \mathbb{S}^1$ , et un entier  $p \geq 1$ , trouver explicitement un point  $x_p$  qui est périodique pour  $S$  et à distance de  $x$  inférieure à  $2\pi 2^{-p}$ . On utilisera la majoration de la distance dans le cercle par la longueur d'arc :

$$d(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi t'}) \leq 2\pi |t - t'|.$$

4. Montrer le lemme suivant :

**Lemme.** Soit  $\Phi : X \rightarrow Y$  une application continue surjective entre deux espaces métriques, alors l'image par  $\Phi$  de toute partie dense de  $X$  est une partie dense de  $Y$ .

5. En déduire que  $\text{Per}(T_4)$  est dense dans  $[0, 1]$ .

---

3. Cette observation peut s'exprimer comme une semi-conjugaison (encore une!), entre l'application "décalage" sur l'ensemble  $\mathcal{C}$  des suites de 0 et de 1 et le doublement de l'angle. Nous n'exprimons pas les choses de cette façon pour éviter d'avoir à décrire la distance sur l'ensemble  $\mathcal{C}$ , qui en fait un ensemble de Cantor.

**(d) Une orbite dense**


---

**Exercice 7.**— On considère un nombre  $t \in ]0, 1[$  ayant la propriété suivante : toute suite finie  $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p$  de 0 et de 1 apparaît quelque part dans la suite des décimales de  $t$ .

1. Expliquer comment construire un tel nombre  $t$ .
  2. On pose  $x = e^{2i\pi t}$ . Montrer que l'orbite  $O_S^+(x)$  est dense dans  $\mathbb{S}^1$ .
  3. On pose  $y = \Phi(x)$ . En déduire que  $O_{T_4}^+(y)$  est dense dans  $[0, 1]$ .
- 

**(e) Sensibilité aux conditions initiales**

**Définition.** On dit qu'un système dynamique topologique  $T : X \rightarrow X$ , sur un espace métrique  $X$ , est *sensible aux conditions initiales* (SCI) s'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x'_0 \in X \quad \exists n \geq 1 \quad d(x_0, x'_0) < \delta \text{ et } d(T^n(x_0), T^n(x'_0)) \geq c.$$

Autrement dit : si on a une incertitude ( $\delta$ ), aussi petite soit-elle, sur l'état initial du système (on croit que c'est  $x_0$  mais en réalité c'est peut-être  $x'_0$ ), alors il est impossible de prédire le futur indéfiniment avec une précision supérieure à  $c$ .

---

**Exercice 8.**— Montrer que le temps  $n$  est forcément non borné : si on fixe  $x_0$  et que, pour chaque  $\delta > 0$ , on choisit un point et un  $n_\delta$  satisfaisant la définition, alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} n_\delta = +\infty.$$


---

---

**Exercice 9.**—

1. Montrer que  $S$  vérifie la condition (SCI+) :

$$\forall x_0 \forall \delta > 0 \exists n \geq 1 \quad S^n(B(x_0, \delta)) = \mathbb{S}^1.$$

Intuition géométrique : la longueur d'un arc de cercle double à chaque fois qu'on itère  $S$ , donc ça finit par recouvrir le cercle.

2. (optionnelle) Montrer que cette condition entraîne la sensibilité aux conditions initiales, avec  $c = 1$  qui est la moitié de la distance entre deux points diamétralement opposés sur le cercle.
  3. Montrer que  $T_4$  vérifie la propriété (SCI+).
  4. En déduire la sensibilité aux conditions initiales pour  $T_4$ .
- 

Quelques exercices pour synthétiser cette section.

---

**Exercice 10.**— Placer sur un diagramme toute les (semi-)conjugaison utilisées, y compris l'écriture en base 2.

---



---

**Exercice 11.**— Soient  $U, T$  semi-conjuguées (voir la définition). Montrer que l'image par  $\Phi$  d'une partie dense de  $X$  est une partie dense de  $Y$ . En déduire que

1. Si l'ensemble  $\text{Per}(T)$  est dense alors  $\text{Per}(U)$  est dense.
  2. Si  $T$  admet un point dont l'orbite positive est dense, alors  $U$  aussi.
  3. Supposons que pour tout ouvert  $O$  de  $X$ , il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que  $T^{n_0}(O) = X$ . Montrer que dans ce cas,  $U$  vérifie la propriété analogue. En déduire que  $U$  est sensible aux conditions initiales.
-

## 1.4 Base 2 et codage

L'écriture d'un nombre en base deux peut être vu comme un premier exemple de "codage" d'un système dynamique, procédé que nous utiliserons à nouveau au chapitre suivant. Soit  $I_0 = [0, \frac{1}{2}[$  et  $I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$  qui forment une partition de l'intervalle  $[0, 1[$ . Etant donné un nombre  $x \in [0, 1[$ , on considère son orbite sous l'application  $U : x \mapsto \{2x\}$  qui consiste à multiplier par deux modulo 1. Définissons la suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  comme étant caractérisée par la propriété :

$$\forall n \geq 0, \quad U^n(x) \in I_{\varepsilon_n}.$$

On dit que la suite  $(\varepsilon_n)$  code l'itinéraire de l'orbite de  $x$  relativement à la partition.

---

**Exercice 12.**— Montrer que la suite  $(\varepsilon_n)$  donne le développement de  $x$  en base 2 :

$$0, \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots := \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n 2^{-n-1}.$$


---

## 1.5 Justification mathématique

Y a-t-il une raison purement mathématique à étudier cette famille de systèmes dynamiques ? Les polynômes de degré deux sont les applications mathématiquement les plus simples dont l'itération conduit à des comportements compliqués. Dans l'exercice qui suit, on justifie l'étude de la famille particulière  $x \mapsto \mu x(1-x)$  : elle contient, à conjugaison près, tous les polynômes intéressants d'un point de vue dynamique.

---

**Exercice 13.**— Soit  $P(X) = aX^2 + bX + c$  un polynôme réel de degré deux.

1. On suppose d'abord que  $P$  n'a pas de point fixe dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P$  est conjugué à un polynôme sans point fixe avec  $a > 0$ . On suppose désormais  $a > 0$ , montrer que  $d = \inf |P(x) - x| > 0$ . En déduire le comportement des orbites.

On suppose désormais que  $P$  admet un point fixe  $x_0$ .

2. Montrer que  $P$  est conjugué, via une translation, à un autre polynôme de degré 2 dont 0 est un point fixe. On supposera dans la suite que  $P$  fixe 0, à quoi correspond cette hypothèse sur les coefficients  $a, b, c$  ?

3. On se place d'abord dans le cas où 0 n'a pas d'autre antécédant par  $P$ , montrer que  $P$  est conjugué à  $x \mapsto x^2$ . Etudier le comportement des orbites de cette application en fonction du point initial.

4. On se place enfin dans le cas où 0 a un autre antécédant  $x_1$  par  $P$ . Montrer que  $P$  est conjugué à une application de la famille logistique par une transformation affine.

---

## 1.6 Cas convergent

**Théorème.** *Supposons  $0 \leq \mu \leq 3$ . Alors toute orbite est convergente.*

On admet les propriétés qu'on voit en traçant le graphe :

- Les points fixes de  $T_\mu$  sont 0 et  $\tau = 1 - \frac{1}{\mu}$ , les dérivées y sont respectivement  $\mu$  et  $2 - \mu$ . Notons que  $\tau \in [0, 1]$  ssi  $\mu \geq 1$ .
- $\mu \in (0, 1]$ , 0 est le seul point fixe dans  $[0, 1]$ ,  $f(x) < x$  pour tout  $x \in (0, 1]$ . Il y a un intervalle  $J = [\tau, \tau']$  stable par  $T_\mu$  et qui contient  $[0, 1]$ . On a  $f(x) > x$  pour tout  $x \in (\tau, 0)$ , et  $f([1, \tau']) = [\tau, 0]$ .
- pour  $\mu \in [1, 2)$ , la situation ressemble à celle d'avant avec  $[0, 1]$  dans le rôle de  $J$ .
- $\mu \in (2, 3)$ ,  $\tau$  a une dérivée négative mais dont la valeur absolue est  $< 1$ .  $T_\mu$  est croissante entre 0 et  $1/2$ ,  $T_\mu(1/2) = \mu/4$  et  $T(\mu/4) \geq 1/2$ . L'intervalle  $[1/2, \tau]$  est stable par  $T_\mu^2$  et on a  $T_\mu^2(x) > x$  pour tout  $x \in [1/2, \tau)$ .

On en déduit le comportement des orbites :

---

**Exercice 14.**— 1. Supposons  $0 < \mu \leq 1$ . Montrer que toute orbite converge vers 0.

2. Toujours pour  $\mu \in (0, 1]$ , soit  $\Phi$  l'unique application affine qui envoie  $J$  sur  $[0, 1]$  en préservant l'orientation. Soit  $S_\mu = \Phi T_\mu \Phi^{-1}$ . Montrer, avec le moins de calcul possible, que  $S_\mu = T_\nu$  pour une valeur de  $\nu$  et donner cette valeur en fonction de  $\mu$ . En déduire le comportement des orbites lorsque  $\mu \in [1, 2]$ .

3. On suppose  $\mu \in (2, 3)$ . Montrer que toute orbite converge (en escargot) vers le point fixe  $\tau$  (sauf deux orbites, lesquelles?).

---

La preuve du dernier point est plus difficile. On pose  $\hat{\tau}$  l'autre antécédant de  $\tau$ ,  $J = [\hat{\tau}, \tau]$ , on a  $T^2(J) \subset [1/2, \tau]$  ( $T^2(J) = T[\tau, \mu/4] = [T(\mu/4), \tau]$ ) et on vérifie (\*) que  $T(\mu/4) \in [1/2, \tau]$ . L'intervalle  $[1/2, \tau]$  est stable par  $T^2$ , on y a (\*\*)  $T^2(x) > x$  sauf pour le point fixe  $\tau$  et on en déduit que l'orbite d'un point de  $J$  converge vers  $\tau$ . Pour un point  $x$  à gauche de  $J$ , l'orbite de  $x$  est croissante jusqu'à ce qu'elle arrive dans  $J$  : sinon elle serait majorée donc convergente vers un point fixe inexistant. Un point à droite de  $J$  est envoyé à gauche, donc OK.

En résumé :

- $\mu \in (0, 1]$ , 0 est le seul point fixe et attire toutes les orbites.
- $\mu \in [1, 2)$ ,  $\tau$  est attractif et attire toutes les orbites (sauf 0,1).
- $\mu \in [1, 3)$ ,  $\tau$  est attractif et attire toutes les orbites sauf celles qui tombent sur 0. Pour  $\mu = 2$ , le point est super-attractif. Pour  $\mu \in (2, 3)$ , il a une dérivée négative donc convergence en escargot.

---

**Exercice 15.**— Dans cet exercice  $T$  est une application de classe  $C^1$  définie au voisinage d'un point  $x_0$  qui est fixe.

1. Supposons que  $|T'(x_0)| < 1$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que  $T(V) \subset V$  et l'orbite de tout point  $x$  de  $V$  converge vers  $x_0$ . De plus la convergence est exponentielle si  $T'(x_0) \neq 0$  et super-exponentielle sinon. On dit que  $x_0$  est un point fixe attractif.



## 1.7. OUVERTURE : DOUBLEMENT DE PÉRIODES, LA “ZONE DES TEMPÊTES” 17

2. Supposons que  $|T'(x_0)| > 1$ . L'orbite d'un point  $x$  peut-elle converger vers  $x_0$ ? On dit que  $x_0$  est un point fixe répulsif.

3. Supposons que  $|T'(x_0)| = 1$ , on dit que  $x_0$  est indifférent. Y a-t-il des orbites qui convergent vers  $x_0$  parfois, toujours?

*On verra plus loin une généralisation en dimension supérieure \*\*\*\*.*

---

**Exercice 16.**—(Stabilité des points fixes) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un point fixe de  $f$ , on suppose que  $f'(x_0) \neq 1$ .

1. Montrer qu'une application  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et assez proche de  $f$  pour la distance uniforme admet un point fixe proche de  $x_0$  (commencer par exprimer cette phrase de manière plus précise).

2. Soit  $(f_\mu)_{\mu \in ]-1,1[}$  une famille d'applications telle que  $f_0 = f$  et  $(x, \mu) \mapsto f_\mu(x)$  est de classe  $C^r$ . Montrer que pour tout  $\mu$  assez proche de 0,  $f_\mu$  admet un unique point fixe  $x_\mu$  proche de  $x_0$ , et que l'application  $\mu \mapsto x_\mu$  ainsi définie est de classe  $C^r$ . *Indication : on appliquera le théorème des fonctions implicites.*

---

## 1.7 Ouverture : doublement de périodes, la “zone des tempêtes”

On se contente d'une description informelle. Juste au-delà de 3, on a une orbite périodique de période 2 qui est attractive, toutes les orbites “convergent vers ce cycle” sauf les pré-images des points fixes. Lorsque  $\mu$  augmente cette orbite finit par devenir répulsive, au même moment apparait une orbite attractive de période 4. Notons  $\mu_n$  le plus petit paramètre pour laquelle on a une orbite périodique de période  $2^n$ , alors la suite  $(\mu_n)$  est croissante et converge vers un  $\mu_\infty < 4$  (voir les simulations en ligne).

Que se passe-t-il pour  $\mu$  compris entre  $\mu_\infty$  et 4? On ne sait pas répondre à cette question pour toutes les valeurs de  $\mu$ , mais trois théorèmes très difficiles donnent des réponses partielles.

On définit l'ensemble  $C$  des paramètres chaotiques (pour une définition précise, voir par exemple le texte de Daniel Perrin) et l'ensemble  $H$  des paramètres pour lesquels il existe une orbite périodique attractive. Ces deux ensembles sont disjoints.

**Théorème** (Jakobson 1981). *L'ensemble  $C$  des paramètres chaotiques est de mesure de Lebesgue strictement positive.*

**Théorème** (Grackzyk-Swiatek, Lyubich 1997). *L'ensemble  $H$  est un ouvert dense dans  $[3, 4]$ .*

**Théorème** (Lyubich 2002). *L'ensemble  $H \cup C$  est de mesure totale dans  $[0, 4]$ .*



# Chapitre 2

## Dimension un (II) : le théorème de Sharkovsky

*“About twenty years ago I had a general feeling that the structure of one-dimensional dynamical systems is relatively straightforward and can be understood until the end, and at the same time, the results valid for one-dimensional case, have not natural many-dimensional analogues. Subsequent years have shown that both of these feelings are wrong”. Yacob Sinai, Modern problems of ergodic theory, 1995.*

Le théorème de Sharkovsky date de 1964, mais c’est seulement après 1975 qu’il est devenu célèbre en occident, révélant la richesse des systèmes dynamiques en dimension 1.<sup>1</sup>

### 2.1 Énoncé

Dans tout ce chapitre, on considère une application continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous allons nous contenter de démontrer le cas le plus célèbre du théorème, qui s’énonce ainsi (voir l’énoncé général plus bas).

**Théorème** (Sharkovsky (1964), “période trois implique le chaos”). *Supposons que  $f$  admette une orbite périodique de période trois. Alors  $f$  admet une orbite périodique de toute période.*

Pour illustrer le théorème il suffit de choisir  $f$  avec  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 0$ . Par exemple, d’après le [théorème d’interpolation de Lagrange](#), il existe un unique polynôme de degré deux vérifiant ces trois conditions, et il s’agit de  $P(X) = -\frac{1}{2}(X - 2)(3X + 1)$ . Dans la famille logistique on a un cycle de période 3 pour  $f(x) = 3.84x(1 - x)$ , voir les simulations.

---

1. Références pour ce chapitre : le texte de Daniel Perrin cité au chapitre précédent, l’article de Keith Burns et Boris Hasselblatt, *The Sharkovsky theorem : a natural and direct proof*. Un texte très agréable à lire, avec une preuve complète : [Le théorème de Sharkovsky](#), Olivier Benoist et Xavier Caruso.

On peut généraliser un peu l'énoncé, à peu de frais, avec la remarque suivante. Soit  $f$  ayant une orbite de période trois comme dans le théorème, soit  $a$  tel que  $f^3(a) = a$ , et soit  $I$  le plus petit intervalle contenant l'orbite de  $a$  (il est bordé par deux des trois points de l'orbite). La preuve du théorème va consister à trouver, pour tout entier  $n \geq 1$ , une orbite périodique incluse dans  $I$ . Soit maintenant une fonction  $g$ , continue, à valeurs réelles, mais qui n'est définie que sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  et non pas sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Cette application n'est pas un système dynamique au sens où on l'a défini plus haut, mais on peut néanmoins définir l'orbite d'un point  $x$  sous l'itération de  $g$  : le premier terme est  $x$ , le second est  $g(x)$  ; si  $g(x)$  n'appartient plus à  $J$  alors l'orbite s'arrête là, sinon le troisième terme est  $g(g(x))$ , etc.. Supposons alors que  $g$  admette une orbite périodique de période 3. On peut construire facilement une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, qui prolonge  $g$ . Cette application  $f$  vérifie les hypothèses du théorème, ainsi elle admet des orbites périodiques de toutes périodes, incluses dans  $J$  d'après la remarque plus haut. Mais puisque  $f$  coïncide avec  $g$  sur l'intervalle  $J$ , ce sont aussi des orbites périodiques pour  $g$ . Conclusion : le théorème est aussi valable pour des applications continues définies sur n'importe quel intervalle de  $\mathbb{R}$ .

La preuve du théorème est un argument de codage (voir aussi la section 1.4 ci-dessus) : partant d'un intervalle contenant l'orbite de période trois, on le découpe en intervalles plus petits et on décrit les itinéraires des orbites de l'application  $f$  relativement à ces intervalles. La clé consiste à montrer que certains itinéraires périodiques sont réalisés par des orbites périodiques. Le codage nous permettra d'aller plus loin en montrant qu'il y a "beaucoup" d'orbites périodiques (croissance exponentielle).

## Histoire

L'un des premiers résultats en dynamique de dimension un est dû à Coppel : il démontre en 1955 que s'il y a une orbite périodique (qui n'est pas un point fixe), alors il y a une orbite périodique de période deux, ce qu'on peut voir comme une version très faible du théorème de Sharkosvsky. Celui-ci publie son théorème en 1964 ; l'article *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, Internat. J. Chaos Appl. Sci. Engrg. 5 (1995) 1263-1273, est la traduction anglaise de l'article initial paru en russe dans Ukrain. Math. Zh. 16 (1964) 61-71. L'article passe inaperçu en occident : T. Li et J. Yorke redécouvrent une partie du théorème en 1975. Le passage qui suit est extrait d'un article de Burns et Hasselblatt expliquant une preuve simple du théorème de Sharkosvsky :

"In 1975 this Monthly [American Mathematical Monthly] published a famous paper Period three implies chaos [LY] by Li and Yorke with the result that the presence of a periodic point of period 3 implies the presence of periodic points of all other periods. This amounts to 3 being the initial number in the Sharkovsky order. Some time after its publication, Yorke attended a conference in East Berlin, and during a river cruise a Ukrainian participant approached him. Although they had no language in common, Sharkovsky (for it was he) managed to convey, with translation by Lasota and Mira, that unbeknownst to Li and Yorke (and perhaps all of western mathematics) he

had proved his results about periodic points of interval mappings well before [LY], even though he did not at the time care to say what that result was.”

## 2.2 Lemmes

On dira que *l'intervalle  $I$  couvre l'intervalle  $J$*  si  $f(I)$  contient  $J$ , on notera cette propriété  $I \rightarrow J$ .

**Lemme 2.2.1** (“de l'intervalle gourmand”). *Si  $I$  se couvre lui-même, alors  $I$  contient un point fixe.*

En effet, si  $I = [a, b]$  se couvre lui-même alors il contient un point  $a'$  tel que  $f(a') = a$  et un point  $b'$  tel que  $f(b') = b$  (NB : on peut avoir  $a' > b'$ ). En particulier  $f(a') \leq a'$  et  $f(b') \geq b'$ ; en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à  $f(x) - x$  on trouve un point fixe dans l'intervalle délimité par  $a'$  et  $b'$ .

**Lemme 2.2.2** (“de l'intervalle ajusté”). *Si  $I$  couvre  $J$  alors  $I$  contient un intervalle  $K$  tel que  $f(K) = J$ .*

(Evidence géométrique : le graphe de  $f$  contient un morceau qui “traverse” la bande  $J \times I$ .)

Notons  $I = [a, b]$  et  $J = [c, d]$ . Comme dans la preuve précédente, on trouve  $a', b'$  tels que  $f(a') = c$  et  $f(b') = d$ . Supposons  $a' < b'$  (le cas opposé se traite de façon analogue). Posons

$$\alpha = \sup\{x \in [a', b'] \mid f(x) = c\}.$$

$\alpha$  existe et on a  $f(\alpha) = c$ , en particulier  $\alpha < b'$ . Posons de même

$$\beta = \inf\{x \in [\alpha, b'] \mid f(x) = d\}$$

qui existe et vérifie  $f(\beta) = d$ . L'intervalle  $[\alpha, \beta]$  convient, autrement dit  $f([\alpha, \beta]) = J = [c, d]$ . L'inclusion réciproque est claire, il s'agit de voir que l'image de  $[\alpha, \beta]$  ne contient pas de point hors de  $J$ . Si par exemple on a un  $x \in [\alpha, \beta]$  tel que  $f(x) < c$ , le théorème des valeurs intermédiaires fournit un  $x'$  dans  $[x, \beta]$  tel que  $f(x') = c$ , et ceci contredit la définition de  $\alpha$ . On montre de même que  $f(x) \leq d$  pour tout  $x \in [\alpha, \beta]$ .

---

**Exercice 17.**—Détailler le cas où  $a' > b'$  dans la preuve.

---

**Lemme 2.2.3** (“de l'itinéraire”). *Considérons un entier  $n \geq 1$ , et un cycle d'intervalles  $J_0 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$  se couvrant successivement, de longueur  $n$ . Il existe alors un point fixe  $x$  de  $f^n$  tel que pour tout  $p \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $f^p(x) \in J_p$ .*

On dira que le point  $x$  suit le cycle d'intervalles. Attention, rien ne garantit que  $x$  est de période exactement  $n$  : puisque  $f^n(x) = x$ , on sait seulement que la période de  $x$  est un diviseur de  $n$  (ex :  $x \mapsto -2x$  pour le cycle  $[-1, 0] \rightarrow [0, 1] \rightarrow [-1, 0]$ ).

*Démonstration.* Ajuster récursivement à reculons pour trouver finalement dans  $J_0$  un intervalle gourmand pour  $f^n$ . On trouve d'abord  $J'_{n-1} \subset J_{n-1}$  tel que  $f(J'_{n-1}) = J_0$ , puis  $J'_{n-2} \subset J_{n-2}$  tel que  $f(J'_{n-2}) = J'_{n-1}$ , etc., et finalement,  $J'_0 \subset J_0$  tel que  $f(J'_0) = J'_1$ . Le lemme de l'intervalle gourmand fournit un point  $x$  dans  $J'_0$  fixe par  $f^n$ . Pour  $0 \leq p < n$  on a par récurrence  $f^{p+1}(x) \in f(J'_p) = J'_{p+1} \subset J_{p+1}$ .  $\square$

### 2.3 Preuve du théorème

Supposons un point  $a$  de période 3, notons  $b = f(a)$ ,  $c = f(b)$ . Quitte à permuter cycliquement  $a, b, c$ , on a  $a < b < c$  ou  $c < b < a$ . On suppose par exemple que  $a < b < c$ , l'autre cas est analogue. On pose  $I_0 = [a, b]$ ,  $I_1 = [b, c]$ , on a

$$I_0 \rightarrow I_1, I_1 \rightarrow I_0 \cup I_1.$$

Soit  $n \geq 1$  fixé, on a alors un cycle

$$I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1}_{n-1} \rightarrow I_0$$

de longueur  $n$ . Le lemme de l'itinéraire fournit un point  $x$  de  $I_0$ , fixe par  $f^n$ , qui suit le cycle. Il reste à vérifier que  $x$  est de période exactement  $n$ . Si  $n = 1$  il n'y a rien à faire. On suppose dorénavant que  $n \geq 2$ . Supposons par l'absurde qu'il y a un  $p$  strictement compris entre 0 et  $n$  tel que  $f^p(x) = x$ . Alors  $f^p(x) = x \in I_0$ , mais puisque  $x$  suit le cycle ce point appartient aussi à  $I_1$ , on en déduit  $x = b$  (seul point commun aux deux intervalles). Puisque  $b$  est de période 3,  $p$  est un multiple de 3, et en particulier  $n \geq p \geq 3$ . Mais  $f^2(x) = f^2(b) = a \notin I_1$ , ce qui contredit le fait que  $x$  suit le cycle.

