Résumé du cours d'algèbre linéaire de licence L1

Yves Coudène, mars 2018

I - Résolution d'équations linéaires

1) Généralités, pivot de Gauss

Dans ce chapitre, on étudie les systèmes linéaires avec même nombre d'équations que d'inconnues, de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ & & \dots & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & y_n \end{cases}$$

a) Notion de systèmes équivalents
Les opérations suivantes ne changent pas les solutions du système :
– multiplier tous les coefficients d'une ligne,
– permuter deux lignes,
– ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes,
– supprimer une ligne dont tous les coefficients sont nuls.

b) Matrice associée à un système

c) Méthode du pivot de Gauss
Présentation de l'algorithme général.

Proposition. *Tout système est équivalent à un système triangulaire.*

Résolution d'un système triangulaire dans le cas où il y a une unique solution, c'est-à-dire lorsque les termes diagonaux sont tous non nuls.

2) Résolution deux équations, deux inconnues

Cas général : matrice 2×2, déterminant, formules de Cramer.

Proposition. *La solution est unique si le déterminant est non nul.*

Exemple tiré des "Neuf chapitres de l'art mathématique", dynastie Han, 1er siècle avant JC. Auteur inconnu.

Cinq vaches et deux moutons coûtent au total 10 liang d'argent. Deux vaches et cinq moutons coûtent au total 8 liang d'argent. Quel est le coût d'une vache et d'un mouton ? (1 liang = 16 grammes)

3) Résolution trois équations, trois inconnues

Exemple : un problème qui nous vient d'Inde ($\sim$ 500 après J.C.)

Trois marchands trouvent une bourse sur la route. L'un des marchands dit : « Si je garde cette bourse, j'aurai deux fois plus d'argent que vous deux réunis. » « Donne moi la bourse et j'aurai trois fois plus que vous deux *ensemble » répond alors le deuxième marchand. Le troisième marchand dit : «Je serai bien plus riche que chacun d'entre vous si je garde cette bourse, et j'aurai cinq fois plus d'argent que vous deux réunis. » S'il y a 60 pièces (toutes de même valeur) dans la bourse, combien a chaque marchand ?*

Cas général : matrice 3×3, déterminant, règle de Sarrus, développement par rapport à la première ligne ou la première colonne. Formules de Cramer.

Proposition. *La solution est unique si le déterminant est non nul.*

Calcul du déterminant dans l'exemple par développement / $1^{\text{ère}}$ colonne.

4) Résolution n équations, n inconnues

Matrice $n \times n$, définition du déterminant par récurrence sur la dimension, en développant relativement à la première colonne.

$$\det(\{a_{i,j}\}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, a_{k,1}\, \det(\{a_{l,m}\}_{l \neq k, m \neq 1})$$

Théorème final (énoncé, non démontré à ce stade)
Un système de n équation à n inconnues possède une solution unique si et seulement si son déterminant est non nul. La solution se calcule par la méthode du pivot de Gauss et peut également s'exprimer comme quotient de deux déterminants par les formules de Cramer.

5) Propriétés des déterminants

Section traitée sans démonstration, mais illustrée en dimension 2 et 3.

a) Notations
Barres, signe somme, cofacteur, expression du développement par rapport à la première ligne ou la première colonne, déterminant comme fonction des colonnes.

b) Calcul du déterminant
Règles de manipulation des lignes ou colonnes :
– une permutation de deux colonnes change le signe (antisymétrie),
– l'ajout d'un multiple d'une colonne à une autre ne change pas le déterminant.

Ceci découle de :
– la nullité du déterminant si deux colonnes sont égales (le det est alterné),
– la linéarité par rapport aux colonnes.

Cas de nullité : une colonne nulle, deux colonnes égales.
En dimension deux, si et seulement si les vecteurs colonnes (ou lignes) sont proportionnels.

Déterminant des matrices triangulaires.

Proposition. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux.*

Calcul effectif du déterminant par le pivot de Gauss.
Retour sur l'exemple des trois marchands.

c) Interprétation géométrique du déterminant
Aire (dessin), orientation, volume, produit vectoriel, produit mixte. Sens trigonométrique, sens horaire (venant des cadrans solaires dans l'hémisphère nord).

Preuve des formules de Cramer.

Comment calculer un déterminant ?
– par une formule explicite en dimension 2 et 3.
– récursivement, en décomposant par rapport à la première ligne ou colonne
– par manipulation des lignes et des colonnes
– par mise sous forme triangulaire

Pourquoi calculer un déterminant ?
– résolution de systèmes linéaires.
– calcul d'aire, de volume (dans le cas réel).