### 2.4 Croissance des orbites périodiques

On peut faire un peu mieux que dans l'énoncé du théorème :

**Proposition.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, le nombre d'orbites périodiques de période  $n$  croit au moins exponentiellement vite avec  $n$  : le nombre de points fixes de  $T^n$  est minoré par une quantité équivalente à  $\lambda^n$  avec  $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations de la preuve du théorème de Sharkovsky. Considérons le graphe  $\mathcal{G}$  formé de deux sommets étiquetés  $I_0, I_1$  avec trois arêtes : de  $I_0$  vers  $I_1$ , de  $I_1$  vers  $I_0$  et de  $I_1$  vers  $I_1$ . Soit  $n \geq 1$ , et  $c = (I_{\varepsilon_0}, I_{\varepsilon_1}, \dots, I_{\varepsilon_n})$  un cycle de longueur  $n$  dans ce graphe : ceci signifie que  $\varepsilon_n = \varepsilon_0$  et que  $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$  est une suite de '0' et de '1' qui est admissible pour le graphe, c'est-à-dire dans laquelle il n'y a jamais deux '0' à la suite (par exemple 0100110 n'est pas admissible, mais 01110110 l'est). D'après le lemme de l'itinéraire, il existe un point  $x_c$  qui est fixe pour  $f^n$  et qui suit le cycle ; on dit que la suite périodique  $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1, \dots)$  code l'itinéraire de l'orbite de  $x_c$  relativement à  $I_0, I_1$ . Par exemple, l'orbite du point périodique  $a$  est codée par la suite de période trois (0, 1, 1, ...). On note  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des cycles de

longueur  $n$  du graphe, et  $\text{Fix}(f^n)$  l'ensemble des points fixes de  $f^n$ . On a le lemme suivant.

**Lemme 2.4.1.** *L'application  $c \mapsto x_c$  est une injection de  $\mathcal{C}_n$  dans  $\text{Fix}(f^n)$ .*

En effet, si l'orbite d'un point  $x$  est codée par deux chemins  $c \neq c'$  de même longueur  $n$ , alors cette orbite contient le point  $b$  (seul point d'intersection de  $I_0$  et  $I_1$ ), donc  $x \in \{a, b, c\}$ , mais on voit facilement que ces trois points ont un unique codage de longueur multiple de 3 (et aucun codage de longueur non multiple de 3).

D'un autre côté, on peut montrer que le nombre  $\#\mathcal{C}_n$  de cycles de longueur  $n$  dans le graphe vérifie

$$\#\mathcal{C}_n \sim \lambda^n \text{ avec } \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1,61$$

(ceci sera justifié dans le chapitre suivant, sur les systèmes dynamiques linéaires). Puisqu'on a une injection de  $\mathcal{C}_n$  dans  $\text{Fix}(f^n)$ , le cardinal du premier minore le cardinal du second, ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

---

**Exercice 18.** — Notre estimation porte sur le nombre de points fixes de  $f^n$ , c'est-à-dire de points périodiques de  $f$  dont la période divise  $n$ . En reprenant l'argument ci-dessus, montrer que le nombre de points périodiques de période *exactement*  $n$  est également équivalent à  $\lambda^n$ .

---

## 2.5 Enoncé complet

On définit un ordre bizarre, dit "ordre de Sharkovsky", sur les entiers positifs :

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2.3 \triangleright 2.5 \triangleright 2.7 \triangleright \dots \triangleright 2^2.3 \triangleright 2^2.5 \triangleright 2^2.7 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2.$$

(Noter que tout entier s'écrit de manière unique comme une puissance de 2 fois un nombre impair.) Voici l'énoncé complet du théorème de Sarkovski.

**Théorème** (Sharkovsky, forçage). *Soit  $m$  un entier, supposons que  $f$  admette une orbite périodique de période  $m$ . Alors pour tout  $p$  qui est après  $m$  dans l'ordre de Sharkovsky,  $f$  admet une orbite périodique de période  $p$ .*

**Théorème** (Sharkovsky, réalisation). *Pour tout entier  $m$ , il existe une application continue  $f_m : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  avec la propriété suivante : pour tout entier  $p$ ,  $f_m$  admet une orbite périodique de période  $p$  si et seulement si  $p$  vient après  $m$  dans l'ordre de Sharkovsky.*

## 2.6 Ouverture : systèmes dynamiques topologiques

Les systèmes dynamiques topologiques sont à la fois un outil pour l'ensemble des systèmes dynamiques (dynamique différentiable, dynamique holomorphe, étude des flots géodésiques, etc.), et une branche des systèmes dynamiques.

**Les systèmes dynamiques topologiques comme outil** En tant qu'outil, ils apportent un certain nombre de notions de récurrence, quelques résultats, et des problématiques. Le premier outil est de clarifier les différents types de récurrence. La forme de récurrence la plus forte est l'orbite périodique : le système revient exactement à sa position initiale. En voici d'autres formes, de plus en plus faibles :

- Un point est *récurrent* si son orbite repasse arbitrairement près de lui, autrement dit  $x$  est récurrent s'il fait partie des valeurs d'adhérence de  $O^+(x)$ .
- Un point est  $\omega$ -*limite* s'il existe une orbite qui passe arbitrairement près de lui, autrement dit  $x$  est  $\omega$ -limite s'il existe  $y$  tel que  $x \in O^+(y)$ .
- Un point est *non-errant* si chacun de ses voisinage  $V$  contient un point  $z$  dont l'orbite repasse dans  $V$ .

---

**Exercice 19.**—

1. Montrer que tout point périodique est récurrent, que tout point récurrent est  $\omega$ -limite, que tout point  $\omega$ -limite est non errant. Montrer que l'ensemble des points non errant est un fermé. Pouvez-vous imaginer d'autres formes de récurrence encore plus faible ?

2. Soit  $T : X \rightarrow X$  un système dynamique sur un espace compact. Montrer qu'il existe des points  $\omega$ -limite.

---

On peut montrer qu'un système dynamique topologique sur un espace compact admet toujours des points récurrents (pour cela, on trouve une partie fermée  $Y$  telle que  $T(Y) = Y$  et telle que le système dynamique restreint à  $Y$  est *minimal* : toute orbite est dense (voir le chapitre suivant pour cette notion)).

**Les systèmes dynamiques topologiques comme domaine de recherche** Les systèmes dynamiques topologiques sont aussi une branche de recherche dont l'un des objectifs est de classifier les comportements dynamiques possibles, en fonction de la topologie de l'espace. Par exemple, des chercheurs étudient la dynamique des homéomorphismes sur les espaces de Cantor ; ou encore la dynamique sur les surfaces compactes.

**D'autres théorèmes de forçage d'orbites périodiques** Comme le dit Sinaï dans la citation au début du chapitre, le théorème de Sharkovsky admet des généralisation en dimension supérieure : certaines orbites périodiques forcent la présence d'autres orbites. Cependant, il n'y a pas de généralisation évidente, comme le montre l'exemple suivant.

---

**Exercice 20.**— Construire un difféomorphisme du disque  $\mathbb{D}^2$  qui est l'identité au bord, qui a un point fixe et une orbite de période 3 l'intérieur, et aucune autre orbite périodique.

---

Pour un homéomorphisme du disque, une orbite périodique de période trois ne force pas la présence d'autres orbites périodique : pour forcer des orbites périodiques il faut une hypothèse géométrique sur l'orbite (plus précisément sur ce qu'on appelle son "*type de tresse*"). Sans entrer dans ces détails, voici un théorème assez récent de forçage d'orbites périodiques, résultat de la recherche en dynamique topologique, dont l'énoncé est facile à comprendre (voir aussi le chapitre sur la dynamique hamiltonienne).



**Théorème 2.6.1** (John Franks, Michael Handel, 2003, Patrice Le Calvez 2004).  
*Un homéomorphisme de la sphère, sans point errant, a au moins deux points fixes.  
Si on suppose qu'il a au moins un autre point périodique, alors il en a une infinité.*



# Chapitre 3

## Systemes dynamiques lineaires

Dans ce chapitre, nous etudions les systemes dynamiques lineaires, autrement dit les suites definies par une relation de recurrence lineaire. Ceci revient a calculer les puissances d'une matrice, et l'outil principal est fourni par les theoremes de reduction. Nous decrivons les differents comportements possible pour les orbites, en particulier dans le plan, lorsque modules des valeurs propres sont differents de 1. Pour les valeurs propres de module 1, l'exemple le plus simple est celui des rotations qui font l'objet du chapitre suivant.

### 3.1 Les lapins et la calculatrice

Le modele recreatif propose par Fibonacci (Liber abaci, 1202) conduit a etudier la suite reelle definie par la relation de recurrence  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ , avec  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$ . Un peu d'algebre lineaire montre que la suite croit exponentiellement vite : le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers  $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Variante : au lieu de 0 et 1, on part de de 1 et  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Le resultat obtenu au bout de quelques iterations est tres sensible aux arrondis : avec 5 decimales ca tend vers  $+\infty$ , avec 6,7,8,9 ca tend vers  $-\infty$ , avec 10 vers  $+\infty$  a nouveau, etc (cf Libreoffice). D'où vient cette instabilite numerique ?

En posant  $P_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ , la relation de recurrence s'ecrit

$$P_{n+1} = AP_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a donc

$$P_n = A^n P_0$$

avec  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$  dans le cas instable qui nous intrigue, mais pour bien comprendre ce cas allons decrire tous les comportements possibles en fonction de l'etat initial  $P_0$ .

n=	11 décimales	10 décimales	9 décimales	8 décimales
2	-0,6180339888	-0,6180339887	-0,618033989	-0,61803399
3	0,38196601125	0,38196601130	0,38196601100	0,38196601000
4	-0,23606797750	-0,23606797740	-0,23606797800	-0,23606798000
5	0,14589803375	0,14589803390	0,14589803300	0,14589803000
6	-0,09016994375	-0,09016994350	-0,09016994500	-0,09016995000
7	0,05572809000	0,05572809040	0,05572808800	0,05572808000
8	-0,03444185375	-0,03444185310	-0,03444185700	-0,03444187000
9	0,02128623625	0,02128623730	0,02128623100	0,02128621000
10	-0,01315561750	-0,01315561580	-0,01315562600	-0,01315566000
20	-0,00010696375	-0,00010675470	-0,00010800900	-0,00011219000
50	-0,00081794875	0,38811915370	-1,94550346100	-9,72424551000
100	-23 020 146	10 923 129 646	-54 753 769 105	-273 676 764 939
350	-4,06E+59	1,93E+62	-9,67E+62	-4,83E+63

FIGURE 3.1 – Instabilité du calcul sur ordinateur, selon le nombre de décimales dans l’approximation de  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

La matrice  $A$  a pour polynôme caractéristique  $X^2 - X - 1$ , ses valeurs propres sont donc

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618 \text{ et } -0,618.$$

(noter que  $\lambda_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} + 1$ , par conséquent les suites  $\lambda_{\pm}^n$  vérifient la relation de récurrence). Les vecteurs propres associés sont

$$e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } e_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

(ils sont orthogonaux puisque la matrice  $A$  est symétrique).

Si on part de  $P_0$  sur l’espace propre  $\text{Vect}(e_+)$ , alors on obtient  $P_n = \lambda_+^n P_0$  et la norme de  $P_n$  tend exponentiellement vite vers  $+\infty$ , ce qu’on dessine en mettant des flèches sur la droite correspondante, qu’on appelle “variété instable du point fixe 0”. Si on part de  $P_0$  sur l’espace propre  $\text{Vect}(e_-)$ , alors on obtient  $P_n = \lambda_-^n P_0$  et la norme de  $P_n$  tend exponentiellement vite vers 0, ce qu’on dessine en mettant des flèches sur la droite correspondante, qu’on appelle “variété stable du point fixe 0”. Noter que comme  $\lambda_-$  est négatif, l’application  $A$  échange les deux demi-droites stables : la suite  $(P_n)$  saute alternativement d’une demi-droite à l’autre tout en convergeant rapidement vers 0.

Tout autre point peut s’écrire  $P_0 = x_+ e_+ + x_- e_-$  ; on a donc

$$P_n = A^n P_0 = \lambda_+^n x_+ e_+ + \lambda_-^n x_- e_-.$$

Dès lors que  $x_+ \neq 0$ , on voit que la suite  $(P_n)$  se comporte asymptotiquement comme les points de la variété instable. Plus précisément, l’application  $A^2$  laisse

invariante chaque hyperbole d'équation  $x_+x_- = \text{cte}$  en poussant les points le long des branches dans la direction asymptote à la variété instable. L'application  $A$  échange les hyperboles correspondant à des constantes opposées.

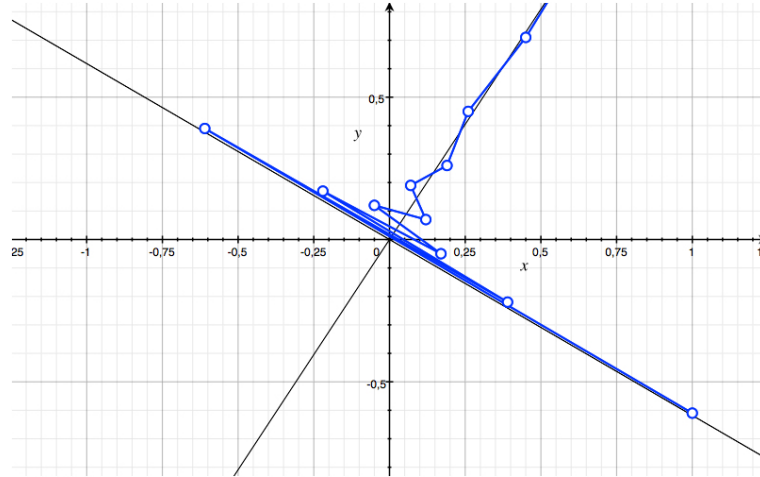


FIGURE 3.2 – Les itérés successifs d'un vecteur proche de la droite  $\text{Vect}(e_-)$

---

**Exercice 21.**— Décrire maintenant ce qui se passe lorsqu'on veut calculer numériquement la suite  $(P_n)$  en partant d'un point de la variété stable. Ne pas oublier que l'ordinateur fait des erreurs d'arrondi. A quoi correspondent les deux comportements opposés obtenus? Comparer au résultat théorique.

---

## 3.2 Systèmes dynamiques linéaires

Soit  $E$  un espace vectoriel réel ou complexe. Un endomorphisme de  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . On peut le voir comme un système dynamique, ce qui veut dire qu'on s'intéresse au comportement asymptotique des orbites  $O^+(p) = (L^n(p))_{n \geq 0}$ .

Supposons  $E$  de dimension finie  $d$ , et choisissons une base  $\mathcal{B} = (e_i)$  de  $E$ . L'application  $\Phi : x = (x_i) \mapsto \sum x_i e_i$  est un isomorphisme entre  $\mathbb{K}^d$  et  $E$  qui conjugue (linéairement) l'application  $L$  avec l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^d$

$$x \mapsto A.x$$

où  $A$  est la matrice de  $L$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En particulier, la suite  $O^+(p)$  tend vers le point fixe  $0_E$  si et seulement si l'orbite  $O_A^+(x)$  du point  $x = \Phi^{-1}(p)$  tend vers 0 dans  $\mathbb{K}^d$ . Changer de base revient à conjuguer la matrice  $A$  par un élément de  $P \in GL(\mathbb{K}^d)$ , les nouvelles orbites sont alors les images des orbites de  $A$  par l'application linéaire de matrice  $P$  (ce que traduit la relation  $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$ ). Ceci ne change pas le comportement dynamique. Pour étudier le comportement des systèmes dynamiques linéaires, on utilise donc la classification des matrices à conjugaison près,

qu'on appelle aussi **réduction des endomorphismes**. Dans toute la suite on identifie chaque matrice  $A$  à l'endomorphisme  $v \mapsto Av$  de  $\mathbb{K}^d$  associé.

---

**Exercice 22.**—(Rappels) Soit  $L$  un endomorphisme d'un espace vectoriel réel ou complexe.

1. Compléter :  $A = (a_{ij})$  est la matrice de  $L$  dans la base  $(e_i)$  si et seulement si ...
  2. Rappeler la **définition** d'une valeur propre et d'un vecteur propre. Aide : non, la définition n'utilise PAS le polynôme caractéristique ! Donner aussi la **caractérisation** par le polynôme caractéristique.
  3. Montrer qu'une famille  $(e_1, \dots, e_k)$  de vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes est toujours libre.
- 

### 3.3 Classification et dessins pour le plan

On commence par décrire complètement la classification à conjugaison près des matrices réelles de taille  $2 \times 2$  : autrement dit, on veut décrire un ensemble de matrices "modèles", les plus simples possible, de façon à ce que toute matrice  $2 \times 2$  soit conjuguée à une et une seule de nos matrices modèles.

La remarque clé est : la relation de conjugaison préserve les valeurs propres et leur multiplicité. Ceci conduit à distinguer les trois cas suivants :

1. Deux valeurs propres réelles distinctes : la matrice est diagonalisable.
2. Une valeur propre double, la matrice est trigonalisable mais pas forcément diagonalisable.
3. Deux valeurs propres complexes conjuguées.

---

**Exercice 23.**— 1. Donner un ensemble de matrices-modèles dans le premier cas.

2. a. (truc à savoir !) Soit  $A = \begin{pmatrix} \lambda & M \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $M \neq 0$ , et soit  $\varepsilon \neq 0$ . Trouver un changement de base très simple qui transforme  $A$  en la matrice triangulaire supérieure avec un  $\varepsilon$  à la place du  $M$ .  
b. En déduire un ensemble de matrices-modèles dans le second cas.

3. On veut maintenant traiter le cas où les valeurs propres sont complexes.

a. (la multiplication complexe comme un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ ) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Soit  $\Phi_1 : (x, y) \mapsto x + iy$  l'identification classique entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ . Montrer que l'application  $z \mapsto \lambda z$  est conjuguée via  $\Phi_1^{-1}$  à une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$ , donner sa matrice  $R_\lambda$ .

b. On note  $Re : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application qui à un vecteur complexe  $(z_1, z_2)$  associe le vecteur réel  $(Re(z_1), Re(z_2))$ , et on définit  $Im$  de façon analogue. Supposons que les valeurs propres de  $A$  ne sont pas réelles. Notons  $\lambda = re^{-i\theta}$  l'une d'elles, et  $e$  un vecteur propre correspondant dans  $\mathbb{C}^2$ . Montrer que  $\bar{e} := Re(e) - iIm(e)$  est un vecteur propre pour  $\bar{\lambda}$ , en déduire que  $(Re(e), Im(e))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et montrer que la matrice de  $A$  dans cette base est  $R_\lambda$ .

c. (variante plus conceptuelle) Vérifier que l'application  $Re$  réalise une semi conjugaison entre l'endomorphisme induit par  $A$  sur  $\mathbb{C}^2$  et sa restriction à  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\Phi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.e$  l'identification entre  $\mathbb{C}$  et la droite complexe engendrée par le vecteur  $e$ . En déduire que l'application  $\Phi := Re \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui conjugue la matrice  $R_\lambda$  à la matrice  $A$ , en déduire un changement de bases de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle  $A$  devient la matrice  $R_\lambda$ .

4. Ecrire précisément le jeu de matrices modèles obtenu.
-

### Dessins (portait de phase des systèmes dynamiques discrets dans le plan)

Il suffit de traiter les matrices modèles. On ne traite pas tous les cas... Le principe consiste à dessiner des courbes invariantes, qu'on oriente dans le sens de la dynamique (itérer  $A$  consiste à pousser les points le long des courbes dans le sens des flèches).

- Dynamique de  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ . Pour simplifier on suppose les vp  $\lambda, \mu > 0$  :
  - Valeur propre double ( $\lambda = \mu$ ) : puis, source (de façon générale, le dessin de  $A^{-1}$  est le même que celui de  $A$  avec les flèches inversées).
  - Valeur propre simple  $0 < \mu < \lambda < 1$  : noeud contractant. Les orbites tendent vers 0, mais la seconde tend infiniment plus vite que la première ; les orbites suivent des courbes tangentes à l'axe des ordonnées. ( $|y| = C|x|^{\frac{\log(\mu)}{\log(\lambda)}}$ ).
  - Valeur propre simple  $0 < \mu < 1 < \lambda$  : point selle. Dans le cas particulier  $\mu = 1/\lambda$ , les hyperboles  $xy = C$  sont invariantes.
- Dynamique de  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $0 < \lambda < 1$ . On a  $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ , ici encore les deux coordonnées tendent vers 0, la seconde infiniment plus vite.
- Cas complexe : lorsque  $|\lambda| < 1$  les orbites tendent vers 0 le long de spirales (foyer).

## 3.4 Dimension finie

Soit  $L : E \rightarrow E$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension finie  $d$ . On choisit une base de  $E$  et on note  $A$  la matrice de  $L$  dans cette base. Soit  $\lambda$  une valeur propre ayant le plus grand module possible, on dit que  $\lambda$  est dominante. On note  $\rho(L) = |\lambda|$  qu'on appelle *rayon spectral* de  $L$ .

### (a) Cas contractant, dilatant

**Lemme.** *Supposons que  $\rho(L) < 1$ , c'est-à-dire que toutes les valeurs propres sont de module  $< 1$ . Alors il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$  telle que, pour la norme d'opérateur associée,  $\|L\| < 1$ . En particulier, la suite  $\|L^n\|$  tend vers 0.*

On rappelle que si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , la norme d'opérateur associée pour  $L$  est définie comme la "plus grande dilatation d'un vecteur sous l'action de  $L$ ", avec la formule

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}.$$

Les normes d'opérateurs sont sous-multiplicative, au sens où elles vérifient l'inégalité  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Conséquence dynamique** On en déduit immédiatement que lorsque  $\rho(L) < 1$ , pour tout vecteur  $x$ , l'orbite de  $x$  tend vers 0, avec une vitesse exponentielle :

$$\|L^n(x)\| \leq \|L\|^n \|x\|.$$

Noter que cette propriété de convergence exponentielle ne dépend pas de la norme utilisée (par équivalence des normes en dimension finie). En appliquant ceci à l'endomorphisme  $X \mapsto AX$  associé à une matrice  $A$  dont toutes les valeurs propres sont de module  $< 1$ , on en déduit que pour tout  $i, j$ , la suite  $(A^n)_{i,j}$  des coefficients d'emplacement  $i, j$  dans la matrice  $A^n$  tend vers 0. Par exemple, c'est le cas de

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,999 & 1000 \\ 0 & 0,999 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,999^n & 1000 \times n \times 0,999^{n-1} \\ 0 & 0,999^n \end{pmatrix}$$

(mais la convergence est lente!). Noter aussi que cette matrice envoie le vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sur un vecteur de norme euclidienne supérieure à 1000. La norme d'opérateur associée à la norme euclidienne est donc elle aussi supérieure à 1000! Ceci illustre aussi la nécessité de changer de norme dans l'énoncé précédent. Voir aussi les dessins pour la matrice  $M_2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ .

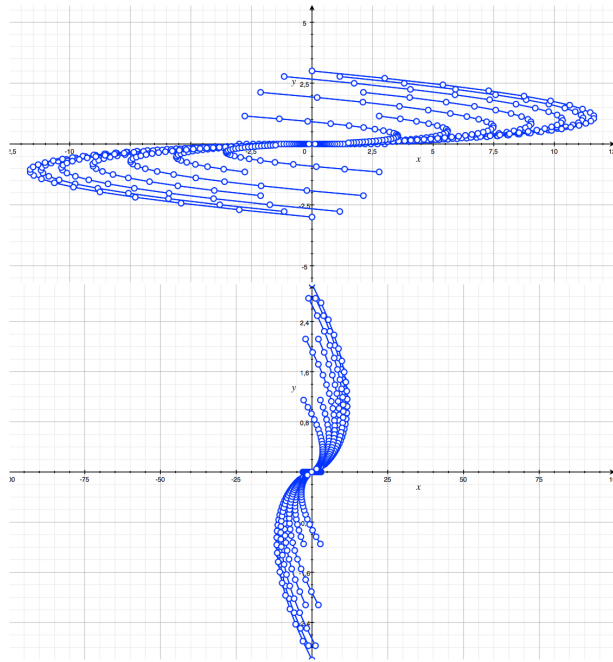


FIGURE 3.3 – Dynamique de l'application  $M_2$  : dans la base canonique la norme d'opérateur est  $> 1$  (en haut), autrement dit certains vecteurs voient leur norme augmenter lorsqu'on applique  $A$ ; mais l'application devient contractante dans une base où le second vecteur a été divisé par un grand nombre (en bas, voir aussi la preuve du lemme)

---

**Exercice 24.** — La situation symétrique correspond au cas où toutes les valeurs propres de  $L$  sont de module  $> 1$ . Vérifier que ceci équivaut à  $\rho(L^{-1}) < 1$ . Montrer que dans ce cas, pour tout  $x \neq 0$ , la norme de  $L^n(x)$  tend vers  $+\infty$  exponentiellement vite.

---



*Preuve du lemme.* On suppose d'abord que  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Soit  $\varepsilon = \frac{1}{d}(1 - \rho(L))$  (qui est strictement positif). Puisque tout endomorphisme complexe est trigonalisable, on peut choisir une base  $(e_i)$  dans laquelle  $A$  est triangulaire supérieure. Soit  $M > 0$ , on considère la base  $(f_i)$  définie par  $f_i = \frac{1}{M^{i-1}}e_i$ . **Montrer que** si  $M$  est assez grand, dans la base  $(f_i)$ , tous les termes non diagonaux de la matrice de  $L$  sont  $< \varepsilon$ .

Prenons alors la norme sur  $E$  définie par

$$\left\| \sum_{i=1}^d x_i f_i \right\| = \max_{i=1\dots d} |x_i|.$$

**En majorant** le module de la  $i$ ème coordonnée  $(Ax)_i$ , **montrer** que la norme d'opérateur associée vérifie  $|||L||| < \rho(L) + d\varepsilon = 1$ . En déduire le résultat dans le cas complexe.

Supposons maintenant que  $E$  est un espace vectoriel réel. En prenant une base, on peut se ramener au cas où  $E = \mathbb{R}^d$ ; notons alors  $A$  la matrice de  $L$  dans la base canonique. Considérons l'endomorphisme  $L_{\mathbb{C}} : x \mapsto Ax$  de  $\mathbb{C}^d$  associé à  $A$  (appelé parfois complexifié de  $L$ ). Les valeurs propres de  $L$  et de  $L_{\mathbb{C}}$  sont identiques, donc  $\rho(L_{\mathbb{C}}) = \rho(L) < 1$ . D'après le cas complexe, il existe une norme sur  $\mathbb{C}^d$  pour laquelle  $|||L_{\mathbb{C}}||| < 1$ . Cette norme induit par restriction une norme sur  $\mathbb{R}^d$ , et la définition des normes d'opérateurs entraîne immédiatement  $|||L||| \leq |||L_{\mathbb{C}}|||$ , ce qui conclut.  $\square$

**(b) Caractérisation dynamique du rayon spectral** On en déduit la caractérisation dynamique du rayon spectral (qui ne nous servira pas dans la suite) :

**Corollaire 3.4.1** (du lemme).

- Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une norme sur  $E$  telle que pour la norme d'opérateur associée,  $|||L||| < \rho(L) + \varepsilon$ .
- La suite  $(|||L^n|||^{\frac{1}{n}})$  converge vers  $\rho(L)$ .

Quelques remarques sur cet énoncé. Toute norme d'opérateur satisfait l'inégalité  $|||L||| \geq \rho(L)$  (voir la fin de la preuve du lemme). D'autre part, en conséquence du second point, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |||L^n|||^{\frac{1}{n}} = \rho(L).$$

pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur l'espace  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphisme de  $E$ . En effet, cet espace vectoriel est de dimension finie  $d^2$ , toutes les normes sont donc équivalentes, et on en déduit facilement cette propriété pour toute norme dès qu'elle est valable pour l'une d'elles (**vérifier !**).

*Démonstration du corollaire.* Par équivalence des normes, les quantités  $\bar{\ell}(L) = \limsup(\|L^n\|^{\frac{1}{n}})$  et  $\underline{\ell}(L) = \liminf(\|L^n\|^{\frac{1}{n}})$  ne dépendent pas du choix de la norme sur  $\mathcal{L}(E)$ . Pour montrer la convergence il suffit de montrer que le rayon spectral majore la limite supérieure et minore la limite inférieure.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Que vaut  $\rho(kL)$  pour tout  $k > 0$ ? **En déduire** que  $\rho(\frac{1}{\rho(L)+\varepsilon}L) < 1$ , puis qu'on peut choisir une norme sur  $E$  pour laquelle

$$\limsup(\|L^n\|^{\frac{1}{n}}) \leq \rho(L) + \varepsilon.$$

Attention, cette norme sur  $E$  dépend de  $\varepsilon$  ! **En déduire** néanmoins que  $\bar{\ell}(L) \leq \rho(L) + \varepsilon$ , et donc  $\bar{\ell}(L) \leq \rho(L)$  puisque  $\bar{\ell}(L)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  et que cette inégalité est valable pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Soit maintenant  $\lambda$  une valeur propre réelle, **vérifier** que  $\|L^n\| \geq |\lambda|^n$ , on a donc

$$\liminf(\|L^n\|^{1/n}) \geq |\lambda|.$$

On en déduit la minoration lorsqu'il y a une valeur propre dominante réelle.

Si  $\lambda$  est une valeur propre complexe, soit  $e = e_1 + ie_2$  un vecteur propre correspondant pour l'endomorphisme  $L_{\mathbb{C}}$  de  $\mathbb{C}^d$ . **Vérifier** que l'une des deux suites  $(\|L^n e_1\|)$  et  $(\|L^n e_2\|)$  est minorée par une quantité  $K|\lambda|^n$ , où  $K$  ne dépend pas de  $n$  et  $\|\cdot\|$  est n'importe quelle norme sur  $\mathbb{C}^d$ . En déduire le résultat.  $\square$

### (c) Décomposition stable/instable

(1) Soit  $L$  un endomorphisme d'un Rev  $E$  de dimension finie, alors on a une décomposition

$$E = \bigoplus_i E_i$$

en sev stables par  $L$ , tels que pour chaque  $i$  le spectre de la restriction  $L_i := L|_{E_i}$  est constitué ou bien d'une seule valeur propre réelle, ou bien de deux valeurs propres complexes conjuguées.

#### Exercice 25.—

- Démontrer l'existence de cette décomposition en utilisant la [forme normale de Jordan](#).
- Alternativement, utilisez le [lemme des noyaux](#). On pourra [factoriser le polynôme caractéristique](#) de  $A$  en facteur irréductibles, utiliser le théorème de Cayley-Hamilton et vérifier que si  $f$  annule un polynôme réel  $P$ , alors toute valeur propre de  $f$ , y compris complexe, est racine de  $P$  (un point clé qui peut passer inaperçu est que le complexifié de  $f$  annule aussi  $P$ ).

(2) En particulier, on a

$$E = E_s \oplus E_c \oplus E_u$$

décomposition stable avec restriction ayant toute ses valeurs propres de module  $< 1$ , (respectivement  $= 1$ ,  $> 1$ ). On dit que  $L$  est *hyperbolique* s'il n'y a pas de valeur propre de module 1, c'est-à-dire si  $E_c = \{0\}$ .

**Exercice 26.**— Dans le cas hyperbolique, décrire le comportement de l'orbite de  $p$  selon que  $p$  appartient ou non à  $E_s$ .

Pour les valeurs propres de module 1, le cas diagonalisable conduit à l'étude des rotations du cercle : voir le chapitre suivant !

### 3.5 Linéarisation des points fixes attractifs

Da façon vague, on dit qu'un système dynamique différentiable est linéarisable au voisinage d'un point fixe  $x_0$  si le comportement des orbites des points voisins de  $x_0$  est se déduit du système dynamique linéaire donné par la différentielle en ce point.

---

**Exercice 27.**— Soit  $f : U \rightarrow f(U)$  une application de classe  $C^1$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Supposons que  $f$  a un point fixe  $x_0$ ; la différentielle est alors un endomorphisme de l'espace tangent au point  $x_0$ . On dit que  $f$  est un *point fixe attractif* si  $\rho(Df(x_0)) < 1$ .

1. Montrer que dans ce cas, il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\varepsilon > 0$  telle que la boule fermée  $B := B_f(x_0, \varepsilon)$  est positivement invariante par  $f$ , et la restriction de  $f$  à cette boule est une application contractante. *On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.*
  2. En déduire que l'orbite de tout point de  $B$  converge vers  $x_0$ .
  3. Soit  $g$  une application  $C^1$ -proche de  $f$ . Montrer que  $B$  est encore positivement invariante par  $g$ , que  $g$  est contractante sur  $B$ , et que son unique point fixe est proche de  $x_0$ .
  4. Généraliser la définition de point fixe attractif aux points périodiques.
- 

Plus précisément, on pourrait montrer que la restriction de  $f$  à  $B$  est topologiquement conjuguée à la restriction de la différentielle  $Df(x_0)$  à une boule de  $\mathbb{R}^d$ ; c'est ce résultat justifie pleinement l'emploi du terme "linéarisation".

### 3.6 Matrices de graphes, codage

Soit  $\mathcal{G}$  un graphe orienté fini avec  $d$  sommets que l'on numérote de 1 à  $d$ . La *matrice d'adjacence* de  $\mathcal{G}$  est la matrice  $A$ , de taille  $d \times d$ , telle que  $A_{ij} = 1$  s'il y a une arête du sommet  $i$  vers le sommet  $j$  et  $A_{i,j} = 0$  sinon. Un *chemin* dans le graphe est une suite finie de sommets dont deux consécutifs sont reliés par une arête; sa longueur est le nombre d'arêtes parcourues (nombre de sommets moins un); un chemin est fermé si le dernier sommet est égal au premier.

---

**Exercice 28.**— Comment la matrice d'incidence est-elle affectée par un changement de numérotation des sommets?

---

**Lemme.** *Le coefficient  $(A^n)_{i,j}$  est égal au nombre de chemins de longueur  $n$  allant du sommet  $i$  au sommet  $j$  dans le graphe.*

En conséquence, le nombre de chemin *fermés* de longueur  $n$  est donné par la trace de la matrice  $A^n$ . Par exemple, pour le graphe ayant deux sommets et trois arêtes dont la matrice d'incidence est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a  $\text{Tr}(A^n) = \lambda_+^n + \lambda_-^n \sim \lambda_+^n$  avec, comme pour l'étude de la suite de Fibonacci,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618 \text{ et } -0,618.$$

En particulier le nombre de chemins de longueur  $n$  croît exponentiellement avec  $n$ . Ceci donne alors, dans le cadre du théorème de Sharkovsky, une borne inférieure sur la croissance du nombre de points fixes de  $f^n$  (voir le chapitre correspondant).

*Preuve du lemme.* Il y a un procédé naturel qui décrit tous les chemins de longueur  $n + 1$  à partir des chemins de longueurs  $n$  : il suffit de mettre bout à bout un chemin de longueur  $n$  de  $i$  à  $j$  et un chemin de longueur 1 (c'est-à-dire une arête) de  $j$  à  $k$  pour obtenir un chemin de longueur  $n + 1$  de  $i$  à  $k$ . D'autre part on peut aussi calculer les coefficients de  $A^{n+1}$  à partir de ceux de  $A^n$  et  $A$  par le produit matriciel,

$$(A^{n+1})_{i,k} = \sum_{j=1..n} (A^n)_{i,j} A_{j,k}$$

(où  $(A^n)_{i,j}$  représente le coefficient  $i, j$  de la matrice  $A^n$ ). Si on suppose par récurrence que  $A^n$  compte bien le nombre de chemins de longueur  $n$ , on en déduit la propriété au rang  $n + 1$ . **Vérifier précisément ceci.**  $\square$

---

**Exercice 29.**— Montrer que pour toute matrice  $A$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr}(A^n)^{\frac{1}{n}} = \rho(A).$$

En particulier, le rayon spectral donne la croissance exponentielle du nombre de chemins fermés de longueur  $n$  dans un graphe. *Aide : ...*

---

**L'idée initiale derrière Google** Comment attribuer une importance à chaque page web pour pouvoir classer les réponses à une recherche ? Un surfeur se déplace sur le web en cliquant au hasard sur un lien au fur et à mesure des pages web rencontrées. Il va probablement finir par passer sur toutes les pages web, mais en passant plus ou moins fréquemment par chaque page. La fréquence limite donne une bonne indication de "l'importance".<sup>1</sup>

Généralisation : marche aléatoire sur un graphe : on part d'un sommet au hasard, et on se déplace le long du graphe en choisissant à chaque étape une arête au hasard de façon équiprobable. Plus généralement, on a un nombre fini d'états numéroté de 1 à  $d$ , et une matrice  $A$  où  $A_{ij}$  est la probabilité de passer à l'état  $j$  sachant qu'on est à l'état  $i$ . Si  $X_0$  est le vecteur des probabilités au temps 0, au temps  $n$  on obtient un vecteur de probabilités égal à  $X_0 A^n$ , et donc  $X_0 A^n$  au temps  $n$ . Le [théorème de Perron Frobenius](#) dit que sous une hypothèse de connexité (il existe un temps  $k$  tel que  $(A^k)_{ij} > 0$  pour tout  $i, j$ ), la suite  $X_0 A^n$  converge vers un vecteur  $X_\infty$  qui ne dépend pas de l'état initial  $X_0$ . Ce vecteur contient la fréquence (asymptotique) de passage dans chaque état. C'est cette fréquence que Google utilise comme mesure de "l'importance" de chaque page web.

---

1. Ensuite le commerce et la politique interviennent bien sûr (une page contenant une interview critique envers Google a été déréférencée ?...). Voir [cet article sur Images des maths](#).

## 3.7 Ouvertures

**Dimension infinie** La dynamique linéaire en dimension infinie peut être surprenante.

---

**Exercice 30.**— Soit  $E$  l'espace vectoriel des application de classe  $C^\infty$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme uniforme. Soit  $T : E \rightarrow E$  défini par  $T(f) = f'$ . Montrer que  $T$  a une orbite dense dans  $E$ . *Aide : on pourra utiliser le [théorème de Weierstrass](#) sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes pour montrer d'abord que pour tout ouverts non vides  $U, V$  de  $E$  il existe un point  $x$  de  $U$  dont l'orbite positive passe dans  $V$  (on cherchera  $x$  sous la forme d'un polynôme). Utiliser ensuite le théorème de Baire pour conclure.*

---

**Linéarisation** Les théorèmes de linéarisation jouent un rôle important dans les systèmes dynamiques différentiables ; le résultat le plus célèbre est le suivant.

**Théorème** (Hartman Grobman). *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme défini sur un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , et  $x_0$  un point fixe de  $f$ . Si  $Df(x_0)$  est un automorphisme hyperbolique alors  $f$  est linéarisable au point  $x_0$ .*

**Difféomorphismes d'Anosov** Un élément de  $SL_N(\mathbb{Z})$  induit un difféomorphisme du tore  $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ . Si la matrice est hyperbolique, alors le difféomorphisme est chaotique. Un exemple célèbre est donné par la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .



# Chapitre 4

## Dimension un (III) : rotations du cercle

Dans ce chapitre, nous étudions la dynamique des rotations du cercle. Il y a deux cas : ou bien toutes les orbites sont périodiques, ou bien aucune orbite ne l'est. Dans le second cas, on montre que toute orbite est dense (le système est dit minimal). On montre ensuite la propriété d'équirépartition : les orbites se répartissent le long du cercle de façon homogène au fur et à mesure qu'on itère la rotation. L'étude de la répartition "statistique" est l'objet de la théorie ergodique.<sup>1</sup>

### 4.1 La suite des premiers chiffres de $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

On écrit les puissances de deux en base dix,

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \text{etc.}$$

et on ne garde que le premier chiffre de chaque puissance. Pour les nombres de  $2^0$  à  $2^{50}$  on obtient ainsi

$$1248136125124813612512481361251248136125124813612512481371251.$$

Y a-t-il une régularité dans cette suite ? Est-ce que 9 va apparaître un jour ? Lorsqu'on regarde une suite de plus en plus longue, est-ce que la proportion de chaque chiffre tend vers une limite ? On va résoudre ce problème en étudiant la dynamique des rotations du cercle !

### 4.2 Les rotations irrationnelles du cercle

On considère le cercle unité  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Pour tout  $z_0 = e^{2i\pi\theta_0} \in \mathbb{U}$ , l'application  $R_{\theta_0} : z \mapsto z_0 z$  est appelée rotation d'angle  $\theta_0$  : on ne mesure donc pas

---

1. Référence pour ce chapitre : le livre de Boris Hasselblatt et Anatole Katok, *A first course in dynamics*, chapitre 4.

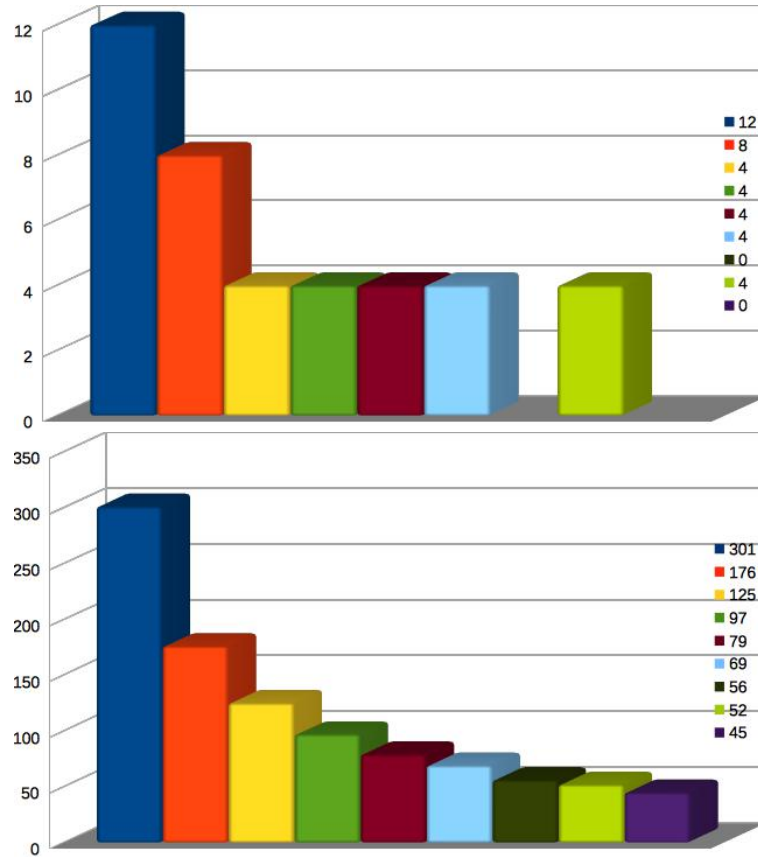


FIGURE 4.1 – Proportion de 1,2,3, etc. dans le premier chiffre de l’écriture décimale des puissances de deux : en haut, jusqu’à  $2^{40}$  ; en bas, jusqu’à  $2^{1000}$

les angles en degré ni en radian, mais en nombres de tours.<sup>2</sup> On a clairement

$$R_{\theta_0} \circ R_{\theta'_0} = R_{\theta_0 + \theta'_0} \text{ et donc } R_{\theta_0}^q = R_{q\theta_0}$$

pour tous  $\theta_0, \theta'_0, q$ . D’autre part, on a  $R_{\theta_0} = \text{Id}$  si et seulement si  $\theta_0$  est un entier, et dans le cas contraire  $R_{\theta_0}$  n’a aucun point fixe. On en déduit facilement :

**Proposition 4.2.1.** *Lorsque  $\theta_0 = \frac{p}{q}$  on a  $R_{\theta_0}^q = \text{Id}$ . Réciproquement, une rotation d’angle irrationnel n’a aucune orbite périodique.*

---

**Exercice 31.**— Qu’obtient-on en conjuguant  $R_{\theta_0}$  par une autre rotation ? En déduire que si  $z, z'$  sont deux points du cercle, les orbites  $O_{R_{\theta_0}}^+(z)$  et  $O_{R_{\theta_0}}^+(z')$  sont images l’une de l’autre par une rotation du cercle.

---

<sup>2</sup> Les rotations du plan sont bien sûr des applications linéaires, ce qui relie ce chapitre au précédent.



### Retour sur le problème introductif

---

**Exercice 32.**— Traduire le problème des premiers chiffres des puissances de 2 en termes dynamiques : montrer que le premier chiffre de  $2^n$  est un 7, par exemple, si et seulement si l'itéré  $R_{\theta_0}^n(0)$  est dans un certain arc de cercle, où  $R_{\theta_0}$  est une rotation irrationnelle d'angle  $\theta_0$  à expliciter.

---

Dans la suite, on va d'abord montrer que lorsqu'on itère 0 par une rotation irrationnelle, on tombe une infinité de fois dans n'importe quel intervalle donné à l'avance : en conséquence, il existe une infinité de puissances de 2 dont l'écriture décimale commence par un '7'. Puis on va voir qu'on peut être plus précis en montrant que la fréquence avec laquelle on tombe dans un intervalle donné est proportionnelle à la longueur de l'intervalle. Ce phénomène s'appelle l'équirépartition. En conséquence, parmi les nombres

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$$

la proportion de ceux dont l'écriture décimale commencent par '7' (ou n'importe quelle autre écriture décimale) a une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ; on peut même calculer cette limite.

---

**Exercice 33.**— En utilisant le paragraphe qui précède (et en anticipant sur ce qu'on va démontrer), calculer cette limite. Comparer à l'histogramme expérimental.

---

**Distance sur le cercle** On munit le cercle de la distance “le long du cercle”, qui consiste à mesurer la longueur du plus petit arc de cercle entre deux points, en normalisant pour que la longueur totale du cercle vaille 1. Plus formellement, soit  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$  définie par  $\Pi(\theta) = e^{2i\pi\theta}$ . On pose

$$d(z, z') = \min\{|\theta - \theta'| \mid \Pi(\theta) = z, \Pi(\theta') = z'\}$$

(on rappelle que  $|\theta - \theta'|$  est la distance dans  $\mathbb{R}$  entre  $\theta$  et  $\theta'$ ). Cette distance fait de  $\Pi$  une isométrie locale : si  $|\theta - \theta'| < \frac{1}{2}$  alors  $d(\Pi(\theta), \Pi(\theta')) = |\theta - \theta'|$ . Les rotations sont des isométries du cercle muni de cette distance, en particulier ce sont des homéomorphismes.

---

**Exercice 34.**— Vérifier que la distance ainsi définie est équivalente à la distance obtenue comme restriction au cercle unité de la distance euclidienne du plan. Ainsi, utiliser une distance plutôt que l'autre ne change en rien les résultats dynamiques, mais la distance le long du cercle est plus commode pour notre étude.

---

## 4.3 Minimalité

**Minimalité en dynamique topologique (optionnel)** Soit  $T : X \rightarrow X$  un homéomorphisme d'un espace topologique. On dira qu'une partie  $Y$  de  $X$  est invariante (ou globalement invariante) par  $T$  si  $T(Y) = Y$ , qu'elle est *positivement*

invariante si  $T(Y) \subset Y$ . L'orbite (ou orbite totale) d'un point  $x$  est l'ensemble  $\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

---

**Exercice 35.**— Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. tout point  $x$  a une orbite  $O(x)$  dense dans  $X$ ,
2. les seules parties fermées invariantes par  $T$  sont  $\emptyset$  et  $X$ .

On pourra commencer par vérifier que l'adhérence d'une partie invariante est invariante.

---

**Définition.** Si les propriétés décrites dans l'exercice sont satisfaites, on dit que  $T$  est *minimal*.

On montre de même que les seules parties fermées *positivement* invariantes par  $T$  sont  $\emptyset$  et  $X$  si et seulement si tout point  $x$  a une orbite *positive* dense ; on dit dans ce cas que  $T$  est *positivement minimal*. Si l'orbite positive d'un point est dense, a fortiori son orbite totale est dense, ainsi tout système dynamique positivement minimal est minimal. L'exercice suivant consiste à montrer la réciproque lorsque  $X$  est compact. Il utilise la notion suivante : pour tout point  $x$ , l'ensemble *omega-limite* de  $x$  est l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'orbite positive de  $x$ , autrement dit

$$\omega_T(x) = \bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \text{Adh}\{T^n(x) \mid n \geq n_0\}.$$

---

**Exercice 36.**— On suppose que  $X$  est compact.

1. Montrer que pour tout  $x$ , l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(x)$  est un fermé non vide invariant par  $T$ .
  2. Montrer que  $T$  est minimal si et seulement si pour tout  $x$ ,  $\omega(x) = X$ .
  3. En déduire que  $T$  est minimal si et seulement si il est positivement minimal.
- 

---

**Exercice 37.**— Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. On suppose que  $T : X \rightarrow X$  est minimal.

1. Soit  $U$  un ouvert non vide et  $x \in X$ . On note  $\tau(x, U) = \{n \in \mathbb{Z} \mid T^n(x) \in U\}$ . Montrer que  $\tau$  contient des nombres strictement positifs, puis qu'il est "à saut bornés" : il existe  $M$  tel que tout suites de  $M$  entiers consécutifs rencontre  $\tau(x, U)$ .
  2. On suppose de plus que  $X$  est connexe. Montrer que  $f^n$  est minimal pour tout  $n \neq 0$ .
- 

## Minimalité des rotations irrationnelles

**Proposition.** Si  $\theta_0$  est irrationnel, alors la rotation d'angle  $\theta_0$  est positivement minimale.

*Démonstration.* On commence par **démontrer** le principe des tiroirs suivants : si on a  $k$  points sur le cercle, alors deux d'entre eux sont à distance inférieure ou égale à  $\frac{1}{k}$ .

Fixons un point  $x$  et un arc de cercle  $\Delta$ , on veut montrer que l'orbite positive de  $x$  rencontre  $\Delta$ . Il y a un cas facile : si  $|\theta_0|$  est plus petit que la longueur de  $\Delta$ , alors

les itérés successifs découpent le cercle en arcs de longueur inférieure à celle de  $\Delta$ , ils passent donc dans  $\Delta$  avant d'avoir fait un tour complet.

Soit maintenant  $k$  un entier plus petit assez grand pour que  $\frac{1}{k}$  soit plus petit que la longueur de  $\Delta$ . Puisque  $\theta_0$  est irrationnel, il n'y a pas d'orbites périodiques, tous les itérés de  $x$  sont distincts. D'après ce principe des tiroirs, parmi les  $k$  itérés

$$x, R_{\theta_0}(x), \dots, R_{\theta_0}^{k-1}(x)$$

deux sont à distance inférieure ou égale à  $1/k$ . **On en déduit** un entier  $q \in \{1, \dots, k-1\}$  et un point  $y$  tel que

$$0 < d(y, R_{\theta_0}^q(y)) \leq \frac{1}{k}.$$

La rotation  $R_{\theta_0}^q$  est donc une rotation d'angle  $\theta'_0$  dont la valeur absolue est inférieure à la longueur de  $I$ . D'après le cas facile, il existe  $N > 0$  tel que  $R_{\theta_0}^{qN}(x)$  appartient à  $I$ . Donc l'orbite positive de  $x$  rencontre  $\Delta$ , comme voulu.