Attendus du premier chapitre

• *Résoudre un système d'équation linéaire par la méthode du pivot de Gauss*

Exemple des neuf chapitres

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 10 & L_1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 8 & L_2 \end{cases}$$

Mise sous forme triangulaire :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 10 & L_1 \\ \frac{21}{5}x_2 = \frac{20}{5} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{5}L_1 \end{cases} \qquad \text{Forme triangulaire}$$

Résolution du système triangulaire :

$$\begin{cases} 5x_1 + \frac{40}{21}x_2 = 10 \\ x_2 = \frac{20}{21} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{21} \\ x_2 = \frac{20}{21} \end{cases}$$

Exemple des trois marchands

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60 & L_1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 60 & L_2 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 60 & L_3 \end{cases}$$

Mise sous forme triangulaire :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60 & L_1 \\ 5x_2 + 9x_3 = 240 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ 15x_2 + 9x_3 = 360 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 60 & & \text{Forme triangulaire} \\ & & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 240 & & \\ & & & - & 18x_3 & = & -360 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 & \end{cases}$$

Résolution du système triangulaire :

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & + & 40 & = & 60 \\ & & 5x_2 & + & 180 & = & 240 \\ & & & & x_3 & = & 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 & + & 24 & + & 40 & = & 60 \\ & & x_2 & & & = & 12 \\ & & & & x_3 & = & 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 4 \\ & x_2 & & = & 12 \\ & & x_3 & = & 20 \end{cases}$$

• *Résoudre un système d'équations linéaires par les formules de Cramer*

$$\begin{cases} 5x_1 & + & 2x_2 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{10\times5-8\times2}{5\times5-2\times2} = \frac{34}{21}$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{5\times8-2\times10}{5\times5-2\times2} = \frac{20}{21}$$

• *Calculer un déterminant* 2×2, 3×3

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 \times 5 - 2 \times 2 = 21.$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 30 + 30 + 10 + 15 + 6 = 90 \quad (\mathit{Sarrus}).$$

• *Calculer un déterminant par développement selon les lignes ou les colonnes*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 14 + 36 + 40$$
$$= 90.$$

• *Calculer un déterminant par le pivot de Gauss*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 15 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = (-1) \times 5 \times (-18) = 90.$$

II - Espaces vectoriels

1) Définition d'un espace vectoriel

Définition, exemples : $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, matrices, fonctions continues ou dérivables sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

Combinaison linéaire. Sous-espace vectoriel. Exemples. Droite et plan vectoriels.

2) Base d'un espace vectoriel, familles libres et génératrices

Définition d'une base. Base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Théorème. *Une famille de n vecteurs de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ forme une base si et seulement si le déterminant associé est non nul.*

Exemple : exprimer $v \in \mathbf{R}^2$ dans une base (e'_1, e'_2), c'est trouver (λ_1, λ_2) tels que $v = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2$.

On traite le cas $e'_1 = (1,1), e'_2 = (-1,1), v = (1,2)$. Dessin.

Définition d'une famille libre, famille liée. Cas de deux vecteurs, cas de la dimension 3 et lien avec le produit vectoriel.

Définition d'une famille génératrice. Sous-espace vectoriel engendré.

3) Dimension

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.

Lemme. *Soit E un espace vectoriel, $(w_1, ..., w_{n+1})$ et $(v_1, .., v_n)$ des vecteurs de E. Si chaque w_i s'exprime comme combinaison linéaire des v_i, alors la famille de vecteurs $(w_1, ..., w_{n+1})$ est liée (linéairement dépendante).*

Exemple de trois vecteurs de $\mathbf{R}^2$.
Preuve par récurrence (pivot de Gauss).

Théorème. *Dans un espace vectoriel ayant une base possédant n éléments,*
– toute famille libre a au plus n éléments,
– toute famille génératrice a au moins n éléments.
En conséquence toutes les bases ont même nombre d'éléments. Ce nombre est la dimension de l'espace vectoriel. On dit qu'il est de dimension n.

Lemme. *Soit $(v_1, .., v_n)$ une famille libre. Si v n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs, alors $(v_1, .., v_n, v)$ est encore une famille libre.*

Proposition. *Dans un espace vectoriel de dimension n,*
– une famille libre est une base si et seulement si elle possède n éléments,
– une famille génératrice est une base si et seulement si elle possède n éléments.

Théorème. *Soit E un espace vectoriel, non réduit à $\{0\}$, supposons qu'il admette une famille libre finie F et une famille génératrice finie G. Alors il existe une base finie B telle que $F \subset B \subset F \cup G$.*

Preuve par récurrence.