Variante : preuve de la minimalité, par une variante du principe des tiroirs : le cercle ne contient pas plus de  $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$  intervalles disjoint de longueur  $\varepsilon$ . S'il existe un fermé non trivial invariant, alors les itérés d'un intervalle complémentaire de longueur maximale sont deux à deux disjoints (sans quoi on a une orbite périodique), contradiction.  $\square$

---

**Exercice 38.**—(autre variante)

1. Montrer qu'un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  est ou bien discret, c'est-à-dire du type  $\alpha\mathbb{Z} := \{\alpha p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ , ou bien dense dans  $\mathbb{R}$ . En posant  $\alpha = \inf G \cap ]0, +\infty[$ , on pourra montrer que si  $\alpha > 0$  alors  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .
  2. Pour tout  $\theta_0$ , montrer que l'orbite de 0 pour la rotation  $R_{\theta_0}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{U}$ . En déduire que son image réciproque par  $\Pi$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ .
  3. En déduire que l'orbite de 0 sous une rotation irrationnelle est dense, puis la minimalité des rotations irrationnelles.
- 

---

**Exercice 39.**— Montrer qu'il existe une infinité d'entiers  $n > 0$  tels que l'écriture de  $2^n$  en base 10 commence par 2017. *Utiliser la proposition!*

---

## 4.4 Équirépartition

On fixe un nombre irrationnel  $\theta_0$ , et on continue à étudier la dynamique de la rotation  $R_{\theta_0}$ , et plus précisément la répartition des itérés d'un point donné le long du cercle. Nous allons étudier la proportion d'itérés qui tombent dans un intervalle donné.

Pour toute partie  $E$  du cercle  $\mathbb{U}$ , tout point  $x$  et tout entier  $n$ , on note

$$F_E(x, n) = \#\{k \mid 0 \leq k < n \mid R_{\theta_0}^k(x) \in E\}.$$

Soit  $\Delta$  un arc de cercle. Le théorème suivant dit qu'asymptotiquement, les itérés d'un point quelconque passent dans  $\Delta$  avec une fréquence égale à la longueur de  $\Delta$ .

FIGURE 4.2 – 50, 100, 200 premiers itérés pour la rotation d'angle  $\sqrt{2}$ 

**Théorème.** *Pour tout  $x$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} F_{\Delta}(x, n) = \text{Longueur de } \Delta$$

*et la limite est uniforme en  $x$ .*

La preuve du théorème utilise le lemme suivant.

**Lemme** (monotonie). *Soient  $\Delta, \Delta'$  deux arcs de cercle, supposons que  $\Delta$  est strictement plus court que  $\Delta'$ . Alors il existe un entier  $N_0 \geq 0$  tel que pour tout entier positif  $n$  et tout point  $x$ ,*

$$F_{\Delta}(x, n) \leq F_{\Delta'}(x, n + N_0).$$

*Démonstration.* En utilisant que la rotation est positivement minimale, **montrer** qu'il existe  $N_0 \geq 0$  tel que  $R_{\theta_0}^{N_0}(\Delta) \subset \Delta'$ . **En déduire** le résultat.  $\square$

---

**Exercice 40.**—(limites inférieures et supérieures) Montrer les propriétés suivantes, pour des suites quelconques de  $\mathbb{R}$  :

1. On a toujours  $\liminf(u_n) \leq \limsup(u_n)$ , et la suite  $(u_n)$  converge si et seulement si on a égalité.
  2.  $\limsup(-u_n) = -\liminf(u_n)$ .
  3.  $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$ . Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
- 

*Preuve du théorème.* Dans cette preuve, les arcs de cercles sont semi-ouverts, c'est-à-dire du type  $\Pi([a, b[)$  avec  $a < b < a + 1$  (auparavant ça n'avait aucune importance, vous verrez bientôt pourquoi on fait cette hypothèse maintenant). On introduit les limites inférieures et supérieures

$$\underline{f}_x(\Delta) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} F_{\Delta}(x, n), \quad \overline{f}_x(\Delta) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} F_{\Delta}(x, n).$$

Voici quelques propriétés faciles.

(1) Les deux intervalles  $\Delta = \Pi([a, b[)$  et  $\Delta^c = \Pi([b, a + 1[)$  forment une partition du cercle, et par conséquent pour tout entier  $n \geq 1$  on a  $F_\Delta(x, n) + F_{\Delta^c}(x, n) = n$ . En divisant par  $n$  et en passant à la limite, on en déduit

$$\bar{f}_x(\Delta) = 1 - \underline{f}_x(\Delta^c)$$

(2) (sous-additivité) Pour tous intervalles  $\Delta, \Delta'$ , on a

$$\bar{f}_x(\Delta \cup \Delta') \leq \bar{f}_x(\Delta) + \bar{f}_x(\Delta').$$

**Lemme.** Si  $\Delta$  a une longueur  $< \frac{1}{k}$  alors  $\bar{f}_x(\Delta) \leq \frac{1}{k}$ .

*Démonstration.* On peut partitionner le cercle en  $k$  intervalles semi-ouverts  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  de longueur  $\frac{1}{k}$ . Par monotonie, pour chaque  $i$  il existe  $N_i \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $x$ ,

$$F_\Delta(x, n) \leq F_{\Delta_i}(x, n + N_i) \leq F_{\Delta_i}(x, n) + N_i \quad (*)$$

(la dernière majoration est immédiate). D'autre part pour tout  $n$  on peut calculer la somme

$$F_{\Delta_1}(x, n) + \dots + F_{\Delta_k}(x, n) = n,$$

d'où le résultat en additionnant les  $k$  inégalités (\*), en divisant par  $kn$  et en passant à la limite.  $\square$

Terminons la preuve du théorème. Soit d'abord un rationnel  $\frac{p}{q}$  strictement plus grand que la longueur de  $\Delta$ . On peut recouvrir  $\Delta$  par des intervalles  $\Delta_1, \dots, \Delta_p$  chacun de longueur  $< \frac{1}{q}$ ; en utilisant la sous-additivité (2) et le lemme on en déduit

$$\bar{f}_x(\Delta) \leq \sum_{i=1}^p \bar{f}_x(\Delta_i) \leq p \frac{1}{q} = \frac{p}{q}.$$

Par densité des rationnels on a donc  $\bar{f}_x(\Delta) \leq \text{longueur}(\Delta)$ . En utilisant la propriété (1) et en appliquant cette même inégalité au complémentaire, on obtient enfin

$$\underline{f}_x(\Delta) = 1 - \bar{f}_x(\Delta^c) \geq 1 - \text{longueur}(\Delta^c) = \text{longueur}(\Delta)$$

ce qui termine la preuve de la convergence. L'uniformité est laissée au lecteur.

---

**Exercice 41.**— En reprenant soigneusement la démonstration, **détailler** les  $\varepsilon$  et les  $N$  dans l'argument pour montrer que la convergence est uniforme en  $x$ .

---

$\square$

## 4.5 Observables continues

Soit  $T : X \rightarrow X$  un système dynamique, et  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. En souvenir des motivations physiques, on dit souvent que  $\varphi$  est une observable.<sup>3</sup> Pour un entier  $n > 0$  donné, on s'intéresse à la moyenne de la fonction  $\varphi$  sur les  $n$  premiers itérés d'un point  $x$ ,

$$S_n(\varphi)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x)),$$

qu'on appelle *moyenne de Birkhoff* de la fonction  $f$  sous l'itération de  $T$ .

Nous revenons maintenant au cadre d'une rotation irrationnelle  $R_{\theta_0}$ .

---

**Exercice 42.**— Prenons pour  $\varphi$  la fonction caractéristique  $\mathbf{1}_\Delta$  d'un arc de cercle  $\Delta$ . Que vaut alors la moyenne de Birkhoff  $S_n \mathbf{1}_\Delta(x)$ ? Que vaut sa limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Exprimer celle-ci au moyen d'une intégrale.

---

L'équirépartition s'interprète donc comme un comportement asymptotique des sommes de Birkhoff. Ceci permet de la généraliser à une plus grande classe de fonctions.

**Proposition.** *Soit  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, ou plus généralement une fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Alors pour tout  $x$ ,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_{\theta_0}^k(x)) \rightarrow \int \varphi(x) dx$$

*et la limite est uniforme en  $x$ . (Ici l'intégrale est relativement à la mesure de Lebesgue sur le cercle, celle qui attribue à un arc de cercle sa longueur).*

*Démonstration.* On rappelle d'abord que toute fonction continue  $f$  sur le cercle est uniformément continue, ceci permet de **montrer** qu'on peut l'approcher uniformément par une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'arcs de cercle, qu'on appelle fonction en escalier.

Pour fixer les idées, on travaille sur l'espace  $E$  des fonctions mesurables et bornées et  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout entier  $n$ , l'opérateur  $S_n : E \rightarrow E$  est linéaire, positif, il préserve la moyenne sur l'espace des fonctions intégrables, et non dilatant pour la norme au sens où, pour toute fonction bornée  $\varphi$ ,

$$\|S_n(\varphi)\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty.$$

---

3. On peut imaginer par exemple que l'itération de  $T$  décrit l'évolution d'un gaz. L'ensemble  $X$  est un espace de grande dimension qui contient l'information relative à la position et à la vitesse de chaque molécule, chaque point  $x$  de  $X$  correspond alors à une configuration particulière. L'observateur n'a pas accès à l'intégralité de cette information, il ne peut pas mesurer la vitesse et la position de chaque molécule (et ça ne l'intéresse pas). Par contre, il peut relever certaines variables macroscopiques du système comme la température ou la pression. Ce sont ces variables qu'on appelle observables et qu'on modélise comme des fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans le contexte de la thermodynamique, la convergence des moyennes de Birkhoff vers l'intégrale de  $\varphi$ , autrement dit des moyennes temporelles vers les moyennes spatiales, s'appelle *hypothèse de Boltzmann*.

On a déjà vu la convergence pour les fonctions caractéristiques d'arcs de cercle, par linéarité elle a encore lieu pour leur combinaisons linéaires. On fixe un  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\varphi'$  une fonction en escalier telle que  $\|\varphi - \varphi'\|_\infty < \varepsilon$ . Soit  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $\|S_n \varphi' - \int \varphi'\| < \varepsilon$ . En utilisant les propriétés de l'opérateur  $S_n$ , vérifier que pour un tel  $n$  on a aussi  $\|S_n \varphi - \int \varphi\| < 3\varepsilon$ .  $\square$

---

**Exercice 43.**— Preuve alternative de la convergence uniforme pour les fonctions continues, par les séries de Fourier (Kronecker-Weyl) : les moyennes de Birkhoff d'un caractère  $z^m$  pour  $m \neq 0$  tendent vers 0, donc pour un polynôme trigonométrique ça tend vers le coef constant, puis pour les fonctions continues par limites.

---

## 4.6 Ouverture : la théorie ergodique

On a vu au premier chapitre que le doublement de l'angle sur le cercle, que l'on avait noté  $S$ , est "chaotique". En particulier, la propriété de sensibilité aux conditions initiales dit l'impossibilité de prévoir précisément le comportement à long terme d'un système modélisé par cette application. On pourrait en tirer la conclusion un peu triste qu'il existe des phénomènes que la science ne peut pas prédire. Pensez à la météo : malgré l'utilisation des ordinateurs les plus puissants, on ne sait pas prédire le temps qu'il fera dans une semaine.

La théorie ergodique fournit un point de vue plus optimiste sur cette question. Plutôt que d'essayer de prédire le comportement exacte du système, elle cherche à donner des informations de nature statistique, plus vagues mais néanmoins très utiles. Revenons à notre application  $S$ . Prenons un point  $x$  au hasard sur le cercle, et un petit intervalle  $I$ . Plutôt que d'essayer de savoir quand exactement l'itéré  $S^n(x)$  passe dans  $I$ , on peut se demander, comme on vient de le faire pour les rotations du cercle, combien de fois il va y passer si considère un intervalle de temps très long. La théorie ergodique répond que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , la proportion des temps  $q \in \{0, \dots, n\}$  tels que l'itéré  $S^q(x)$  appartienne à  $I$  tend vers une limite qui est proportionnelle à la longueur de  $I$ . On obtient donc un résultat similaire à l'équirépartition des itérés pour les rotations irrationnelles, à ceci près que cette fois-ci l'équirépartition est valable pour presque tout point  $x$  initial, mais pas pour tous les points (pensez aux points périodiques !). Ce résultat découle de deux observations et d'un théorème :

- Première observation, élémentaire : la mesure de Lebesgue  $d\theta$  sur le cercle est invariante par  $S$  (ce qui signifie que pour tout intervalle  $I$ , la mesure de  $f^{-1}(I)$  est égale à celle de  $I$ , ou encore en termes probabilistes : la probabilité que  $x$  appartienne à  $I$  est égale à la probabilité que  $f(x)$  appartienne à  $I$ ).

- Deuxième observation, un peu moins élémentaire : la mesure de Lebesgue est ergodique pour  $S$ , ce qui signifie que tout ensemble invariant par  $S$  est de mesure nulle ou totale.

- Le théorème de Birkhoff : cet énoncé très général dit que lorsqu'on a une mesure  $\mu$  invariante et ergodique pour un système dynamique  $T : X \rightarrow X$ , et une observable  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  sur ce système qui est une fonction intégrable (dans  $L^1(X, \mu)$ ),

les moyennes de Birkhoff convergent vers la moyenne spatiale  $\int \varphi d\mu$  pour presque tout point  $x$ .

En résumé, on ne peut pas prévoir précisément le futur, mais on peut le prévoir statistiquement. Il est sans doute fondamentalement impossible de prévoir le temps qu'il fera dans un mois, mais ceci n'empêche pas forcément de prévoir l'évolution à long terme du climat.

D'un point de vue mathématique, la théorie ergodique s'intéresse aux systèmes dynamiques mesurés, c'est à dire aux transformations qui préservent une mesure de probabilité sur un espace muni d'une tribu. Elle joue un rôle important dans tous les systèmes dynamiques, en particulier parce que tout système dynamique topologique sur un espace compact admet au moins une mesure invariante et ergodique (c'est le théorème de Krylov-Bogolioubov).

## Ouverture bonus : homéomorphismes minimaux

*Quels espaces topologiques admettent un homéomorphisme minimal ?* Cette question naturelle conduit en particulier aux théorèmes suivants (dont les preuves sont magnifiques).

**Théorème** (Brouwer 1912 / Handel 1992 / Le-Calvez-Yoccoz 1997). *Il n'existe pas d'homéomorphisme minimal sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  privée d'un nombre fini de points.*

Question ouverte : pour  $n \geq 3$ , existe-t-il un homéomorphisme minimal de  $\mathbb{R}^n$  ? Existe-t-il une variété compacte de dimension 3 qui n'admet pas d'homéomorphisme minimal ?

**Théorème** (Anosov-Katok / Fathi-Hermann 1977). *Il existe sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  des difféomorphismes minimaux (et uniquement ergodiques).*

Les difféomorphismes de ce théorème sont obtenus comme limite de difféomorphismes conjugués à des "rotations" le long de la [fibration de Hopf](#).



# Chapitre 5

## Systemes de fonctions itérées (IFS)

Dans cette section, nous étudions un type très spécial de systèmes dynamiques appelés *Systemes de fonctions itérées*. Il s'agit d'un procédé itératif de construction d'ensemble qui se formalise sous la forme d'une application qui est contractante pour la *distance de Hausdorff*, une distance entre parties fermées bornées d'un espace métrique.<sup>1</sup>

### 5.1 Ensembles fractals et images de synthèse

La première figure ci-dessous représente plusieurs ensemble dit "fractals". La deuxième figure montre un procédé de construction de l'une d'entre elles. La dernière figure représente un paysage en image de synthèse dont les textures réalistes sont obtenues par une variante de ce procédé. La compression fractale est un procédé de compression d'image qui consiste à coder une image quelconque comme un système de fonctions itérées ; le temps de compression est très long, par contre la décompression est très rapide.

---

1. Sources pour ce chapitre : [Article Wikipedia](#), [une présentation](#). [Des applets java](#).

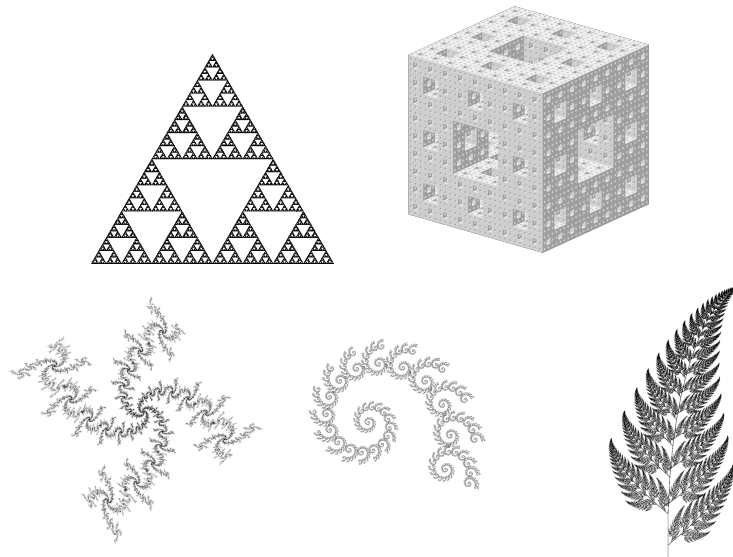


FIGURE 5.1 – De jolis dessins...

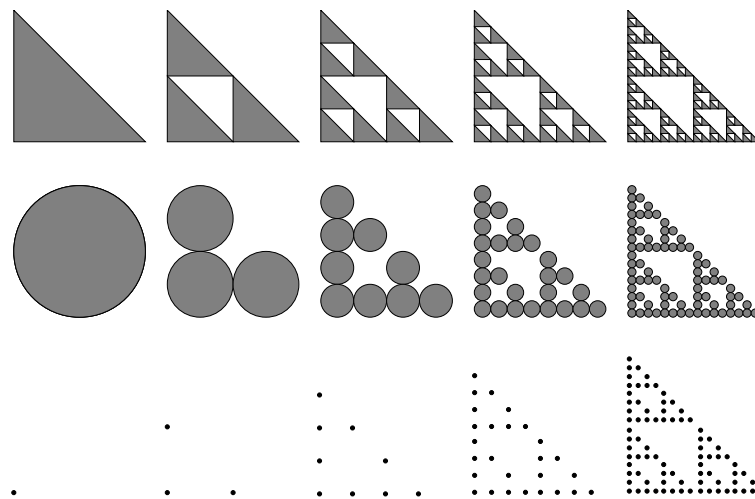


FIGURE 5.2 – Obtenu par un procédé itératif très simple



FIGURE 5.3 – La même idée, modifiée en introduisant du hasard, est utilisée en images de synthèse pour produire des textures “naturelles”

## 5.2 Formalisation

Ce qui suit a pour but de justifier mathématiquement l'existence des objets dessinés plus haut. Nous dans cette section la suite d'énoncés qui permettent de justifier l'existence des ensembles fractals dessinés plus haut (et de beaucoup d'autres) ; les démonstrations sont données dans la section suivante.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On note  $\mathcal{F}(X)$  l'ensemble des parties fermées et bornées non vides de  $X$ . Pour tout  $x \in X$  et toute partie  $E$  de  $X$ , on pose

$$d(x, E) = \inf\{d(x, y) \mid y \in E\}.$$

Etant donnée  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$ , on pose

$$d_{\text{Hausdorff}}(F_1, F_2) = \max(\sup\{d(x, F_2) \mid x \in F_1\}, \sup\{d(x, F_1) \mid x \in F_2\}).$$

### Théorème 5.2.1.

1.  $d_{\text{Hausdorff}}$  est une distance sur  $\mathcal{F}(X)$ .
2. Si  $(X, d)$  est complet alors  $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$  est un espace métrique complet.

On se donne  $\{T_1, \dots, T_k\}$  une famille finie de transformations contractantes de  $X$  : il existe  $\rho < 1$  tel que pour tous  $x, x'$  et pour tout  $T_i \in \mathcal{T}$ ,  $d(T_i x, T_i x') \leq \rho d(x, x')$ .

On considère alors la transformation  $\mathcal{T} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  définie par

$$\mathcal{T}(F) = T_1(F) \cup \dots \cup T_k(F).$$

**Proposition 5.2.2.** *La transformation  $\mathcal{T}$  est  $\rho$ -lipschitzienne.*

L'existence de ces ensembles fractals est alors une conséquence immédiate du théorème de point fixe de Banach-Picard, déjà vu en L3 :

**Théorème 5.2.3** (Banach-Picard). *Soit  $(\mathcal{F}, d)$  un espace complet non vide, et  $\mathcal{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  une application contractante : il existe  $\rho \in [0, 1[$  telle que pour tous  $x, x' \in \mathcal{F}$ ,  $d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(x')) \leq \rho d(x, x')$ . Alors  $\mathcal{T}$  admet un unique point fixe, vers lequel convergent toutes les orbites positives de  $\mathcal{T}$ .*

**Exercice 44.**—

1. Retrouver les trois applications contractantes du plan permettant de formaliser le procédé représenté sur la figure 5.2.
2. Pour chacun des cinq ensembles de la figure 5.1, déterminer ues transformations  $T_i$  pour lesquelles l'ensemble apparaît comme point fixe de la transformation  $\mathcal{T}$  associée.

**Exercice 45.**—(Autre preuve de l'existence d'un point fixe de  $\mathcal{T}$ , dans  $X = \mathbb{R}^n$ )

1. Montrer qu'on peut trouver un fermé  $F$  tel que  $T_i(F) \subset F$  pour chaque  $i$ .
2. On pose

$$F_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{T}^n(F).$$

Montrer que  $F_\infty \in \mathcal{F}(X)$  et que c'est un point fixe de  $\mathcal{T}$ .

**3.** Pouvez-vous définir une classe d'espaces métriques (généralisant  $\mathbb{R}^n$ ) pour lesquels cette preuve "marche" ?

---

**Exercice 46.**— Dans le cadre du théorème, notons  $F_\infty$  le point fixe de  $\mathcal{T}$  : on a donc

$$F_\infty = \bigcup_{i=1}^k T_i(F_\infty).$$

Supposons que les  $k$  ensembles  $T_i(F_\infty)$  sont disjoints. Montrer que  $F_\infty$  est *totalelement discontinu*, i.e. ses composantes connexes sont des points.

---

### Exemples historiques

– [Ensemble triadique de Cantor](#) (1884). Tout espace métrique compact sans point isolé et totalelement discontinu est homéomorphe à l'ensemble de Cantor (et encore appelé ensemble de Cantor par extension).

– [flocon de neige de Koch](#) (1904), une courbe continue sans tangente.

– [Tapis de Sierpinski](#) (1916). Ensemble universel pour les sous-espaces du plan de dimension 1.

– [Collier d'Antoine](#) (1921). Il s'agit d'un ensemble de Cantor plongé dans  $\mathbb{R}^3$ , il est donc homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor, mais il n'existe aucun homéomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui envoie cet ensemble dans une droite.

– [Eponge de Menger](#) (1926). C'est un "ensemble universel" pour les espaces topologiques de dimension un : tout tel espace est homéomorphe à un sous-espace de l'éponge de Menger.

– [Benoit Mandelbrot](#) montre en 1973 que la géométrie fractale est pertinente pour décrire certaines formes naturelles : côte de la Bretagne, cratères de la lune, courbes aléatoire comme le mouvement brownien, etc.

– Les objets limites des systèmes dynamiques sont souvent des fractales, mais plus complexes que les IFS ([attracteur de Lorentz](#), de Plykin, Lacs de Wada, etc).

## 5.3 La distance de Hausdorff

Commençons par essayer d'avoir une intuition sur cette distance. Etant donnée une partie  $E$  de  $X$  et  $\varepsilon > 0$ , on appelle  $\varepsilon$ -voisinage de  $E$  l'ensemble

$$V_\varepsilon(E) = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon) = \{x \in X, d(x, E) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid \exists y \in E, d(x, y) < \varepsilon\}.$$

---

**Exercice 47.**—

1. Expliquer pourquoi la formule

$$d(E_1, E_2) = \inf\{d(x, y) \mid x \in E_1, y \in E_2\}$$

ne définit pas une distance sur  $\mathcal{F}(X)$ . Expliquer pourquoi la formule pour  $d_H$  ne définit pas une distance sur l'ensemble des parties bornées de  $X$ .

2. Montrer la formule

$$d_{\text{Hausdorff}}(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid F_1 \subset V_\varepsilon(F_2) \text{ et } F_2 \subset V_\varepsilon(F_1)\}.$$

3. On suppose que  $X$  est compact (ou plus généralement que les boules fermées de  $X$  sont compactes, comme c'est le cas pour  $\mathbb{R}^d$ ). **a.** Montrer que l'ensemble  $\mathcal{F}_{\text{finies}}(X)$  des parties finies de  $X$  est dense dans  $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$ . **b.** Montrer que la distance à une partie fermée est atteinte : pour tout  $F \in \mathcal{F}(X)$  et tout  $x \in X$  il existe  $y \in F$  tel que  $d(x, y) = d(x, F)$ . **c.** Montrer que la distance de Hausdorff est atteinte : soient  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$ , et supposons pour fixer les idées que

$$\sup\{d(x, F_2) \mid x \in F_1\} \leq \sup\{d(x, F_1) \mid x \in F_2\}.$$

Il existe alors  $x_2 \in F_2$  tel que  $d(x_2, F_1) = d_{\text{Hausdorff}}(F_1, F_2)$ .

4. Montrer que l'application  $\Psi$

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathcal{F}(X) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

est un plongement isométrique de  $(X, d)$  dans  $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$ .

**Exercice 48.**— Montrer le critère pratique suivant :

$$d_{\text{Hausdorff}}(A, B) \leq \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, A \subset V_{\ell+\varepsilon}(B) \text{ et } B \subset V_{\ell+\varepsilon}(A).$$

En déduire l'inégalité triangulaire pour la distance de Hausdorff.

## 5.4 Preuve de la complétude

**Une caractérisation de la complétude** Nous allons utiliser une caractérisation pratique de la complétude. Étant donnée une suite  $(F_n)$  dans un espace métrique  $(\mathcal{F}, d)$ , on considère la propriété :

$$(*) \quad \forall n, d(F_n, F_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

**Lemme 5.4.1.**

1. Une suite vérifiant  $(*)$  est de Cauchy.
2. L'espace métrique  $(\mathcal{F}, d)$  est complet si et seulement si toute suite vérifiant  $(*)$  converge.

**Fin de la démonstration** On revient maintenant à notre espace  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 5.4.2.** (*inutile logiquement mais utile pédagogiquement*) Soit  $(F_n)$  une suite convergente dans  $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$ . Alors

$$\lim(F_n) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{p \geq n} F_p} = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 0, \exists p \geq n, F_p \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\} \quad (**).$$

*Preuve de la complétude.* On utilise le critère du premier lemme. Soit  $(F_n)$  vérifiant (\*). On définit  $F_\infty$  par la formule (\*\*) du second lemme. Il s'agit de montrer que la suite  $(F_n)$  converge vers  $F_\infty$  dans  $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$ . On va montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$d_{\text{Hausdorff}}(F_\infty, F_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

ce qui entraîne le résultat. Fixons un entier  $n$ . L'inégalité précédente est la conséquence immédiate des deux propriétés suivantes :

$$(1) \forall \varepsilon > 0, F_\infty \subset V_{\frac{1}{2^{n-1}} + \varepsilon}(F_n); \quad (2) F_n \subset V_{\frac{1}{2^{n-1}}}(F_\infty).$$

(Dans ce qui suit, on explique qualitativement le raisonnement **en laissant à la lectrice la détermination des valeurs numériques précises**). Montrons (1). Soit  $\varepsilon > 0$ , soit  $x \in F_\infty$ , il s'agit de trouver un point de  $F_n$  assez proche de  $x$ . La définition de  $F_\infty$  nous fournit un entier  $p \geq n$  et un point  $y$  de  $F_p$  proche de  $x$ . En utilisant la propriété (\*) pour tous les entiers entre  $n$  et  $p-1$ , on majore  $d(F_n, F_p)$ , ce qui donne un point  $z$  de  $F_n$  proche de  $y$ , et on obtient (1).

Montrons (2). Soit  $x$  un point de  $F_n$ , il s'agit de trouver un point  $y$  de  $F_\infty$  assez proche de  $x$ . La propriété (\*) appliqué successivement à  $n, n+1, \dots$  permet de construire une suite  $(x_k)_{k \geq n}$  avec  $x_n = x$ ,  $d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}$  et  $x_k \in F_k$  pour tout  $k \geq n$ . Elle converge vers un point  $y$  qui n'est pas trop loin de  $x$ .  $\square$

## 5.5 Complément : dépendance continue en un paramètre

**Théorème 5.5.1** (Point fixe à paramètres). *Supposons qu'on a une famille  $(T_\lambda)$  d'applications de  $X$  dans  $X$ ,  $\rho$ -contractantes, qui dépendent continument d'un paramètre  $\lambda$  : autrement dit, on a un espace topologique  $L$  et l'application  $(\lambda, x) \mapsto T_\lambda(x)$  est continue de  $L \times X$  dans  $X$ . Notons  $x_\lambda$  le point fixe de  $T_\lambda$ . Alors l'application  $\lambda \mapsto x_\lambda$  est continue.*

*Démonstration.* Complétez l'inégalité suivante :

$$d(x_\lambda, x_{\lambda'}) = d(T_\lambda(x_\lambda), T_{\lambda'}(x_{\lambda'})) \leq d(T_\lambda(x_\lambda), T_{\lambda'}(x_\lambda)) + d(T_{\lambda'}(x_\lambda), T_{\lambda'}(x_{\lambda'})) \leq \dots$$

On en déduit une majoration de  $d(x_\lambda, x_{\lambda'})$  par une quantité qui tend vers 0 lorsque,  $\lambda$  étant fixé,  $\lambda'$  tend vers  $\lambda$ .  $\square$

Si chacune des transformations utilisées pour définir une fractale dépend continument d'un paramètre  $\lambda$ , la fractale dépend continument de  $\lambda$  pour la distance de Hausdorff. Ceci permet de faire des déformations de fractales animées...

## 5.6 Ouverture : dimension fractale

Soit  $E \subset \mathbb{R}^d$ , et  $s \geq 0$ . Appelons  $\delta$ -recouvrement un recouvrement de  $E$  par des ensembles  $\{U_i\}_{i \in I}$  de diamètres  $|U_i| \leq \delta$ . On appelle *mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle de  $E$*  le nombre

$$\mathcal{H}^s(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

C'est un élément de  $[0, +\infty]$ . On montre que cette formule définit une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^d$ .

On montre également qu'il existe un unique  $s_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\mathcal{H}^s(E) = 0$  si  $s < s_0$  et  $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$  si  $s > s_0$ . Ce nombre est appelé *dimension de Hausdorff* de  $E$ . Il généralise la notion habituelle de dimension.

---

**Exercice 49.**— Vérifier que la dimension de Hausdorff de  $[0, 1]$  est  $\leq 1$ , celle de  $[0, 1]^2$  est  $\leq 2$ . Les inégalités inverses sont vraies, mais plus difficiles à obtenir...

---

Dans le cadre du théorème sur les IFS, supposons que chaque  $T_i$  est une similitude, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport  $c_i \in ]0, 1[$ . Supposons aussi que les  $k$  ensembles  $T_i(F_\infty)$  sont disjoints. Alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite  $F_\infty$  est l'unique nombre  $s$  vérifiant

$$\sum_{i=1}^k c_i^s = 1.$$

Hormis ce cas bien compris, les calculs de dimension de Hausdorff sont très difficiles. En particulier, on peut utiliser des techniques de théorie géométrique de la mesure. La lectrice intéressée pourra se reporter aux livres de géométrie fractale de Kenneth Falconer.



# Intermède historique : des équations différentielles aux systèmes dynamiques

début XVIIème : motivations, Galilée, Kepler, Descartes, Fermat.

fin XVIIème : Newton, Leibniz. (1) La relation fondamentale de la dynamique, (2) la loi de la gravitation universelle, (3) le calcul différentiel.

XVIIIème : le succès, modélisation, résolution (Bernouilli, Euler, Lagrange).

XIXème : fondements théoriques (Cauchy, Lipschitz, Peano, Picard).

fin XIXème : problème des trois corps, changement de point de vue de Poincaré.

XXème : développement des systèmes dynamiques.

*Systèmes dynamiques à temps continu* est synonyme d'étude qualitative des équations différentielles de la forme  $x' = X(x)$ . Nous avons étudié jusqu'à présent les systèmes dynamiques à temps discret, qui consistent à itérer des transformations  $T : U \rightarrow U$  : étant donné un état  $x \in U$  au temps  $n$ ,  $T(x)$  représentait l'état du système au temps  $n + 1$ . De façon analogue, étant donné un état  $x \in U$  au temps  $t$ , et un "temps infinitésimal"  $dt$ , l'état du système au temps suivant est donné par l'équation différentielle, sous la forme  $x'(t + dt) = x(t) + x'(t)dt = x(t) + X(x(t))dt$ . Comme pour les systèmes dynamiques à temps discret, on s'intéressera au *comportement asymptotique du système*, c'est-à-dire au comportement d'une solution  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Cependant, contrairement au cas discret où l'existence d'une suite définie par une relation de récurrence est évidente, il nous faudra d'abord montrer l'existence des solutions d'une équation différentielle.

Reprenons le modèle de population de Verhulst, qui postulait que l'accroissement de la population  $x$  était proportionnelle à  $x(M - x)$  pour une certaine constante  $M$  correspondant à la population maximale. A partir de cette hypothèse, un modèle à temps discret donne  $x_{n+1} = x_n + \mu x_n(M - x_n)$  et conduit à l'itération de l'application logistique. Dans un modèle à temps continu, on obtient l'équation différentielle

$$x' = \mu x(M - x)$$

Il s'agit d'une équation différentielle autonome, type d'équations que nous allons étudier maintenant.

**Le film *Chaos*** Le film de vulgarisation [Chaos](#) est une introduction aux systèmes dynamiques chaotiques. Le film a été conçu pour le “grand public”, cependant il constitue un excellent support pour aider l’étudiant à visualiser les concepts introduits ici. Voici un guide en lien avec le cours :

– Chaos I : 8’ les billards, la sensibilité aux conditions initiales (SCI). 10’30, le problème des trois corps. 12’50, la théorie ergodique.

– Chaos II : calcul différentiel. 2’30 la vitesse en légo. 4’30 Champs de vecteurs. 6’30 trajectoires. 7’30 théorème de Cauchy-Lipschitz. 8’30 définition du flot. 10’ SCI, l’hypothèse de Maxwell. 11’50 la dimension 3.

– Chaos IV le théorème de Poincaré-Bendixson. Le pendule, l’espace des phases. 8’30 idée de la preuve du théorème de Poincaré Bendixson.

– Chaos VII 8’, l’effet papillon, l’attracteur de Lorentz.

Deuxième partie

Systemes dynamiques à temps  
continu



# Chapitre 6

## Théorème fondamentaux

Dans de chapitre, nous énonçons et démontrons les théorème fondamentaux sur les équations différentielles : le théorème de Cauchy-Lipschitz d’existence et d’unicité, l’existence de solutions maximales, le théorème d’explosion. Par soucis de simplicité, nous nous restreignons aux équations différentielles “autonomes d’ordre 1”, c’est-à-dire données par un champ de vecteurs qui ne dépend pas du temps. Nous expliquons dans la dernière section comment l’étude des équations d’ordre supérieur, ou non autonomes, peut se ramener à ce cadre apparemment plus restreint.<sup>1</sup>

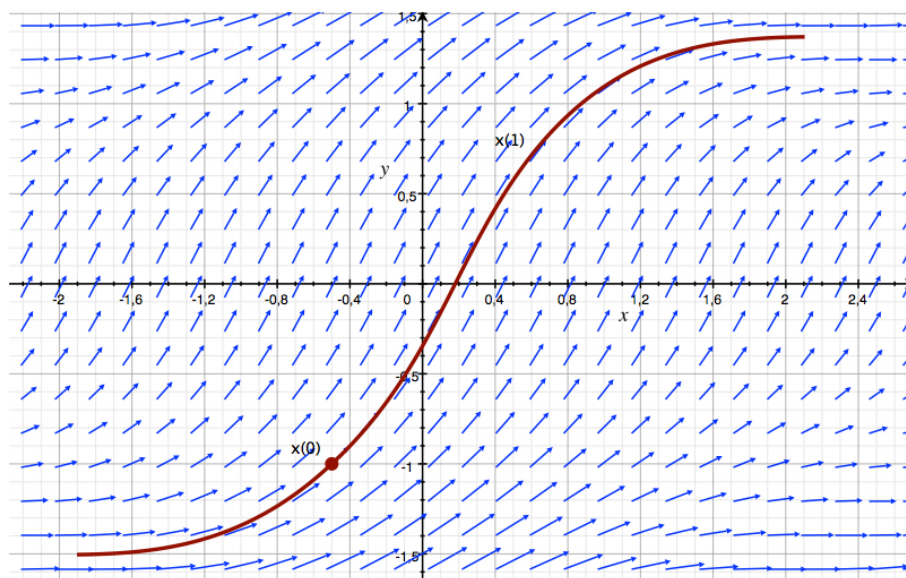


FIGURE 6.1 – Un champ de vecteurs sur le plan, et une courbe solution avec la condition initiale  $x(0) = (-0,5, -1)$

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , une application  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelée *champ de*

---

1. Sources pour ce chapitre et les suivants : Demailly, Analyse numérique et équations différentielles. Poly de Claude Viterbo, [Equations différentielles et systèmes dynamiques](#). Poly de Jean-Christophe Yoccoz, [Cours de topologie, calcul différentiel et équations différentielles](#).

vecteurs sur  $U$ . On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad x' = X(x).$$

Une *solution* de cette équation différentielle est une fonction  $x : I \rightarrow U$  (une courbe) définie sur un certain intervalle **ouvert**  $I$ , dérivable sur  $I$ , telle que pour tout  $t \in I$ ,  $x'(t) = X(x(t))$ . L'équation différentielle signifie que la vitesse  $x'(t)$  d'une solution au temps  $t$  est donnée par la valeur du champ de vecteurs  $X$  au point  $x(t)$  : la courbe "suit" les flèches. On dit également que c'est une *courbe intégrale du champ de vecteurs*  $X$ .

## 6.1 Existence et unicité

**Théorème** (Cauchy-Lipschitz). *Si  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est localement lipschitzienne, alors pour toute condition initiale  $x_0 \in U$  et tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il existe  $T > 0$  tel que l'équation différentielle  $x' = X(x)$  admet une unique solution définie sur  $]t_0 - T, t_0 + T[$  vérifiant  $x(t_0) = x_0$ .*

La propriété  $x(t_0) = x_0$  est appelée *condition initiale* de la solution. On rappelle que  $X$  est une application *lipschitzienne* s'il existe une constante  $K$  telle que

$$(1) \quad \forall x_1, x_2 \in U, \quad \|X(x_2) - X(x_1)\| \leq K \|x_2 - x_1\|.$$

Elle est *localement lipschitzienne* si tout point admet un voisinage en restriction duquel  $X$  est lipschitzienne.

---

**Exercice 50.**—

1. En utilisant [l'inégalité des accroissements finis](#), montrer que toute application  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  est localement lipschitzienne.
  2. Montrer que la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  mais pas lipschitzienne.
  3. (moins vital mais intéressant) Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$ , alors  $f$  est lipschitzienne si et seulement si  $f'$  est bornée.
- 

*Démonstration.* On remarque d'abord que comme le champ de vecteurs ne dépend pas du temps, on peut supposer que  $t_0 = 0$ . En effet, si  $x : ]-T, T[ \rightarrow U$  est une solution vérifiant la condition initiale  $x(0) = x_0$ , alors l'application  $y : ]t_0 - T, t_0 + T[ \rightarrow U$  définie par  $y(t) = x(t + t_0)$  est une solution vérifiant la condition initiale  $y(t_0) = x_0$ . (**Vérifier !**).

1. L'application  $X$  est localement lipschitzienne : il existe  $K, \delta > 0$  tel que la boule fermée  $B = B_\delta(x_0)$  de centre  $x_0$  et de rayon  $\delta > 0$  est incluse dans  $U$ , et  $X$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $B$ .
2. Puisque  $X$  est lipschitzienne sur  $B$ , elle est bornée : il existe  $M > 0$  tel que  $\|X(x)\| \leq M$  pour tout  $x \in B$ .

Choisissons de plus un  $T > 0$  et posons  $I = ]-T, T[$ . (On dispose donc pour la suite de la preuve des constantes  $T, \delta, K, M$ .)

**Lemme 6.1.1.** *Pour qu'une application continue  $x : I \rightarrow U$  soit solution de l'équation  $x' = X(x)$  avec la condition initiale  $x(0) = x_0$ , il faut et il suffit que, pour tout  $t \in I$  on ait*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X(x(s)) ds.$$

---

**Exercice 51.** — Démontrer le lemme.

---

On considère alors l'ensemble  $C_0(I, B, x_0)$  des applications  $x$  continues de  $I$  dans  $B$  vérifiant  $x(0) = x_0$ , muni de la norme uniforme

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|$$

(où on a fixée une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^m$ ). Il s'agit d'une partie fermée de l'espace de Banach  $C_0(I, \mathbb{R}^m)$ , c'est donc un espace métrique **complet**.

Etant donné une courbe quelconque  $x$  qui est un élément de  $C_0(I, B)$ , considérons la courbe  $\mathcal{F}(x)$  définie par

$$\forall t \in I, \quad \mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_0^t X(x(s)) ds.$$

On va montrer (a) qu'en choisissant  $T$  assez petit on peut faire en sorte que  $\mathcal{F}(x)$  soit encore un élément de  $C_0(I, B)$ ; on a alors une l'application

$$\mathcal{F} : C_0(I, B) \rightarrow C_0(I, B),$$

et (b) quitte à diminuer encore  $T$  cette application est  $\frac{1}{2}$ -contractante. Supposons d'abord ceci démontré. Pour ce choix de  $T$ , le théorème du point fixe de Banach s'applique, et l'application  $\mathcal{F}$  admet un unique point fixe, et on conclut avec le lemme que notre problème admet bien une unique solution.

Reste à vérifier (a) et (b). En ce qui concerne (a), la formule définissant  $\mathcal{F}(x)$  implique que  $\mathcal{F}(x)(0) = x_0$ . Rappelons que  $B = B_\delta(x_0)$ . Pour vérifier que  $\mathcal{F}(x)$  est à valeurs dans  $B$ , on évalue, pour tout  $t \in I$ ,

$$\|\mathcal{F}(x)(t) - x_0\| \leq MT$$

et il suffit de choisir  $T \leq \frac{\delta}{M}$  pour avoir (a). Pour vérifier (b) on évalue, pour  $x, y \in C_0(I, B)$  et  $t \in I$ ,

$$\|\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(y)(t)\| \leq \int_0^t \|X(x(s)) - X(y(s))\| ds \leq TK \|x - y\|_\infty$$

et donc

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\|_\infty \leq TK \|x - y\|_\infty.$$

Il suffit de choisir  $T \leq \frac{1}{2K}$  pour avoir (2). Ceci conclut la preuve.

Remarquons pour la suite que l'argument marche évidemment pour tout  $T \leq \min\left(\frac{1}{2K}, \frac{\delta}{M}\right)$  : pour *tout* intervalle assez petit autour de  $t_0$  on a unicité d'une solution définie sur cet intervalle et vérifiant  $X(t_0) = x_0$ .  $\square$

Nous allons poursuivre dans la continuité de la preuve, en nous fatigant un peu pour inverser partiellement les quantificateurs en  $x_0$  et  $T$ .

**Minoration locale du temps de vie** Dans le contexte du théorème, montrons que, pour toutes les conditions initiales  $y_0$  assez proches de  $x_0$ , on peut choisir le même temps d'existence  $T$ <sup>2</sup>. Plus précisément, soient  $\delta, K, M$  vérifiant les propriétés 1 et 2 comme avant. Fixons un  $T > 0$  encore plus petit que dans la preuve,

$$T \leq \min \left( \frac{1}{2K}, \frac{\delta}{2} \right).$$

Soit maintenant un point  $y_0 \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ . La boule fermée  $B' = B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)$  est incluse dans  $B$ , par conséquent  $X$  est  $K$  lischitzienne et majoré par  $M$  sur cette boule. La preuve du théorème montre que l'équation différentielle admet une solution  $y$  vérifiant  $y(t_0) = y_0$  et définie sur l'intervalle  $I = ]t_0 - T, t_0 + T[$  (et d'image incluse dans  $B'$ ). Nous allons en déduire :

**Proposition** (Complément à l'existence). *Soit  $C$  un compact inclus dans  $U$ . Alors il existe  $T_C > 0$  tel que pour tout  $y_0$  dans  $C$  et tout  $t_0$ , il existe une (unique) solution  $y$  vérifiant la condition initiale  $y(t_0) = y_0$  et définie sur  $]t_0 - T_C, t_0 + T_C[$ .*

*Démonstration.* Par compacité, on peut recouvrir  $C$  par un nombre fini de boules  $B_{\frac{\delta_i}{2}}(x_0^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  pour lesquelles il existe des constantes  $K_i, M_i$  vérifiant les propriétés 1 et 2 ci-dessus. On pose

$$T_C = \min_i \min \left( \frac{1}{2K_i}, \frac{\delta_i}{2} \right)$$

qui convient. En effet, d'après ce qui précède, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , et pour toute condition initiale  $y_0 \in B_{\frac{\delta_i}{2}}(x_0^i)$ , il existe une unique solution  $y$  définie sur  $]t_0 - T_C, t_0 + T_C[$  et vérifiant  $y(t_0) = y_0$ .  $\square$

**Recollement de solutions** On considère deux solutions  $x : I \rightarrow U, y : J \rightarrow U$  de l'équation différentielle  $x' = X(x)$ , définie respectivement sur des intervalles ouverts  $I, J$  (ces intervalles peuvent a priori être beaucoup plus grands que ceux donnés par le théorème).

**Proposition** (Complément à l'unicité). *S'il existe  $t_0 \in I \cap J$  tel que  $x(t_0) = y(t_0)$ , alors  $x$  et  $y$  coïncident sur l'intervalle  $I \cap J$ , et définissent ensemble une solution de l'équation différentielle sur l'intervalle  $I \cup J$ .*

*Démonstration.* **Montrer** que l'ensemble  $E$  des  $t$  en lesquels les deux solutions coïncident est non vide, ouvert dans  $I \cap J$  (utiliser la remarque à la fin de la preuve de Cauchy-Lipschitz). Il est aussi fermé par continuité de  $x$  et  $y$ . **Conclure** par connexité.  $\square$

2. Ceci sera important pour la suite, pour démontrer le théorème d'explosion.



## 6.2 Solutions maximales, explosion

---

**Exercice 52.**— Partant de l'idée que le taux de reproduction est proportionnel au nombre de couples d'une population, on modélise l'évolution de cette population par l'équation différentielle  $x' = x^2$ . Vérifier que la formule

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

est solution de l'équation différentielle avec la condition initiale  $x(0) = x_0$ . En supposant  $x_0 > 0$ , donner son intervalle de définition  $I(x_0)$ . Quelle est la limite de  $x(t)$  lorsque  $t$  tend vers la borne supérieure de cet intervalle ? En déduire qu'il n'existe pas de solution définie sur un intervalle plus grand que  $I(x_0)$ . On dit que la solution est maximale.

---

On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz :  $X$  est une application localement lipschitzienne définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . On fixe une condition initiale  $(t_0, x_0)$ . Soit  $I_{max}$  la réunion de tous les intervalles  $I$  contenant  $t_0$  et pour lesquels il existe  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est solution de l'équation différentielle  $x' = X(x)$  avec la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ . C'est un intervalle ouvert. On définit alors une courbe  $x_{max} : I_{max} \rightarrow U$  en posant, pour tout  $t \in I_{max}$ ,  $x_{max}(t) = x(t)$  où  $x$  est n'importe quelle solution définie sur un intervalle  $I$  contenant  $t$  : cette définition est valide car bien que plusieurs choix soient possibles pour  $x$ , la valeur de  $x(t)$  n'en dépend pas, d'après la proposition précédente. La courbe  $x_{max}$  s'appelle *solution maximale* pour la condition initiale  $(t_0, x_0)$ . L'intervalle  $I_{max}$  est appelé *intervalle de vie* pour cette condition initiale. L'adjectif "maximale" exprime la propriété suivante : *toute autre solution de l'équation différentielle avec la même condition initiale s'obtient en restreignant  $x_{max}$  à un intervalle ouvert  $I \subset I_{max}$* . (Remarquons que si  $x_{max}(t'_0) = x'_0$  pour un autre temps  $t'_0$  et un autre point  $x'_0$ ,  $x_{max}$  est aussi une solution maximale pour la condition initiale  $(t'_0, x'_0)$ .)

On a obtenu le premier point de l'énoncé suivant.

### Proposition 6.2.1.

1. (*solution maximale*) A toute condition initiale  $(t_0, x_0)$ , avec  $x_0 \in U$ , correspond une unique solution maximale  $x_{max}$  vérifiant  $x_{max}(t_0) = x_0$ .
2. (*explosion*) Supposons que  $I_{max} = ]\tau_-, \tau_+[$  avec  $\tau_+ < +\infty$ . Alors la solution "sort de tout compact" : pour toute partie compacte  $C$  de  $U$ , il existe  $T \in I_{max}$  tel que pour tout  $t \in I_{max}$ , si  $t > T$  alors  $x_{max}(t) \notin C$ .

Dans le second point, on a bien sûr un énoncé symétrique lorsque  $\tau_- > -\infty$ .