Exemple des sous-espaces vectoriels.
Exemple : dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendrée par (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\quad 3v_1 + v_2 = v_3. \quad \dim(\mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3)) = 2.$

Théorème de la base incomplète, existence d'une base.

Corollaire. *Soit v_1, ..., v_n des vecteurs dans un espace de dimension n. Sont équivalents :*
– la famille $(v_1, ..., v_n)$ est libre,
– la famille $(v_1, ..., v_n)$ est génératrice,
– la famille $(v_1, ..., v_n)$ est une base,
– dans toute base, $\det(v_1, ..., v_n)$ est non nul.

Corollaire. *Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si ses colonnes sont liées.*

4) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Intersection, somme, somme directe. Dimension d'une somme.

Proposition.
Formule pour la dimension de la somme directe de deux espaces vectoriels :

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

Formule pour la dimension de la somme de deux espaces vectoriels :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$$

Proposition. *Si E est inclu dans F alors $\dim E \leq \dim F$ avec égalité si et seulement si $E = F$.*

Exemple : deux plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$ distincts se coupent selon une droite. Énoncé similaire pour deux hyperplans de $\mathbf{R}^n$.

Notion de supplémentaire.

Proposition. *Tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.*

Définition d'une projection sur un sous-espace vectoriel parallèlement à un supplémentaire.

5) Équations paramétriques et cartésiennes

Existence d'une représentation paramétrique pour un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et F un sous-espace vectoriel de dimension k. Alors il existe une matrice $\{a_{i,j}\}_{\substack{i=1...n \\ j=1...k}}$, dont les vecteurs colonnes forment une famille libre, qui permet de représenter F sous forme paramétrique dans la base $(e_1, ...e_n)$ au sens suivant.*

Un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base (e_i) est dans F si et seulement si il existe des paramètres $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_{1,1}\lambda_1 & + & ... & + & a_{1,k}\lambda_k \\ & & & & ... & & \\ x_n & = & a_{n,1}\lambda_1 & + & ... & + & a_{n,k}\lambda_k \end{array}\right.$$

et la famille $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ représentant x est unique.

Réciproquement, un tel système d'équations détermine un sous-espace vectoriel de dimension k dès que les vecteurs colonnes de la matrice associée au système forment une famille libre.

Existence d'une représentation cartésienne pour un sous-espace de $\mathbf{R}^n$.

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Alors il existe une matrice $\{a_{i,j}\}_{\substack{i=1..n-k \\ j=1..n}}$ dont les vecteurs lignes forment une famille libre, qui permet de représenter F sous forme cartésienne dans la base $(e_1, ..., e_n)$ au sens suivant.*

Un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base (e_i) est dans F si et seulement si les $n-k$ équations suivantes sont satisfaites :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & ... & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & & ... & & & & \\ a_{n-k,1}x_1 & + & ... & + & a_{n-k,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Réciproquement, un tel système d'équations détermine un sous-espace vectoriel de dimension k dès que les vecteurs lignes de la matrice associée au système forment une famille libre.

Preuve : compléter en une base ces vecteurs lignes avec des éléments de la base canonique et inverser.

Passage d'une représentation à l'autre par le pivot de Gauss.

Exemples :
– Dimension 3 et hyperplans.
– Plan vectoriel $E = \mathrm{vect}((1,2,3),(4,5,6)) \subset \mathbf{R}^3$.
– Droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ définie par le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Systèmes linéaires homogènes

Interprétation des solutions d'un systèmes d'équations homogènes $n \times m$ en terme d'espace vectoriel et d'intersection d'hyperplans. Dessin dans l'espace.

6) Pivot de Gauss, forme échelonnée, rang d'une matrice

Matrice échelonnée, matrice échelonnée réduite.

Définition
Une matrice est *échelonnée* si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne (hormis pour les lignes ne contenant que des zéros, s'il y en a, auquel cas elles sont à la fin). Le premier élément non nul de chaque ligne est appelé *pivot*.
Une matrice est *échelonnée réduite* si de plus
– le premier coefficient non nul d'une ligne est égal à un.
– c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples de telles matrices. Rang d'une matrice.

Théorème. *La dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice ou par les lignes d'une matrice est appelé rang de la matrice. Ce rang est égal au nombre de pivots de sa forme échelonnée. C'est aussi égal au nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée.*

Pour montrer que les colonnes de la matrice et de sa forme échelonnée ont même rang, on peut noter que les relations de dépendances sur les colonnes sont les mêmes pour les deux matrices et utiliser le lemme suivant :

Lemme. *Soit v_1, ..., $v_n \in E$. Alors*

$$\dim(\{(\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0\}) + \dim(vect(v_1, ..., v_n)) = n.$$

qui sera démontré plus tard avec la formule du rang.