**Exemple fondamental** En conséquence de la deuxième partie, si le champ de vecteurs est défini sur  $U = \mathbb{R}^m$  tout entier mais que  $\tau_+ < +\infty$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \tau_+} \|x_{max}(t)\| = +\infty$$

Pour voir ceci, **appliquer** le résultat d'explosion aux boules de rayon  $M$  quelconque.

*Preuve de la proposition.* Soit  $C$  une partie compacte de  $U$ . La minoration locale du temps de vie nous donne un temps  $T_C > 0$  qui a la propriété suivante : pour tout  $t'_0$  et toute condition initiale  $x'_0 \in C$ , la solution maximale  $x$  vérifiant  $x(t'_0) = x'_0$  est définie sur un intervalle qui contient  $]t'_0 - T_C, t'_0 + T_C[$  (voir ci-dessus le complément à l'existence). Soit alors  $t'_0 \in I_{max}$  tel que  $x_{max}(t'_0) \in C$ . Alors  $I_{max}$  contient l'intervalle  $[t'_0, t'_0 + T_C[$  (**pourquoi ?**). On a donc  $\tau_+ \geq t'_0 + T_C$ . Par contraposition, on a montré que pour tout  $t \in ]\tau_+ - T_C, \tau_+[$  on a  $x_{max}(t) \notin C$ . Le nombre  $T = \tau_+ - T_C$  vérifie la conclusion de l'énoncé.  $\square$

---

**Exercice 53.**— Soit  $U = ]-1, 1[$  et  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  le champ constant égal à 1. Quelles sont les solutions maximales ? La propriété de sortie de tout compact de  $U$  est-elle vérifiée ?

---

### 6.3 Autres cadres

**Les équations différentielles non autonomes** Tous les résultats précédents se généralisent aux équations différentielles non autonomes (existence et unicité, solutions maximales, explosion). Une *équation différentielle non autonome* est de la forme

$$(*) \quad y' = X(t, y)$$

où  $X : K \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $K$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  ; on dit aussi que  $X$  est un *champ de vecteurs dépendant du temps*. On peut lui associer une équation différentielle autonome, quitte à augmenter la dimension de l'espace, de la façon suivante. On pose

$$\tilde{U} = K \times U \text{ et } \tilde{X}(x) = (1, X(x))$$

ce qui définit une application  $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ , et on considère l'équation différentielle

$$(**) \quad x' = \tilde{X}(x).$$

On remarque que si  $y$  est une solution de (\*) alors  $x(t) = (t, y(t))$  est une solution de (\*\*), et réciproquement si  $x$  est une solution de (\*\*) alors ses  $m$  dernières coordonnées donnent une solution de (\*). En appliquant à  $\tilde{X}$  les résultats de la section précédente, on en déduit par exemple *l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle non autonome (\*) lorsque  $X$  est localement lipschitzien*. En reprenant complètement la démonstration, on peut démontrer un résultat un peu plus fort : pour avoir existence et unicité il suffit en fait que  $X$  soit *localement lipschitzien en la variable d'espace*, c'est-à-dire que tout point de  $I \times U$  admet un voisinage  $V$  tel que pour tout  $(t, y_1), (t, y_2) \in V$ ,  $\|X(t, y_1) - X(t, y_2)\| \leq K \|y_1 - y_2\|$ . Voir les références données au début de chapitre pour les détails.

**Les équations différentielles d'ordre supérieur** La mécanique conduit souvent à des équations différentielles d'ordre 2, puisque la loi de Newton porte sur l'accélération, qui est la dérivée seconde de la position. Voyons comment obtenir des résultats sur les équations différentielles d'ordre 2 en les ramenant à nouveau à une équation différentielle d'ordre 1, quitte cette fois encore à augmenter la dimension de l'espace. Voici les détails. Considérons une équation différentielle d'ordre 2, de la forme

$$(*) \quad y'' = F(y, y')$$

où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ . Soit  $y$  une solution de cette équation différentielle et posons  $x(t) = (y(t), y'(t))$ .

---

**Exercice 54.**— Dériver  $x$  et en déduire un champ de vecteurs en dimension  $2m$  dont c'est une courbe intégrale.

---

En dérivant  $x$  on voit qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1,

$$(**) \quad x' = X(x)$$

pour le champ de vecteurs  $X$  défini par  $X(x, y) = (y, F(x, y))$ . Réciproquement, toute solution de  $(**)$  redonne une solution de  $(*)$  en prenant les  $m$  dernières coordonnées. Comme dans le paragraphe précédent, on peut appliquer à  $(**)$  les résultats des sections précédentes. On en déduit l'existence et l'unicité des solutions de  $(*)$  pour une condition initiale donnée ; attention cependant, la condition initiale doit spécifier la valeur de  $y$  et de  $y'$  en un temps  $t_0$  donné, elle est du type

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = z_0$$

pour  $t_0, y_0, z_0$  donnés.

On peut de même ramener toute équation différentielle d'ordre  $> 2$  à une équation différentielle d'ordre 1 ; on peut aussi mélanger les méthodes des deux paragraphes précédents pour ramener une équation différentielle non autonome d'ordre 2, du type  $z' = F(t, z, z')$ , à une équation différentielle d'ordre 1.



# Chapitre 7

## Dimension un

On considère dans ce chapitre des équations différentielles **non autonomes** en dimension un, du type  $x' = X(t, x)$ , où la fonction  $X$  est définie sur un produit d'intervalles ouverts  $K \times L$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On notera  $K = ]a, b[$  et  $L = ]\alpha, \beta[$ . Une solution est, par définition, une fonction dérivable  $x : I \rightarrow L$ , définie sur un intervalle  $I \subset K$ , telle que pour tout  $t \in I$  on ait  $x'(t) = X(t, x(t))$ .

### 7.1 Théorèmes fondamentaux

On rappelle dans ce cadre les théorèmes obtenus au chapitre précédent, et on les interprète graphiquement.

**Théorème 7.1.1** (Existence et unicité des solutions reformulé). *Supposons que  $X$  est de classe  $C^1$  (ou juste localement lipschitzienne). Pour toute condition initiale  $(t_0, x_0)$  avec  $t_0 \in K$  et  $x_0 \in L$ , il existe une unique solution maximale  $x_{max}$  de l'équation différentielle*

$$x'(t) = X(t, x(t))$$

*vérifiant  $x_{max}(t_0) = x_0$ .*

**Théorème 7.1.2** (Explosion en dimension un non autonome). *Sous les hypothèses du théorème précédent, soit  $x : I_{max} \rightarrow \mathbb{R}$  une solution maximale, supposons que  $I_{max} = ]a', b'[$  dont la borne supérieure  $b'$  est strictement inférieure à la borne supérieure  $b$  de  $K$ . Alors  $x(t)$  tend vers l'une des bornes  $\alpha, \beta$  de l'intervalle  $L$  lorsque  $t$  tend vers  $b'$ .*

On obtient ces deux résultats en considérant le champ de vecteurs  $\tilde{X}(t, x) = (1, X(t, x))$  défini sur  $K \times L$ , comme indiqué à la fin du chapitre précédent, et en lui appliquant les théorèmes d'existence et d'unicité et d'explosion. Les détails sont laissés à la lectrice.

**Interprétation géométrique** L'équation  $x' = X(t, x)$  impose la valeur de la dérivée d'une solution  $x$  en fonction de  $t$  et de  $x(t)$ ; autrement dit, en chaque point  $(t, x)$  de  $K \times L$ , elle impose la pente de la tangente au graphe d'une solution

passant par ce point. On peut donc **dessiner l'équation différentielle** en traçant, en un grand nombre de point  $(t, x)$ , une droite de pente  $X(t, x)$ . Les graphes des solutions “suivent” les pentes des droites dessinées. De façon équivalente, au lieu de dessiner la droite de pente  $X(t, x)$  on peut tracer le vecteur de coordonnées  $\tilde{X}(t, x) = (1, X(t, x))$  qui a la même pente.

D'un point de vue géométrique, le théorème de Cauchy-Lipschitz peut s'énoncer ainsi : **les graphes des solutions maximales de l'équation différentielle forment une partition de l'ouvert  $K \times L$** . En effet, c'est juste une façon de reformuler le fait que tout point  $(t_0, x_0) \in K \times L$  appartient au graphe d'une unique solution maximale.

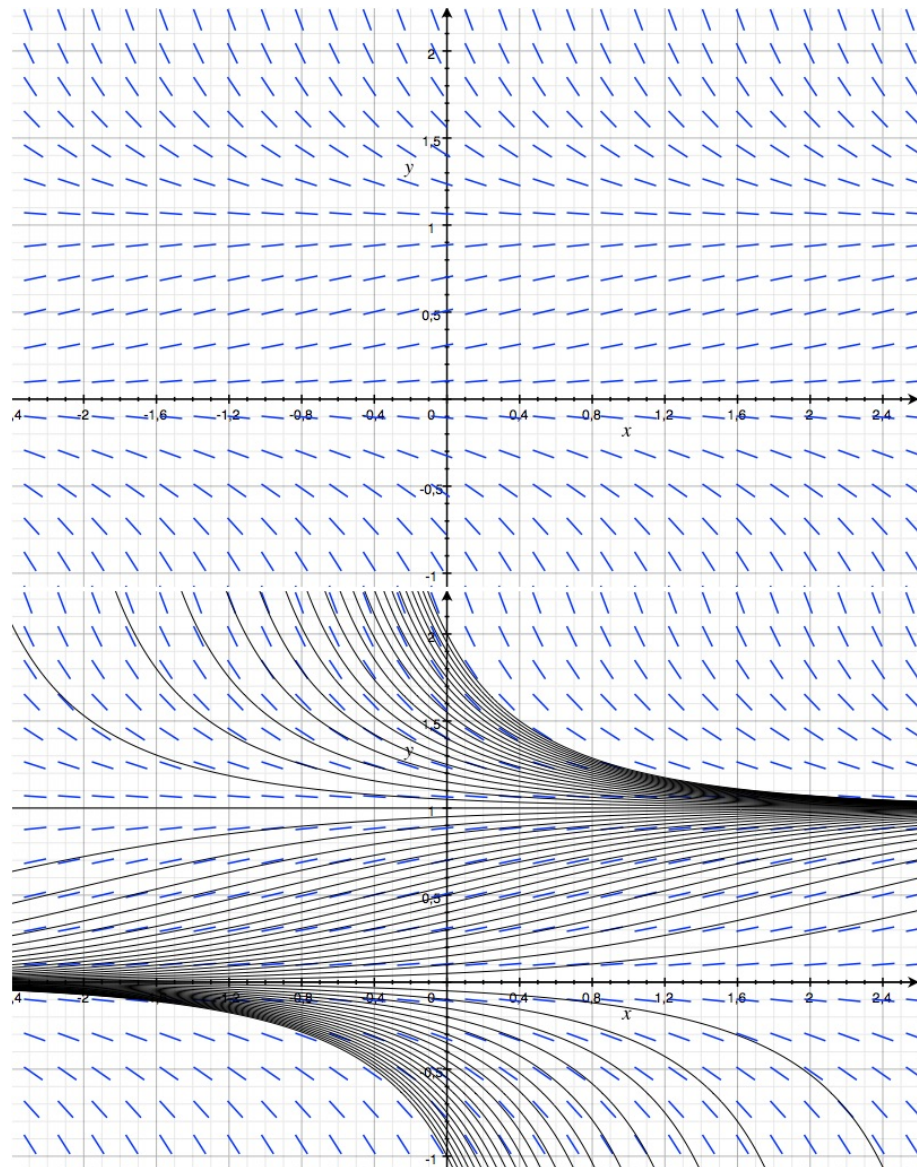


FIGURE 7.1 – Représentation graphique de l'équation différentielle  $x' = x(1 - x)$  et “feuilletage” par les graphes des solutions

**Outils pratiques** Ces deux résultats théoriques, existence et unicité et explosion, sont des outils puissants pour étudier les solutions d'une équation différentielle sans la résoudre.

---

**Exercice 55.**—

1. Montrer que les solutions de l'équation  $x' = x^2 \cos(x)$  sont de signe constant.
  2. Soit  $f$  la solution maximale de l'équation différentielle  $x' = -tx$  vérifiant  $f(0) = 1$ , on note  $]a, b[$  son intervalle de vie.
    - a. Donner (sans résoudre l'équation!) le tableau de variation de  $f$ .
    - b. En déduire que l'intervalle de vie est  $\mathbb{R}$ .
- 

---

**Exercice 56.**—(Équation de population) Que pouvez-vous dire qualitativement, sans la résoudre, sur l'équation différentielle de population  $p' = \mu p(M - p)$ ? ( $\mu, M > 0$  et on prendra une condition initiale  $p_0 > 0$ ).

---

## 7.2 Barrières

On décrit ici un outil supplémentaire très utile pour l'étude qualitative d'une équation différentielle en dimension un.

On considère comme avant l'équation différentielle  $x' = X(t, x)$ , où  $X$  est une fonction continue de  $K \times L$  dans  $\mathbb{R}$ <sup>1</sup>. On appellera *sur-solution* toute fonction dérivable  $y : I \rightarrow L$ , définie sur un intervalle  $I \subset K$ , telle que pour tout  $t \in K$ ,  $X(t, y(t)) < y'(t)$ . Le graphe d'une sur-solution est appelé *barrière descendante*. Graphiquement, en terme de champ de droites, en tout point d'une barrière descendante, la pente de la tangente est supérieure à la pente du champ : le champ coupe la barrière "vers le bas".

L'intérêt des barrières, c'est (1) qu'il est beaucoup plus facile de trouver des barrières que des solutions (il y en a plus!), et (2) qu'une bonne barrière peut donner des indications sur le comportement des solutions, à l'aide du théorème suivant.

**Proposition** (Barrières descendantes). *Soient  $y : I \rightarrow L$  une sur-solution, et  $x : I \rightarrow L$  une solution. Supposons qu'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $x(t_0) \leq y(t_0)$ . Alors pour tout  $t > t_0$ ,  $t \in K$ , on a  $x(t) < y(t)$ .*

De façon analogue, on a bien sûr la notion de sous-solution (ou barrière montante) et un résultat symétrique.

*Démonstration.* Soient  $y, x, t_0$  comme dans l'énoncé. A l'aide d'un développement limité, **montrer** d'abord que la propriété est vraie pour les  $t$  voisins de  $t_0$  : il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon[$ ,  $x(t) < y(t)$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $t_1 \in I$  avec  $t_1 > t_0$  tel que  $x(t_1) = y(t_1)$ . **Montrer** qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t_1 - \varepsilon, t_1[$ , on a  $y(t) < x(t)$ . **En choisissant** soigneusement un tel  $t_1$ , **en déduire** une contradiction.  $\square$

---

1. On n'a pas besoin de condition de Lipschitz ici, puisque nous n'utilisons pas le théorème de Cauchy-Lipschitz

**Exemple** Pour trouver des sur-solutions, une idée consiste à résoudre une équation différentielle plus simple que celle que l'on veut étudier. Considérons par exemple l'équation différentielle  $x' = \cos(x) - t$ . Vérifier que si  $y$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = 2 - t$ , c'est une sur-solution.

---

**Exercice 57.**—

1. En exploitant cette idée, montrer que la solution de l'équation différentielle  $x' = \cos(x) - t$  vérifiant la condition initiale  $x(0) = 0$  a un intervalle de vie qui contient  $[0, +\infty[$ , et déterminer sa limite en  $+\infty$ .
  2. Inversement, mais avec la même idée, montrer que la solution de l'équation différentielle  $x' = x^2 + (\cos(xt))^2$  avec la condition initiale  $x(0) = 1$  "explose" : la borne supérieure de son intervalle de vie est finie.
- 

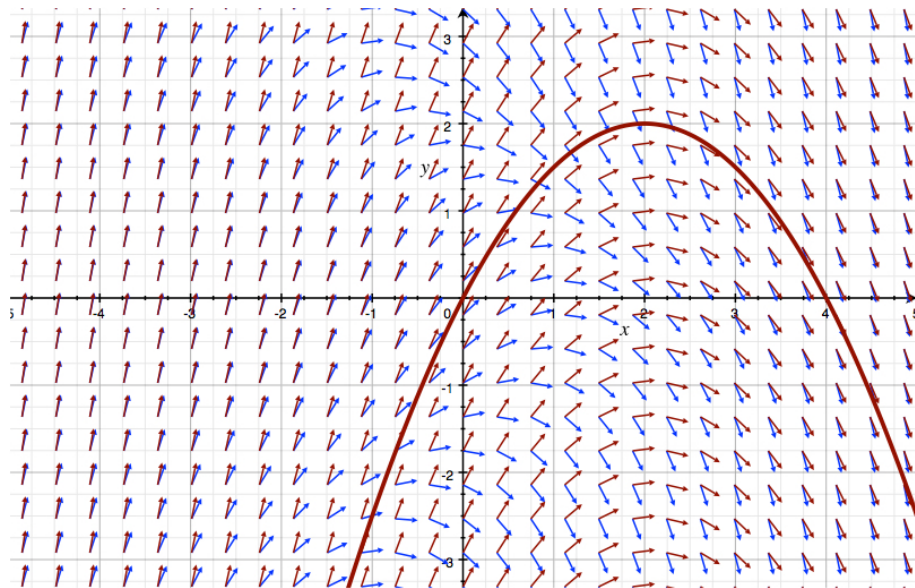


FIGURE 7.2 – Représentation graphique des équations  $x' = \cos(x) - t$  et  $x' = 2 - t$ , et une solution de la seconde. Comment voit-on sur le dessin que les solutions de la seconde sont des sur-solutions de la première ?

Même pour une étude qualitative, il est donc très utile de savoir résoudre des équations différentielles !

### 7.3 Les équations différentielles à variables séparables

*Résoudre* une équation différentielle, c'est décrire toutes les solutions. Dans la fin de ce chapitre nous allons décrire trois techniques de résolution.



**Un exemple célèbre** L'équation différentielle plus connue,  $x' = x$ , peut être résolue en l'écrivant sous la forme  $\frac{x'}{x} = 1$ , et en reconnaissant la dérivée de la fonction composée  $\ln(x)$ . En ajoutant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  et en intégrant entre  $t_0$  et un  $t$  réel quelconque on obtient donc

$$\ln(x(t)) - \ln(x_0) = t - t_0 \text{ c'est-à-dire } x(t) = \exp(t - t_0 + \ln(x_0))$$

qu'on peut encore écrire  $x(t) = C \exp(t)$  en posant  $C = x_0 \exp(-t_0)$  qui est une constante réelle quelconque. Oui mais... pour pouvoir diviser par  $x$  au début du calcul, on doit supposer que la fonction  $x$  ne s'annule jamais, on a donc trouvé ainsi les solutions qui ne s'annulent pas. Le point clé pour conclure est d'utiliser l'unicité donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz : la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$  est évidemment solution, et par unicité les autres solutions maximales ne s'annulent jamais.

**Cas général** De façon générale, une équation différentielle est dite à variables séparables si on peut l'écrire sous la forme

$$x'g(x) = f(t)$$

avec  $f$  et  $g$  deux fonctions d'une variable (définies respectivement sur des intervalles  $K, L$ ). Si on connaît une primitive  $G$  de  $g$ , et une primitive  $F$  de  $f$ , alors l'équation équivaut à l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\forall t \in I, G(x(t)) = F(t) + C$$

On n'obtient donc pas directement  $x$  comme fonction de  $t$ , mais comme fonction *implicite* de  $t$ , et il n'est pas toujours facile d'en déduire une formule explicite pour les solutions : il faut savoir inverser la fonction  $G$ .

---

**Exercice 58.**— Résoudre l'équation différentielle  $x'x^2 = t$ . *Réponse : les solutions sont les fonctions  $x(t) = (\frac{3}{2}t^2 + C)^{\frac{1}{3}}$ .* Résoudre l'équation différentielle  $x' = -xt$ , comparer à la figure 7.1 plus haut.

---



---

**Exercice 59.**—(Équation de population) Résoudre l'équation différentielle  $p' = \mu p(M - p)$  où  $\mu, M$  sont deux constantes strictement positives, et décrire l'évolution de la population. *Réponse : les solutions sont les fonctions*

$$p(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-\mu Mt}}$$


---

## 7.4 Equations linéaires d'ordre 1

Il s'agit des équations différentielles du type

$$x' = \lambda(t)x + \mu(t)$$

où  $\lambda, \mu$  sont deux fonctions continues définies sur un intervalle  $K$ . On traite d'abord le cas particulier où  $\mu = 0$ , qui est à variables séparables. Le cas général s'en déduit par la méthode de variation de la constante : on cherche la solution sous la forme  $y(t) = c(t)x(t)$  où  $x$  est une solution de l'équation "sans second membre"  $x' = \lambda(t)x$ .

---

**Exercice 60.**— Résoudre l'équation  $x' = \lambda(t)x + \mu(t)$ , donner la forme générale des solutions.

---

## 7.5 Changement de variable

On peut parfois transformer l'équation différentielle en une équation plus simple, en "changeant de variable", ou plutôt en changeant de fonction inconnue. Dans le chapitre suivant, nous interpréterons ce changement de fonction comme le fait de "transporter un champ de vecteurs par un difféomorphisme".

---

**Exercice 61.**— Résoudre l'équation différentielle  $p' = \mu p(1-p)$  à l'aide du changement de variable  $z = \frac{1}{p}$ .

---

# Chapitre 8

## Comparaison de solutions, flot

Dans ce chapitre, nous démontrons le lemme de Gronwall, qui permet de montrer que deux solutions sont proches si elles correspondent à des conditions initiales proches. Nous introduisons ensuite un concept central, le flot d'un champ de vecteurs. Il s'agit essentiellement de mettre ensemble toutes les solutions d'une équation différentielle, ce qui donne un point de vue global sur leurs propriétés : en poussant simultanément tous les points le long du champ de vecteurs, on obtient une déformation continue de tout l'espace sous une famille de difféomorphismes qui dépend du temps.

### 8.1 Lemme de Gronwall

On considère un intervalle ouvert  $I$ , deux fonctions  $\lambda, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues, un réel  $t_0 \in I$ <sup>1</sup>. Soit  $\varphi$  une solution de l'équation différentielle  $\varphi' = \lambda\varphi + \mu$ .

**Lemme.** Soit  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^1$  vérifiant

$$\begin{cases} \|x(t_0)\| \leq \varphi(t_0) \\ \|x'(t)\| \leq \lambda(t) \|x(t)\| + \mu(t) \quad (*) \quad \forall t \in [t_0, b[. \end{cases}$$

Alors pour tout  $t \geq t_0$  dans  $I$ , on a  $\|x(t)\| \leq \varphi(t)$ .

*Démonstration.* On va utiliser dans la preuve le fait que la solution de l'équation différentielle  $\varphi' = \lambda\varphi + \mu + \varepsilon$  dépend continument de  $\varepsilon$  (pour une condition initiale  $\phi(t_0)$  fixée). Ceci se montre facilement en utilisant la solution explicite, qui est linéaire en  $\varepsilon$  puisque la solution de  $\varphi' = \lambda\varphi + \mu$  vaut

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right) \int_{t_0}^t \left(\mu(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s \lambda(u) du\right)\right) ds.$$

(1) On traite d'abord le cas où l'inégalité (\*) est stricte pour tout  $t \geq t_0$ . Remarquons que l'inégalité recherchée est satisfaite pour un ensemble fermé de valeurs de  $t$  (par continuité). Supposons par l'absurde que l'inégalité voulue n'a pas lieu

---

1. Pour la suite, on a essentiellement besoin du cas où  $\lambda, \mu$  sont des constantes.

pour tous les  $t \geq t_0$  dans  $I$  : il existe alors un intervalle  $J = [t_0, t_1] \subset I$  tel que pour tout  $t \in J$ ,  $\|x(t)\| \leq \varphi(t)$ , et qui est maximal pour cette propriété : elle n'est satisfaite par aucun intervalle  $[t_0, t_2]$  avec  $t_1 < t_2$ . Mais un développement limité de  $x$  et de  $\varphi$  en  $t = t_1$ , associé à l'inégalité stricte (\*), fournit un intervalle plus grand qui marche encore : contradiction. Voici les détails. Par maximalité de  $t_1$  on a déjà  $\|x(t_1)\| = \varphi(t_1)$ , et l'inégalité (\*) stricte donne alors  $\|x'(t_1)\| < \varphi'(t_1)$ . On écrit

$$\varphi(t_1 + \delta) - \|x(t_1 + \delta)\| = \varphi(t_1) + \delta\varphi'(t_1) + o(\delta) - \|x(t_1) + \delta x'(t_1) + o(\delta)\|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire pour minorer  $\|x(t_1) + \delta x'(t_1) + o(\delta)\|$  et le fait que  $\|x(t_1)\| = \varphi(t_1)$ , on obtient

$$\varphi(t_1 + \delta) - \|x(t_1 + \delta)\| \geq \delta(\varphi'(t_1) - \|x'(t_1)\|) + o(\delta).$$

Puisque  $\varphi'(t_1) - \|x'(t_1)\| > 0$ , pour tout  $\delta > 0$  assez petit,  $\varphi(t_1 + \delta) - \|x(t_1 + \delta)\| > 0$ . Ceci contredit la maximalité de  $t_1$ .