Exemple de mise sous forme échelonnée pour trouver une relation de dépendance entre vecteurs. Cas d'une famille de deux vecteurs.

7) Résolution des systèmes d'équations linéaires homogènes

Les solutions d'un tel système forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ qu'on met sous forme paramétrique à l'aide de la forme échelonnée réduite.

En résumé, le pivot de Gauss permet de

– déterminer la dimension de l'e.v. engendré par une famille de vecteurs,

– résoudre un système d'équations linéaires homogène,

– passer d'équations cartésiennes à des équations paramétriques,

– déterminer si une famille de vecteurs est libre et si ce n'est pas le cas expliciter les relations de dépendance entre ces vecteurs.

Attendus du second chapitre

• *Déterminer si un ensemble est un espace ou un sous-espace vectoriel*

Exemple des polynômes définis de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
La somme de deux polynômes est un polynôme. Multiplier un polynôme par un réel donne encore un polynôme. La fonction nulle est un polynôme. L'ensemble des polynômes est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

• *Déterminer si une famille de vecteurs est une base*

Exemple avec $e'_1 = (1,1), e'_2 = (-1,1)$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 \neq 0.$$

D'où (e'_1, e'_2) est bien une base de $\mathbf{R}^2$.

• *Exprimer un vecteur dans une base donnée*

Exemple avec $e'_1 = (1,1), e'_2 = (-1,1), v = (1,2)$.
Cherchons λ_1, λ_2 tels que $v = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2$.

$$\begin{cases} \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 2 \end{cases}$$

La résolution donne $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ si bien que $v = \frac{1}{2}\, e'_1 + \frac{3}{2}\, e'_2$.

• *Compléter une famille libre en une base, trouver un supplémentaire*

En coordonnées, on peut compléter avec des vecteurs de la base canonique. Exemple : $v_1 = (1,2,3,1)$, $v_2 = (-1,2,3,2)$. On essaie de compléter avec $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$ pour obtenir une base de $\mathbf{R}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 3 = 3 \neq 0.$$

La famille (v_1, v_2, e_1, e_2) est bien une base. L'espace $\mathrm{vect}(e_1, e_2)$ est un supplémentaire de l'espace $\mathrm{vect}(v_1, v_2)$.

• *Déterminer un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ à partir de son équation paramétrique*

Le plan $\mathrm{vect}((1,2,3),(4,5,6)) \subset \mathbf{R}^3$ a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda_1 & + & 4\lambda_2 \\ x_2 & = & 2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 \\ x_3 & = & 3\lambda_1 & + & 6\lambda_2 \end{cases}$$

Pivot de Gauss relativement aux variables (λ_1, λ_2) :

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda_1 & + & 4\lambda_2 \\ x_2 - 2x_1 & = & & - & 3\lambda_2 \\ x_3 - 3x_1 & = & & - & 6\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = & \lambda_1 & + & 4\lambda_2 \\ x_2 - 2x_1 & = & & - & 3\lambda_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_1 & = & & & 0 & \leftarrow \text{ équation cartésienne du plan} \end{cases}$$

• *Déterminer un système d'équations paramétriques d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ à partir de ses équations cartésiennes*

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & -x_3 \\ & & x_2 & = & 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -x_2 - \lambda = -3\lambda \\ & x_2 & & = & 2\lambda \\ & & x_3 & = & \lambda & \leftarrow \text{ introduction d'un paramètre} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = & -3\lambda \\ x_2 & = & 2\lambda \\ x_3 & = & 1\lambda \end{cases}$$

Vecteur directeur de cette droite vectorielle : $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• *Mettre sous forme échelonnée une matrice*

Exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{4}L_2 \end{matrix}$$

Forme échelonnée

• *Déterminer la dimension d'un espace vectoriel, le rang d'une matrice*

Exemple de la famille de vecteurs constituant les colonnes de la matrice A vue précédemment. La forme échelonnée possède deux pivots d'où

$$\dim \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\\12\\5\end{pmatrix}\right) = 2.$$

On a également

$$\dim \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\right) = 2.$$

• *Déterminer si une famille de vecteurs est libre*

En coordonnées, c'est équivalent à montrer que la dimension de l'espace engendré est égale au nombre de vecteurs de la famille.
Exemple : la famille

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\\12\\5\end{pmatrix}$$

n'est pas libre car elle n'engendre pas un espace de dimension trois.