(2) Le cas général va se déduire du cas particulier par passage à la limite. On prend un  $\varepsilon > 0$ , et on note  $\varphi_\varepsilon$  la solution de l'équation différentielle  $\varphi' = \lambda\varphi + \mu + \varepsilon$  vérifiant  $\varphi_\varepsilon(t_0) = \varphi(t_0)$ . L'inégalité (\*) est satisfaite de façon stricte si on remplace  $\mu$  par  $\mu + \varepsilon$ . Le cas (1) appliqué à  $x$  et  $\varphi_\varepsilon$  nous dit que pour tout  $t \in [t_0, b[$  on a  $\|x(t)\| \leq \varphi_\varepsilon(t)$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 on a le résultat voulu, puisque  $\varphi_\varepsilon(t)$  tend vers  $\varphi(t)$  d'après la formule explicite.  $\square$

## 8.2 Applications : comparaison de solutions

En application du lemme de Gronwall, nous montrons que deux solutions maximales correspondant à deux conditions initiales proches ont des temps de vie proches, et ne s'éloignent pas trop vite l'une de l'autre. On considère un champ de vecteurs  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$

**Corollaire 8.2.1.** *On suppose  $X$  lipschitzien de rapport  $k$ . Soient  $x_1, x_2$  deux solutions de l'équation différentielle  $x' = X(x)$ . Supposons que  $t_0$  et  $t$  appartiennent aux intervalles de définition de  $x_1$  et  $x_2$ . Alors*

$$(*) \quad \|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \|x_2(t_0) - x_1(t_0)\| \exp(k|t - t_0|).$$

*Démonstration.* Pour les  $t > t_0$ , poser  $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$  et **majorer**  $z'(t)$  pour pouvoir **appliquer** le lemme de Gronwall. Pour les  $t < t_0$ , poser  $z(t) = x_1(-t) - x_2(-t)$  et appliquer le lemme de Gronwall avec  $-t_0$  à la place de  $t_0$  (ou bien appliquer le cas des  $t \geq t_0$  à l'équation différentielle  $x' = -X(x)$ , ce qui revient à inverser le sens de parcours des courbes solutions).  $\square$

**Corollaire 8.2.2.** *On suppose  $X$  localement lipschitzien. Soit  $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  une solution de l'équation différentielle  $x' = X(x)$  définie sur un intervalle contenant  $[t_-, t_+]$  contenant  $t_0$ . Alors il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute autre solution maximale  $x_2$  définie en  $t_0$ , si  $\|x_2(t_0) - x_1(t_0)\| < \eta$ , alors l'intervalle de vie de  $x_2$  contient  $[t_-, t_+]$ . De plus, il existe une constante  $k$  telle que pour tout  $t \in [t_-, t_+]$ , l'inégalité (\*) du corollaire précédent a lieu.*

---

**Exercice 62.**— Soit  $X : C \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application localement lipschitzienne sur un compact  $C$ . On veut montrer que  $X$  est lipschitzienne.

1. Montrer qu'il existe  $\varepsilon, k_1 \geq 0$  tels que

$$\forall x, y \in C, \quad d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \|X(x) - X(y)\| \leq k_1 d(x, y).$$

(Aide : appliquer la compacité avec la lipschitzianité locale pour obtenir un recouvrement fini, prendre un nombre de Lebesgue).

2. Montrer que la fonction

$$(x, y) \mapsto \frac{\|X(x) - X(y)\|}{d(x, y)}$$

est majorée sur l'ensemble  $C_\varepsilon$  des couples  $(x, y)$  de  $C^2$  tels que  $d(x, y) \geq \varepsilon$ .

3. Conclure.

---

*Démonstration.* Soit  $C = x([t_-, t_+])$ , c'est un compact inclus dans  $U$ . Par compacité, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$C_\delta := \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, C) \leq \delta\}$$

est inclus dans  $U$ . L'ensemble  $C_\delta$  est encore compact. D'après l'exercice précédent, le champ  $X$  est  $k$ -lipschitzien sur  $C_\delta$ . On déduit du corollaire précédent (appliqué sur l'intérieur de  $C(\delta)$ ) qu'une solution  $x_2$  avec  $x_2(t_0)$  assez proche de  $x_1(t_0)$  et définie sur  $[t_0, t'_+]$  avec  $t'_+ \leq t_+$  ne sort pas de  $C_\delta$ . Le théorème d'explosion permet de conclure.  $\square$

---

**Exercice 63.**—(Non explosion des équations différentielles linéaires) Montrer, à l'aide du lemme de Gronwall, que toute solution de l'équation différentielle linéaire  $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$  (où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ ,  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont des applications continues) est définie sur l'intervalle  $I$  tout entier.

---

## 8.3 Flot d'un champ de vecteurs complet

Soit  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  localement lipschitzien. A partir de maintenant, on suppose pour simplifier que  $X$  est *complet* : toutes les solutions maximales sont définies sur  $\mathbb{R}$ . C'est le cas par exemple si  $X$  est défini sur  $\mathbb{R}^m$  et borné : en effet, si  $\|X(x)\| \leq M$  pour tout  $x$ , l'inégalité des accroissements finis donne  $\|x(t) - x(0)\| \leq M|t|$  pour tout  $t$  dans l'intervalle de vie  $I$  de la solution  $x$ , ce qui force  $I = \mathbb{R}$  d'après le théorème d'explosion.

---

**Exercice 64.**— Montrer, plus généralement, qu'un champ  $X$  défini sur  $U$  est complet dès qu'il est à croissance au plus linéaire, c'est-à-dire s'il existe des constantes  $A, B$  telles que pour tout  $x$ ,  $\|X(x)\| \leq A\|x\| + B$ . On appliquera le lemme de Gronwall et le théorème d'explosion.

---

**Conséquence de l'autonomie (la propriété de flot)** Soit  $x_0 \in U$ , et  $x$  la solution maximale vérifiant  $x(0) = x_0$ . Etant donné et  $t_0 \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto x(t - t_0)$  est la solution maximale qui vaut  $x_0$  au temps  $t_0$  (**vérifiez** en calculant sa vitesse!). Voici une façon d'exprimer ceci : en partant d'un point  $x_0$  au temps  $t_0$ , on arrive au temps  $t_1$  en un point  $x_1$  qui dépend de  $x_0$  et de l'intervalle de temps  $t_1 - t_0$  mais pas du temps initial  $t_0$ .

**Flot** Pour tout  $x_0 \in U$ , notons

$$t \mapsto \Phi^t(x_0)$$

la solution maximale telle que  $\Phi^0(x_0) = x_0$ . (Pour tout  $t$ , et pour tout  $x_0$ ,  $\Phi^t(x_0)$  est donc le point de  $U$  auquel on arrive en partant de  $x_0$  et en suivant la solution de l'équation différentielle pendant un temps  $t$ .) Pour un  $t$  fixé,  $\Phi^t$  est donc une application de  $U$  dans  $U$ . La famille d'applications  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  s'appelle *flot du champ de vecteur  $X$* . Le premier point de la proposition ci-dessous s'appelle *propriété de flot* de cette famille.

---

**Exercice 65.**—(Exemple) Décrire le flot du champ de vecteur constant  $(1, 0)$  dans le plan.

---

**Proposition 8.3.1.**

1. On a  $\Phi^0 = \text{Id}$  et pour tous  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi^{t+s} = \Phi^s \circ \Phi^t.$$

2. L'application

$$(t, x) \mapsto \Phi^t(x),$$

qui est définie de  $\mathbb{R} \times U$  dans  $U$ , est continue, et pour tout  $t$ ,  $\Phi^t$  est un homéomorphisme de  $U$  dans  $U$ .<sup>2</sup>

3. (admis) Si  $X$  est de classe  $C^r$  sur  $U$  ( $r \geq 1$ ) alors cette application est de classe  $C^r$ , et pour tout  $t$ ,  $\Phi^t$  un  $C^r$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $U$

On peut reformuler tout ça en disant que si  $X$  est de classe  $C^r$ , alors  $t \mapsto \Phi^t$  est un morphisme de groupe de  $\mathbb{R}$  vers le groupe  $\text{Diff}^r(U)$  des  $C^r$ -difféomorphismes de  $U$ .

*Preuve* — Le temps  $s$  étant fixé, les applications  $t \mapsto \Phi^{t-s}(x_0)$  et  $t \mapsto \Phi^t(\Phi^{-s}(x_0))$  sont deux solutions définies sur  $\mathbb{R}$  qui coïncident au temps  $t = 0$  : elles sont donc égales. Ceci prouve le premier point.

Soient  $x_0, t_0$  fixés, on suppose  $t_0 \geq 0$  par commodité (le cas  $t_0 < 0$  est tout à fait analogue). Montrons la continuité de  $(t, x) \mapsto \Phi^t(x)$  au point  $(t_0, x_0)$ . Pour cela, on applique d'abord le second corollaire du lemme de Gronwall à la solution  $t \mapsto \Phi^t(x_0)$

---

2. Rappelons que  $X$  est supposé localement lipschitzien.

sur l'intervalle de temps  $[0, t_0 + 1]$ . On en déduit deux constantes  $\eta$  et  $k$  telles que, pour tout  $x_1 \in B_\eta(x_0)$  et tout  $t \in [0, t_0 + 1]$ ,

$$\|\Phi^t(x_1) - \Phi^t(x_0)\| \leq \exp(k|t|) \|x_1 - x_0\| \leq \exp(k(t_0 + 1)) \|x_1 - x_0\|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $x_1 \in U$  et  $t_1 \in \mathbb{R}$ . L'application  $t \mapsto \Phi^t(x_0)$  est dérivable (comme solution d'une équation différentielle) et donc continue, il existe donc  $\delta > 0$  tel que si  $|t_1 - t_0| < \delta$  alors  $\|\Phi^{t_1}(x_0) - \Phi^{t_0}(x_0)\| \leq \varepsilon$ , et on peut choisir  $\delta < 1$ . Maintenant si de plus

$$\|x_1 - x_0\| < \min(\eta, \varepsilon \exp(-k(t_0 + 1)))$$

on a

$$\begin{aligned} \|\Phi^{t_1}(x_1) - \Phi^{t_0}(x_0)\| &\leq \|\Phi^{t_1}(x_0) - \Phi^{t_0}(x_0)\| + \|\Phi^{t_1}(x_1) - \Phi^{t_1}(x_0)\| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve de la continuité.

En particulier, à  $t$  fixé, l'application  $\Phi^t$  est continue, et d'après le premier point on a  $\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \text{Id}$  ce qui prouve que  $\Phi^t$  est bijective et que son inverse est  $\Phi^{-t}$  est également continue, c'est donc un homéomorphisme de  $U$  dans  $U$ .

Le dernier point est admis.  $\square$

Les solutions de l'équation différentielle  $x' = X(x)$ , ou plutôt leurs images dans  $U$ , forment une partition de l'ouvert  $U$ . Ceci découle du théorème de Cauchy-Lipschitz, mais vérifions plutôt que la propriété de flot permet de le retrouver. En effet, supposons qu'on a deux points  $x_1, x_2$  de  $U$  et deux temps  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\Phi^{t_1}(x_1) = \Phi^{t_2}(x_2)$ . Alors pour tout  $t$ ,

$$\Phi^{t+t_2}(x_2) = \Phi^t \circ \Phi^{t_2}(x_2) = \Phi^t \circ \Phi^{t_1}(x_1) = \Phi^{t+t_1}(x_1)$$

et par conséquent les deux courbes  $t \mapsto \Phi^t(x_1)$  et  $t \mapsto \Phi^t(x_2)$  passent par les mêmes points de  $U$  : l'une est juste un reparamétrage de l'autre obtenu en décalant le temps.

## 8.4 Champs de vecteurs et difféomorphismes

Soit  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un champ de vecteurs de classe  $C^r$  comme dans la section précédente, et  $(\Phi_X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot associé. Considérons un  $C^r$ -difféomorphisme  $\Psi : U \rightarrow V$ , où  $V$  est un autre ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Rappelons que la différentielle de  $\Psi$  s'interprète comme "l'action de  $\Psi$  sur les vecteurs vitesse" : plus précisément, pour toute courbe dérivable  $\gamma_1 : I \rightarrow U$ , l'application  $\gamma_2 = \Psi \circ \gamma_1 : I \rightarrow V$  est dérivable et chaque vecteur vitesse  $\gamma_2'(t)$  est l'image du vecteur vitesse  $\gamma_1'(t)$  par la différentielle de  $\Psi$  au point  $\gamma_1(t)$  ; c'est ce qu'exprime en condensé la formule de dérivation composée

$$\gamma_2'(t) = (\Psi \circ \gamma_1)'(t) = (D\Psi)(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t).$$

Les images des courbes  $y : t \mapsto \Psi(\Phi^t(x_0))$ , pour  $x_0$  variant dans  $U$ , forment une partition de  $V$  puisque  $\Psi$  est bijectif. Montrons que ce sont les courbes intégrales

d'un champ de vecteurs  $Y$  sur  $V$ . La formule de dérivation composée donne la vitesse de ces courbes,

$$y'(t) = (t \mapsto \Psi(\Phi^t(x_0)))'(t_0) = (D\Psi)(\Phi^{t_0}(x_0)) \cdot X(\Phi^{t_0}(x_0)) = Y(y(t))$$

où  $Y$  est le champ de vecteurs défini sur  $V$  par la formule

$$Y(\Psi(x)) = (D\Psi)(x) \cdot X(x) \text{ ou encore } Y(y) = D\Psi(\Psi^{-1}(y)) \cdot X(\Psi^{-1}(y))$$

pour tous  $x \in U$  et  $y = \Psi(x) \in V$ .

On dira que le champ de vecteurs  $Y$  défini par la formule ci-dessus est obtenu en transportant le champ  $X$  par le difféomorphisme  $\Psi$ , ou pour faire vite est *l'image de  $X$  par  $\Psi$* , et on notera  $Y = \Psi_*X$ .<sup>3</sup> On dira aussi que les champs  $X$  et  $Y$  sont *conjugués par  $\Psi$* , ce vocabulaire étant justifié par l'énoncé suivant.

**Proposition 8.4.1.** *Notons  $(\Phi_X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ,  $(\Phi_Y^t)_{t \in \mathbb{R}}$  les flots respectifs des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  définis respectivement sur  $U$  et  $V$ , et  $\Psi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme. Alors on a  $Y = \Psi_*X$  si et seulement si pour tout  $t$ , le difféomorphisme  $\Psi$  conjugue les temps  $t$  des flots  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  :  $\Phi_Y^t \Psi = \Psi \Phi_X^t$ .*

*Démonstration.*<sup>4</sup> La discussion qui précède la proposition a montré que si on pose  $Y = \Psi_*X$ , que la courbe  $t \mapsto \Psi(\Phi_X^t(x))$  vérifie l'équation différentielle  $y' = Y(y)$ ; puisqu'elle vaut  $\Psi(x)$  au temps 0, elle coïncide avec la solution  $t \mapsto \Phi_Y^t(\Psi(x))$  : ceci démontre la relation de conjugaison.

Réciproquement, supposons la relation de conjugaison satisfaite. Le champ de vecteurs  $Z = \Psi_*X$  a alors les mêmes courbes intégrales que le champ de vecteurs  $Y$ , on en déduit  $Z(y) = Y(y)$  pour tout  $y$  dans  $V$  puisque ces deux vecteurs sont les vecteurs vitesse au temps 0 de la solution passant par  $y$ .  $\square$

---

**Exercice 66.**— Montrer la formule  $\Psi_{1*}\Psi_{2*} = (\Psi_1\Psi_2)_*$ .

---

## Transport de champ de vecteurs

Un changement de variable explicite dans une équation différentielle peut être vu comme un transport de champ de vecteurs.

---

3. Remarquons que cette définition a un sens sans qu'il soit besoin de faire d'hypothèse sur les champs  $X$  et  $Y$ , en particulier pas besoin qu'ils soient complets.

4. Pour simplifier, on suppose dans la preuve que  $X$  et  $Y$  sont complets; en réalité ce n'est pas nécessaire, pour la réciproque il suffit même que la relation de conjugaison ait lieu pour tous  $t$  assez proche de 0.



**Exemple** Reprenons l'équation différentielle de population  $p' = p(1 - p)$ , associé au champ de vecteur  $X(p) = p(1 - p)$  défini sur  $]0, 1[$ . On propose de résoudre cette équation en faisant le changement de fonction inconnue  $z = \frac{1}{p}$ . Un calcul formel donne  $p = \frac{1}{z}$  qu'on dérive en  $p' = -\frac{z'}{z^2}$  et donc

$$p' = p(1 - p) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{z - 1}{z^2} \Leftrightarrow z' = 1 - z$$

et on est ramené à une équation linéaire qui s'intègre en utilisant la variation de la constante. On peut interpréter ce calcul de la façon suivante. Soit  $\Psi : U = ]0, 1[ \rightarrow V = ]1, +\infty[$  donné par  $\Psi(p) = \frac{1}{p}$ , on a pour tout  $z \in V$ ,

$$Y(z) := \Psi_* X(z) = \dots = 1 - z \quad (\text{compléter le calcul}).$$

D'après la relation de conjugaison, on obtient bien les courbes solutions de l'équation différentielle  $p' = X(p)$  en résolvant l'équation différentielle  $z' = Y(z)$  et en composant les solutions par  $\Psi^{-1}$ .

---

**Exercice 67.** — Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On s'intéresse à l'équation différentielle non autonome  $y' = f(y/x)$  (attention, ici la variable est notée  $x$ , et  $y$  est la fonction inconnue).

1. Mettre cette équation sous la forme d'une équation autonome en dimension deux, expliciter l'ouvert  $U$  et le champ de vecteurs  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspondant.
2. Montrer que cette équation peut se transformer en une équation à variables séparables, à l'aide du changement de variable (ou plutôt de fonction inconnue)  $z = y/x$ . A nouveau, transformer cette deuxième équation en une équation autonome en dimension deux, et expliciter l'ouvert  $V$  et le champ de vecteurs  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspondant.
3. Soit  $\Psi : U \rightarrow V$  le difféomorphisme défini par  $\Psi(x, y) = (x, y/x)$ . Calculer le champ  $\Psi_* X$  défini sur l'ouvert  $V$ . Conclusion ?
4. (optionnel, essentiellement indépendant de ce qui précède) Résoudre, à l'aide du changement de variable  $z = y/x$ , l'équation homogène

$$xy'(2y - x) = y^2.$$

(Solution : les courbes intégrales vérifient l'équation implicite  $y(x - y) = \lambda x$ .)

---

## 8.5 Théorème de redressement (la “boite à flot”)

Le théorème suivant, très utile, dit que tout champ de vecteur est localement équivalent au champ de vecteurs constant  $X_0 = (1, 0, \dots, 0)$ .

**Théorème 8.5.1** (théorème de redressement ou de la “boite à flot”). *On se donne  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , et  $x_0 \in U$ . On suppose que  $X(x_0) \neq 0$ . Alors il existe un  $C^r$ -difféomorphisme  $\Psi$  entre un voisinage  $V(0)$  de 0 et un voisinage  $V(x_0)$  de  $x_0$ , qui transporte le champ de vecteurs constant  $X_0$  sur le champ  $X$ .*

---

**Exercice 68.**— Avec les notations du théorème, utiliser la proposition précédente pour décrire les courbes images par le difféomorphisme  $\Psi$  des solutions de l'équation différentielle  $x' = X(x)$  passant par un point proche de  $x_0$ .

---

*Preuve* — Le vecteur  $e_1 = X(x_0)$  est supposé non nul, on peut donc le compléter en une base  $(e_1, \dots, e_m)$  de  $\mathbb{R}^m$ . On pose alors

$$\Psi : (s_1, \dots, s_m) \mapsto \Phi^{s_1}(x_0 + s_2 e_2 + \dots + s_m e_m).$$

Cette formule définit  $\Psi$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^m$ . D'après les propriétés du flot, cette application est de classe  $C^r$ .

---

**Exercice 69.**— Calculer les dérivées partielles de  $\Psi$  en 0, et montrer qu'elles forment une base de  $\mathbb{R}^m$ . En déduire que l'application  $D\psi(0)$  est inversible.

---

D'après l'exercice, on peut appliquer le théorème d'inversion locale, qui nous dit qu'il existe un voisinage  $V(0)$  de 0 et un voisinage  $V(x_0)$  de  $x_0$  tels que  $\Psi$  soit un  $C^r$ -difféomorphisme de  $V(0)$  sur  $V(x_0)$ . On conclut la preuve avec un dernier exercice.

---

**Exercice 70.**— Vérifier que le difféomorphisme  $\Psi$  transporte le champ de vecteur  $X_0$  sur le champ de vecteurs  $X$ . On pourra vérifier la relation de conjugaison et satisfaite, et appliquer la proposition plus haut.

---

□

On peut extraire de la preuve le lemme suivant. Soit  $\Sigma : V \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow U$  une paramétrisation d'une hypersurface de  $U$  par un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^{m-1}$  : ceci signifie que  $\Sigma$  est injective et que sa différentielle  $D\Sigma(s)$  est injective pour tout  $s$  dans  $V$ . Supposons que  $\Sigma$  est transverse au champ de vecteurs  $X$  : ceci signifie que, pour tout  $s$  dans  $V$ ,

$$\text{Im}(D\Sigma(s) \oplus X(\Sigma(s))) = \mathbb{R}^m.$$

**Lemme 8.5.2.** *Dans cette situation, l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\rightarrow U \\ (s_1, (s_2, \dots, s_m)) &\mapsto \Phi^{s_1}(\Sigma(s_2, \dots, s_m)) \end{aligned}$$

*est une immersion : en tout point, sa différentielle est inversible.*

# Chapitre 9

## Champs de vecteurs linéaires

Dans ce chapitre, on examine les équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont les solutions sont données par l'exponentielle de matrice. En particulier, nous détaillons les comportements possibles en dimension deux : comme dans le cas des systèmes dynamiques à temps discret du chapitre 3, l'outil principal est la réduction des matrices.<sup>1</sup>

Étant donnée une matrice  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ , on considère le champ de vecteurs linéaire défini par  $X(x) = A.x$ .

### 9.1 Généralités

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on définit l'exponentielle de  $A$  par la formule :

$$\exp(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n.$$

On rappelle les [propriétés suivantes](#).

**Proposition.** (*admise*)

1. *Invariance par conjugaison : pour toute matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{C})$ ,  $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$ .*
2.  *$e^A e^B = e^{A+B}$  lorsque  $A$  et  $B$  commutent.*
3. *La courbe  $t \mapsto e^{tA}$ , définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans l'espace vectoriel des matrices inversibles, est dérivable, et sa dérivée est  $t \mapsto Ae^{tA}$ .*

**Corollaire.**

1. *Le champ de vecteurs linéaire défini par  $X(x) = A.x$  est complet.*
2. *La solution de l'équation  $x' = Ax$  avec condition initiale  $x(0) = x_0$  est la courbe  $t \mapsto e^{tA}x_0$ .*
3. *Le flot du champ de vecteur est donné par la formule  $\Phi_A^t(x) = e^{tA}x$ .*

---

1. Référence : Hirsch-Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Demailly, *Equations différentielles*.

Pour la résolution en pratique, deux remarques faciles mais importantes. (1) Un champ de vecteurs diagonal conduit à deux équations différentielles découplées du type  $x'_i = \lambda_i x_i$ , qu'on résoud indépendamment (on obtient donc  $x_i = c_i e^{\lambda_i t}$ ). (2) Si on a un champ de vecteurs linéaire  $Y(y) = By$  avec  $B$  diagonalisable, on écrit  $A = P^{-1}BP$  diagonale, et le champ  $X(x) = Ax$  est obtenu en transportant  $Y$  par le difféomorphisme (linéaire!)  $y \mapsto P^{-1}y$ . **Vérifier**. D'après la section sur les transports de champs de vecteurs, il n'y a plus qu'à intégrer l'équation diagonale et à conjuguer le résultat par  $P^{-1}$ .

## 9.2 Dimension deux

**Exercice 71.**—(Exemple) Donner le flot des champs de vecteurs définis par  $X(x) = Ax$ ,  $Y(y) = By$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Réponse :* pour résoudre  $y' = By$  on fait le changement de coordonnées  $Y = PX$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

pour se ramener à  $A = P^{-1}BP$ .

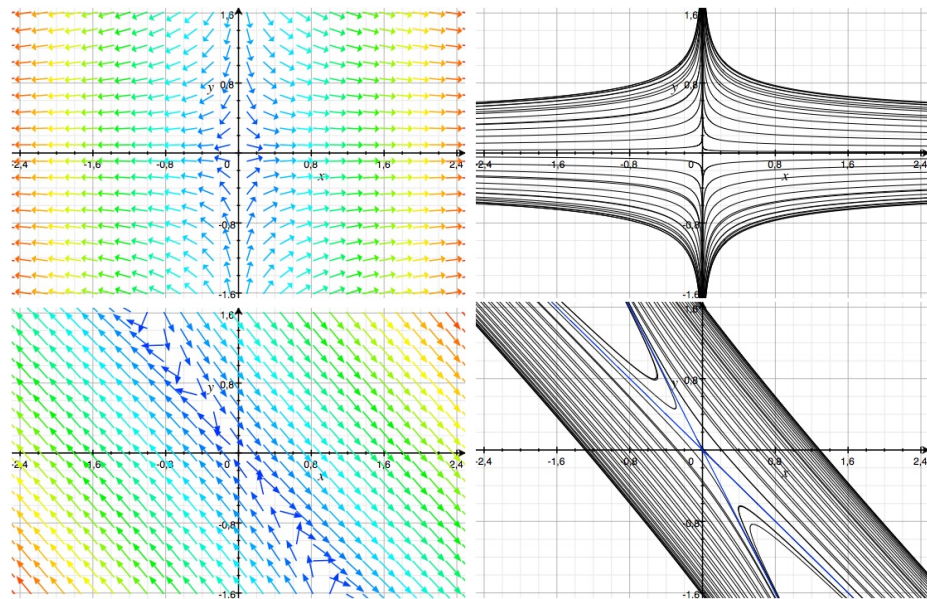


FIGURE 9.1 – Les champs de vecteurs  $A$  et  $B$  avec les images de courbes solutions, et les droites propres de  $B$  en bleu

**Résolution** On rappelle la classification des matrices  $2 \times 2$ .

**Lemme.** *Toute matrice réelle de taille 2 est semblable à l'un des modèles suivants :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Résoudre le premier cas (diagonal) ne pose pas de problème : les deux équations sont découplées.

Le second cas fait appel à la variation de la constante : la deuxième équation est découplée, elle a pour solution  $y(t) = y_0 e^{\lambda_1 t}$ ; en reportant dans la première équation on se retrouve avec une équation linéaire avec second membre, on cherche une solution sous la forme  $x(t) = c(t) e^{\lambda_1 t}$ .

Pour le dernier cas, on peut utiliser les nombres complexes pour que les calculs restent simples, en remarquant que la dérivée de  $t \mapsto e^{\lambda t}$  est encore  $t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$  lorsque  $\lambda = a + ib$  est complexe (ce qu'on peut vérifier avec la définition de l'exponentielle complexe avec les cosinus et sinus, ou avec les séries entières). En posant  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , l'équation devient  $z' = \lambda z$ , avec  $\lambda = a + ib$ . D'où  $z(t) = z_0 e^{\lambda t} = z_0 e^{at} e^{ibt}$ . On en déduit  $x(t)$  et  $y(t)$ .

---

**Exercice 72.**— **1.** Déterminer, dans chacun des cas, la limite de  $\|(x(t), y(t))\|$  lorsque  $t$  tend vers  $\pm\infty$ . **2.** Lorsque  $(x(t), y(t))$  tend vers  $(0, 0)$ , déterminer la limite de la coordonnée polaire  $\theta(t)$ .

---

**Classification dynamique** On distingue les cas suivants.

1. *point selle* (ou col) quand on a deux valeurs propres réelles de signes opposés.
2. *puits* lorsque les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives. Le dessin donne un *foyer* (dans le cas où les valeurs propres sont réelles, égales et la matrice est diagonalisable), un *noeud* (quand les valeurs propres sont réelles et distinctes), un *noeud impropre ou dégénéré* (dans le cas non diagonalisable), ou un foyer en spirale (lorsque les valeurs propres sont complexes conjuguées).
3. *source* si  $A^{-1}$  est un puits.
4. *centre* lorsque les valeurs propres sont imaginaires.
5. tous les autres cas sont appelés dégénérés (0 est valeur propre).

[Lien Wikipedia 1](#) [Lien Wikipedia 2](#)

---

**Exercice 73.**— Discuter du comportement du ressort amorti, donné par l'EDO

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

selon les valeurs des constantes physiques  $m$  (masse),  $\alpha$  (coefficient de frottement),  $k$  (raideur). On transformera cette équation différentielle d'ordre 2 en une équation différentielle d'ordre 1 en dimension deux, en posant

$$X = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}.$$


---

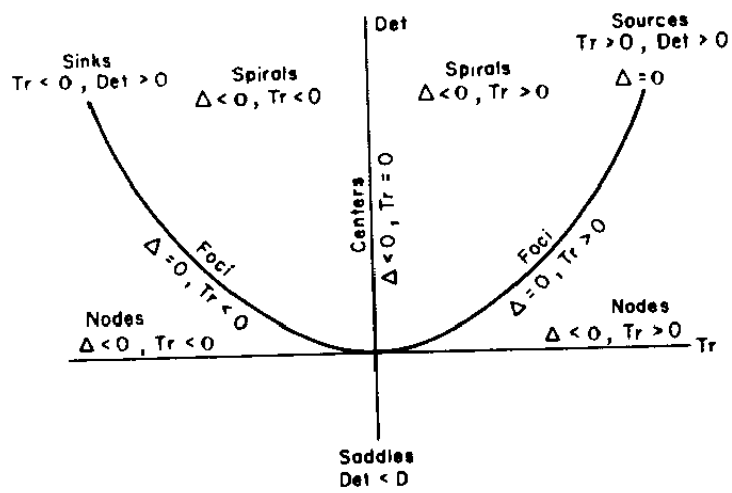


FIGURE 9.2 – Classification des champs de vecteurs linéaires  $2 \times 2$ , en fonction de leur trace et déterminant

# Chapitre 10

## Champs de vecteurs non linéaires du plan

### 10.1 Propriétés asymptotiques

En systèmes dynamiques, on s'intéresse aux champs de vecteurs à conjugaison près. Les propriétés asymptotiques sont un exemple typique de propriétés conservées par conjugaison.

**Définitions** Pour simplifier, on considère un champ de vecteur  $X$  de classe  $C^1$ , complet, défini sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . On note  $\Phi^t$  le flot associé.

On appelle *orbite positive* du point  $z$  pour le champ de vecteurs  $X$  la courbe

$$\begin{aligned} O^+(z) : [0, +\infty) &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto \Phi^t(z) \end{aligned}$$

L'orbite négative  $O^-(z)$  est obtenue en prenant  $(-\infty, 0]$  comme ensemble de départ. L'orbite complète  $O(z)$  est la courbe définie sur  $\mathbb{R}$ . On a tendance à confondre, dans le discours, ces trois courbes et leurs images dans  $U$ .

Un point  $z$  de  $U$  en lequel s'annule est appelé *point d'équilibre* (ou encore *zéro* ou *singularité* du champ de vecteurs) : son orbite est alors constante. L'orbite de  $z$  est *périodique* s'il existe  $T > 0$  tel que  $\Phi^T(z) = z$ .

---

**Exercice 74.**— Soit  $z$  un point périodique qui n'est pas fixe. Montrer que  $\{T \in \mathbb{R}, \Phi^T(z) = z\}$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ . Conclure qu'il existe un plus petit  $T_0 > 0$  dans cet ensemble. Ce nombre est appelé période de  $z$ .

---

On définit aussi l'ensemble  $\omega$ -limite d'un point  $z$  de  $U$  :

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \bigcap_{t_0 \in \mathbb{R}} \text{Adh}\{\Phi^t(z) \mid t \geq t_0\} \\ &= \{w \in U \mid \exists (t_n)_{n \geq 0}, \lim(t_n) = +\infty \text{ et } w = \lim \Phi^{t_n}(z)\}. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\alpha$ -limite  $\alpha(z)$  est défini symétriquement en considérant l'orbite négative de  $z$ .

---

**Exercice 75.**— Vérifier l'équivalence entre les deux définitions de  $\omega(z)$ .

---

**Exercice 76.**— Déterminer  $\omega(P)$  pour tous les points  $P$  du plan, pour chacun des champs de vecteurs linéaires de la classification du chapitre précédent.

---

**Définition.** On rappelle que les flots  $(\Phi_X^t)$  et  $(\Phi_Y^t)$ , associés respectivement aux champs de vecteurs  $X$  sur  $U$  et  $Y$  sur  $V$ , sont dit ( $C^1$ -) conjugués s'il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\Psi : U \rightarrow V$  tel que, pour tout  $t$ ,  $\Psi\Phi_X^t\Psi^{-1} = \Phi_Y^t$ . Si  $\Psi$  est seulement un homéomorphisme, on dira que les flots sont topologiquement conjugués. (Par extension, on dira aussi que les champs de vecteurs correspondants sont conjugués).

Le but des systèmes dynamiques devrait être de classer tous les champs de vecteurs à conjugaison topologique (ou lisse) près. Comme c'est un but irréaliste, on se contente souvent d'essayer de décrire le comportement des orbites.

**Proposition.** *Toutes les définitions ci-dessus sont des invariants de conjugaison topologique.*

---

**Exercice 77.**— Donner un sens à la proposition et montrer-là.

---

**Exercice 78.**—

1. Montrer que  $\omega(x)$  est fermé et invariant par le flot :  $\phi^t(\omega(x)) = \omega(x)$  pour tous  $x, t$ . Que vaut  $\omega(\Phi^t(x))$  ?
  2. Montrer que si l'orbite positive de  $x$  est incluse dans un compact de  $U$  alors  $\omega(x)$  est non vide.
  3. Montrer que si  $y \in \omega(x)$ , alors  $O(y) \subset \omega(x)$  et  $\omega(y) \subset \omega(x)$ .
- 

**Exercice 79.**— Montrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes est connexe. En déduire que si l'orbite positive de  $x$  est incluse dans un compact de  $U$ , alors  $\omega(x)$  est connexe.

---

**Exercice 80.**— (difficile) Soit  $x \in U$ , on suppose que l'image de  $O^+(x)$  est compacte. Montrer que  $x$  est périodique.

---

## 10.2 Le théorème de Poincaré-Bendixson

Le théorème de Poincaré-Bendixson donne une contrainte très forte sur la dynamique des champs de vecteurs du plan sans zéro.

**Théorème 10.2.1.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs (de classe  $C^1$ , complet) sur le plan. On suppose que  $X$  ne s'annule pas. Alors pour tout  $x$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\Phi_X^t(x)\| = +\infty.$$

Bien sûr, l'hypothèse est essentielle : nous avons déjà vu par exemple le champ linéaire "tournant"  $X(x, y) = (y, -x)$  dont les orbites sont des cercles.



## Exemples

Parmi les champs de vecteurs du plan sans zéro, les plus simples sont les champs constants. Leurs flots s'appellent "flots de translation", ils sont donnés par

$$\Phi^t(x) = x + t\vec{X}.$$

---

**Exercice 81.**— Montrer que tous les champs constants sont (linéairement) conjugués.

---

Au vu du théorème, on peut se poser la question : les flots des champs de vecteurs du plan sans zéros sont-ils tous conjugués à un flot de translation ?

---

**Exercice 82.**— On considère un champ de vecteurs  $X$  (complet, de classe  $C^1$ ) sur le plan, sans zéro, avec la propriété suivante : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $X(x, -1) = (-1, 0)$  et  $X(x, 1) = (1, 0)$ . On note  $X_0$  un champ de vecteurs constant non nul.

1. Faire un dessin représentant l'hypothèse, en déduire deux trajectoires de  $X$ .
  2. Trouver une partie compacte  $K$  du plan telle que, pour tout  $t$ ,  $\Phi_X^t(K) \cap K \neq \emptyset$ .
  3. Montrer en revanche que pour toute partie compacte  $K$  du plan, il existe  $t$  tel que  $\Phi_{X_0}^t(K) \cap K = \emptyset$ .
  4. Conclure (avec soin) que les champs  $X$  et  $X_0$  ne sont pas conjugués.
  5. Donner un exemple explicite de champ  $X$  vérifiant l'hypothèse (sans zéro!).
- 

## Absence d'orbite périodique

Commençons par montrer une version faible du théorème.

**Proposition 10.2.2.** *Sous les hypothèses du théorème de Poincaré-Bendixson, aucun point n'est périodique.*

Remarquons qu'une orbite périodique de période  $T > 0$  donne une application continue  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Leftrightarrow s - t \in T\mathbb{Z}.$$

En particulier,  $\gamma(T) = \gamma(0)$  et la restriction de  $\gamma$  à  $[0, T[$  est injective. Une telle application s'appelle une *courbe fermée simple* ou *courbe de Jordan*. On dira aussi qu'une application continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui est injective sur  $]a, b[$  et telle que  $\gamma(a) = \gamma(b)$  est une courbe de Jordan.

L'ingrédient principal de la preuve du théorème de Poincaré Bendixson est le théorème de Jordan, que nous admettrons. Nous utiliserons aussi le théorème de Schoenflies qui le précise.

**Théorème. (Jordan)** *Soit  $J$  l'image d'une courbe de Jordan dans le plan. Alors  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  a exactement deux composantes connexes, l'une  $D_J$  est bornée et l'autre  $D'_J$  ne l'est pas, et  $J$  est leur frontière commune.*

Rappelons également que les composantes connexes d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^m$  (ceci est vrai plus généralement dans tout espace métrique où les boules de petits rayons sont connexe).

**Théorème.** (*Schoenflies*) *Sous les hypothèses précédentes, l'adhérence de la composante connexe bornée est homéomorphe au disque unité du plan.*

*Preuve de la proposition.* Soit  $X$  un champ de vecteurs, supposons qu'il admet un point périodique  $x$ , son orbit parcourt une courbe de Jordan  $J$ .

**Lemme 10.2.3.** *L'ensemble  $D_J$  donné par le théorème de Jordan est invariant : pour tout  $t$ ,  $\Phi_X^t(D) = D$ .*

---

**Exercice 83.**— Démontrer le lemme : (1) montrer que la courbe de Jordan  $J$  est invariante, (2) en déduire le résultat en raisonnant par l'absurde et en utilisant la connexité des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

---

Supposons maintenant, par l'absurde, que le champ de vecteurs ne s'annule pas dans  $D_J$ . Le lemme suivant, appliqué à  $K = \text{Adh}(D_J)$ , nous dit alors que les périodes des orbites périodiques incluses dans  $D_J$  sont minorées.

**Lemme 10.2.4.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs, et  $K$  une partie compacte du plan sur laquelle  $X$  ne s'annule pas. Alors il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $x$  dans  $K$ , pour tout  $t \in ]0, T]$ ,  $\Phi^t(x) \neq x$  (aucun point de  $K$  n'est périodique avec une période  $< T$ ).*

---

**Exercice 84.**— Démontrer le lemme. On raisonnera par l'absurde, on utilisera la boîte à flot pour minorer localement les périodes, et on conclura avec un argument de compacité.

---

Le théorème de Schoenflies nous dit que l'adhérence de  $D_J$  est homéomorphe au disque unité. Le théorème de Brouwer énoncé ci-dessous, que nous admettons, nous dit que pour tout  $t > 0$ ,  $\Phi_X^t$  a un point fixe dans  $D$ . Ceci contredit le lemme précédent. □

**Théorème.** (*Brouwer*) *Toute application continue du disque  $D$  dans lui-même a (au moins) un point fixe.*

Plus précisément, nous avons besoin d'un énoncé plus général :

---

**Exercice 85.**— Montrer que le théorème de Brouwer reste vrai si on remplace "disque" par "partie du plan homéomorphe au disque".

---

## Preuve du théorème

On montre le théorème par contraposition.

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur le plan (complet, de classe  $C^1$ ). On suppose qu'il existe  $x$  qui ne vérifie pas la propriété

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi_X^t(x)\| = +\infty.$$

Il s'agit de montrer que  $X$  admet au moins un zéro.

Puisque l'orbite de  $x$  ne tend pas vers l'infini, son ensemble  $\omega$ -limite n'est pas vide (vérifier). Il existe donc  $y \in \omega(x)$ . Si  $X(y) = 0$ , la preuve est terminée : on peut donc supposer que  $X(y) \neq 0$ .

On peut alors appliquer le théorème de la boîte à flot, qui nous fournit un difféomorphisme  $\Psi : V(y) \rightarrow V(0)$  qui "redresse" le champ  $X$  au voisinage de  $x_0$ . Le champ  $\Psi_*X$  vaut  $(1, 0)$  sur  $V(0)$ . On considère  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que l'adhérence du carré ouvert  $C = ]-\varepsilon, \varepsilon[^2$  soit inclus dans  $V(0)$ , et on pose  $C' = \Psi^{-1}(C)$  qui est inclus dans  $V(y)$ . Si  $z$  est un point de  $C'$ , alors  $\Psi(z) = (x, y)$  appartient à  $C$ , et par conjugaison un petit morceau d'orbite de  $z$  pour les temps proches de 0. Informellement, l'orbite de  $z$  sort du "carré"  $C$  dans le passé et le futur, et met un temps inférieur à  $2\varepsilon$  à sortir. Plus précisément,

- pour  $t \leq -x - \varepsilon$  et assez proche de  $-x - \varepsilon$ ,  $\Phi^t(z) \in V(y) \setminus C'$ ,
- pour  $t \in ]-x - \varepsilon, -x + \varepsilon[$ ,  $\Phi^t(z) \in C'$ ,
- pour  $t \geq -x + \varepsilon$  et assez proche de  $-x + \varepsilon$ ,  $\Phi^t(z) \in V(y) \setminus C'$ .

Soit encore  $\Sigma = \{0\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , et  $\sigma' = \Psi^{-1}(\Sigma)$ . Puisque  $y \in \omega(x)$ , il existe des nombres  $t$  arbitrairement grands tels que  $\Phi^t(x) \in C'$ . Soit  $t_0$  tel que  $\Phi^{t_0}(x) \in C'$ . D'après ce qui précède, quitte à modifier  $t_0$  de moins de  $\varepsilon$ , on peut supposer que  $\Phi^{t_0}(x) \in \Sigma'$ . Soit  $t'_1$  le premier moment où l'orbite repasse dans  $C'$  :

$$t'_1 = \inf\{t > t_0 + \varepsilon \mid \Phi^t(x) \in C'\}.$$

Le temps  $t'_1$  existe et est  $> \varepsilon$ , on a  $\Phi^{t_1}(x) \in \partial C'$  (sur le bord "gauche") et en posant  $t_1 = t'_1 + \varepsilon$  on a  $\Phi^{t_1}(x) \in \Sigma'$ . Notons que la portion d'orbite

$$\gamma_0 = \{\Phi^t(x), t \in [t_0, t_1]\}$$

ne rencontre  $\Sigma'$  qu'aux points  $A = \Phi^{t_0}(x)$  et  $B = \Phi^{t_1}(x)$ . Soit  $\gamma_1$  la portion de  $\Sigma'$  entre ces deux points, et  $J$  la courbe obtenue en concaténant  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  : il s'agit d'une courbe de Jordan. Soit  $D_J$  donné par le théorème de Jordan, le domaine ouvert borné dont le bord est  $J$ .

L'ensemble  $D_J \cap C'$  est égal à l'une des deux composante connexe de  $C' \setminus J$ . Supposons qu'il s'agisse de la composante "droite" (vue dans l'image par  $\Psi$ ). Alors  $D_J$  est positivement invariant par le flot : pour tout  $t \geq 0$ ,  $\Phi^t(D_J) \subset D_J$ . (Dans l'autre cas  $D_J$  est négativement invariant par le flot, et on peut se ramener au premier cas en changeant  $X$  en  $-X$ .) Pour voir ceci, on adapte l'argument de connexité vu plus haut : si un point  $z$  de  $D_J$  ressort de  $D_J$  sous l'action du flot, alors son orbite doit recouper  $J$ ; soit  $T > 0$  le plus petit temps où ceci arrive : formellement,  $T = \inf\{t > 0 \mid \Phi^t(z) \in J\}$ ; en utilisant que  $J$  est une partie fermée du plan, on vérifie que

$\Phi^T(z) \in J$ ; et on a  $\Phi^t(z) \in D_J$  pour tout  $t \in [0, T[$ . Si  $\Phi^T(z) \in \gamma_2 \setminus \{B\}$ , alors  $\Phi^t(z)$  est hors de  $D$  pour  $t < T$  proche de  $T$ , ce qui est absurde. Donc  $\Phi^T(z) \in \gamma_1 \setminus \{A\}$ , mais alors  $\Phi^t(z) \in \gamma_1$  pour  $t < T$  proche de  $T$ , ce qui est encore absurde.<sup>1</sup>

D'après le théorème de Schoenflies,  $\text{Adh}(D_J)$  est homéomorphe au disque unité. D'après le théorème de Brouwer, pour tout  $t > 0$ ,  $\Phi^t$  a un point fixe dans  $\text{Adh}(D_J)$ . On a donc trouvé une orbite périodique, et donc un point fixe d'après la proposition précédente.

### 10.2.1 Variante

On explique ici comment des arguments analogues, mais plus élémentaires, permettent d'obtenir un énoncé plus général :

**Théorème 10.2.5.** *Soit  $X$  un champ de vecteur du plan, et  $x$  un point. Supposons que l'orbite positive de  $x$  est bornée. Alors ou bien  $\omega(x)$  est une orbite périodique, ou bien  $\omega(x)$  contient un zéro du champ.*

La preuve utilise encore le théorème de Jordan, mais pas ceux de Schoenflies ni de Brouwer.

*Démonstration.* L'hypothèse entraîne que  $\omega(x)$  est borné et non vide, soit  $y$  l'un de ses élément. On peut supposer  $X(y) \neq 0$  (sinon c'est fini). Puisque l'orbite de  $y$  est incluse dans  $\omega(x)$ , elle est elle-même bornée, et  $\omega(y) \neq \emptyset$  : soit  $z$  l'un de ses éléments. Comme  $\omega(x)$  contient  $\omega(y)$ , on peut supposer que  $X(z) \neq 0$  (sinon c'est fini).

On considère, comme avant, une boîte à flot en  $z$ . Comme avant, on considère une courbe de Jordan formée d'un morceau d'orbite de  $y$  et d'une transversale en  $z$ . L'un des deux domaines  $D = D_J$  ou  $D'_J$  bordés par cette courbe est positivement invariant. Le domaine  $D$  ne contient pas  $y$  dans son adhérence, mais contient  $\Phi^T(y)$  pour  $T$  assez grand.  $V = (\Phi^T)^{-1}(D)$  est un voisinage de  $y$ . Puisque  $y \in \omega(x)$ , il existe  $T' > 0$  tel que  $\Phi^{T'}(x) \in V$ . Alors  $\Phi^{T+T'}(x) \in D$ , et pour tout  $t > T + T'$ ,  $\Phi^t(x) \in D$  puisque  $D$  est positivement invariant. Ceci contredit le fait que  $y \in \omega(x)$ , puisque  $y \notin D$ .  $\square$

## 10.3 Ouverture : équation différentielle sur les variétés

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$  et de dimension  $d$  : ceci signifie que l'inclusion de  $M$  dans  $\mathbb{R}^N$  est localement difféomorphe à l'inclusion de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^N$ . L'espace tangent à  $M$  en un point  $x \in M$ ,  $T_x M$ , est l'ensemble des vecteurs vitesses

- 
1. Remarquons, pour plus tard, que
    - pour tout  $t < t_0$ ,  $\Phi^t(x)$  est dans la composante connexe non bornée  $D'_J$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus J$ ,
    - pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\Phi^t(x)$  est dans  $\gamma_0 \subset \partial D_J$ .
    - pour tout  $t > t_1$ ,  $\Phi^t(x)$  est dans  $D_J$ .

Le dernier point vient de l'invariance positive de  $D_J$ . Le premier vient de l'invariance négative de  $D'_J$  qui lui est symétrique.

au temps 0 de toutes les courbes  $C^1 \gamma : ]-1, 1[ \rightarrow M$  vérifiant  $\gamma(0) = x$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $d$ .

Un champ de vecteurs sur  $M$  est une application  $X : M \rightarrow TM = \cup_x T_x M$  telle que, pour tout  $x$ ,  $X(x) \in T_x M$ . Les théorèmes d'existence et d'unicités se généralisent à ce cadre.

**Théorème.** *Supposons que la sous-variété  $M$  est compacte, et que le champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est de classe  $C^1$ . Pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe alors une unique courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  solution du problème*

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

La preuve n'est pas très difficile : le problème local se résout en utilisant les cartes de la sous-variété pour ramener le problème à une équation différentielle dans  $\mathbb{R}^d$  (on transporte le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$ ). On démontre ensuite l'existence d'une solution maximale en recollant les solutions locales (comme dans  $\mathbb{R}^N$ ), puis on montre que le champ est complet en utilisant la compacité de  $M$ .

Voici quelques problèmes et résultats (parmi tant d'autres).

- Si  $X$  est un champ de vecteurs autonome sur le plan, sans point d'équilibre, alors tous les ensembles  $\alpha$  et  $\omega$ -limites sont vides (théorie de Poincaré-Bendixson).
- Tout champ de vecteurs sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  possède un zéro sur la sphère (théorème de la sphère chevelue de Brouwer, vers 1910).
- Il existe un champ de vecteurs sur la sphère unité  $\mathbb{S}^3$  de  $\mathbb{R}^4$ , appelé champ de Hopf, dont toutes les orbites sont périodiques (ce sont des cercles). Tout champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}^3$  assez proche de celui-ci possède une orbite périodique (théorème de Seifert, 1948).
- (Théorème de Kuperberg, 1993) Il existe un champ de vecteurs de classe  $C^\infty$  (ou même analytique) sur  $\mathbb{S}^3$  et qui n'a aucune orbite périodique dans la sphère.
- Problème de Smale : existe-t-il un champ de vecteurs défini sur  $\mathbb{S}^3$  tel que pour chaque point  $x$  sur la sphère, l'orbite de  $x$  est dense dans la sphère ?

Ce dernier problème est une question ouverte. Si on remplace la sphère par un tore (une bouée), alors la réponse est positive (et facile).