• *Déterminer si une famille de vecteurs est génératrice*

Exemple : la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$$

n'est pas génératrice car on a montré précédemment qu'elle engendrait un sous-espace de dimension deux donc différent de $\mathbf{R}^3$.

• *Mettre une matrice sous forme échelonnée réduite*

On reprend la matrice A dont on a calculé la forme échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 4 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

Forme échelonnée réduite

• *Déterminer une relation de dépendance entre vecteurs*

Cela se fait par mise sous forme échelonnée réduite.
Exemple de la famille de vecteurs constituant les colonnes de la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On vient de mettre la matrice sous forme échelonnée réduite. L'équation

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

est donc équivalente à l'équation obtenue à partir de la forme échelonnée :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire à $\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$ ou encore à $\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & -3\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -\lambda_3 \\ \lambda_3 & = & \lambda_3 \end{array}\right.$.

Les valeurs possibles pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont donc proportionnelles à $(-3, -1, 1)$.
En particulier,

$$-3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

• *Reconnaître si une matrice est sous forme échelonnée réduite*

Exemple : les matrices suivantes sont sous forme échelonnée réduite.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les matrices suivantes ne sont pas sous forme échelonnée réduite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• *Déterminer si deux espaces sont en somme directe*

Montrer que l'intersection est restreinte à $\{0\}$, i.e. résoudre un système.

Exemple : $\mathbf{R}(1,2)$ et $\mathbf{R}(1,1)$ sont en somme directe car il n'existe pas de $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ non tous les deux nuls tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

III - Applications linéaires

1) Matrices et applications linéaires

Définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Exemples : identité, homothétie, projection.
Structure d'algèbre.

a) Représentation matricielle d'une application linéaire
Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie munis de bases B_1 et B_2 respectivement. On note $M_{B_1,B_2}(f)$ la matrice de f dans ces bases, ou simplement $M_{B_1}(f)$ si $E = F$ et $B_1 = B_2$.

Soit $\{a_{i,j}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ la matrice de f dans les bases $(e_1, ..., e_n)$, $(e'_1, ..., e'_m)$ de E et F. Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs e_1,..., e_n dans la base e'_1,..., e'_m.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} e'_i.$$

Si $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j) e'_i$.
Coordonnées de l'image d'un vecteur.

Exemples : projection, symétrie, rotation vectorielle du plan. Dessins.

b) Composition et produit matriciel
Définition du produit matriciel.

Proposition. *Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie munis de bases B_1, B_2, B_3 et $f : E \to F, g : F \to G$ des applications linéaires. Alors*

$$M_{B_1,B_3}(g \circ f) = M_{B_2,B_3}(g) M_{B_1,B_2}(f).$$

c) Inverse d'une matrice carrée.

Proposition. *Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Lien avec la résolution des systèmes linéaires.
Calcul de l'inverse d'une matrice 2×2 par les formules de Cramer.
Retour sur l'exemple des vaches et des moutons, résolution matricielle.

2) Changement de base, matrice de passage

Soit $B = (e_1, .., e_n)$, $B' = (e'_1, .., e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel. La matrice de passage de B à B' est notée $P_{B,B'} = \{a_{i,j}\}$. Elle est définie par

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $(e'_1, .., e'_n)$ dans l'ancienne base $(e_1, .., e_n)$.

La matrice $P_{B,B'}$ est la matrice de l'identité dans les bases B' et B.

Proposition. *Soit $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de v dans la base B et $(x'_1, ..., x'_n)$ les coordonnées de v dans la base B' : $v = \sum_i x_i e_i = \sum_i x'_i e'_i$. Alors $x_i = \sum_j a_{i,j} x'_j$.*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{B,B'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

On a également $P_{B,B'} P_{B',B} = id$. La matrice $P_{B',B}$ est l'inverse de $P_{B,B'}$.

Théorème – *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, B_1 et B_2 deux bases de E, B'_1 et B'_2 deux bases de F, alors*

$$M_{B_2,B'_2}(f) = (P_{B'_1,B'_2})^{-1} M_{B_1,B'_1}(f) P_{B_1,B_2}$$

Cas de $f : E \to E$ avec $B_1 = B'_1$, $B_2 = B'_2$:

$$M_{B_2}(f) = (P_{B_1,B_2})^{-1} M_{B_1}(f) P_{B_1,B_2}$$

Notion de matrice conjuguée.

Exemples de changement de base.
Demi-tour autour du troisième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Demi-tour autour du vecteur $e'_1 = (1, 1, 1)$.
Cas des projections.

Proposition. *Toute matrice de projection est conjuguée à une matrice diagonale, avec des 0 et des 1 sur la diagonale, le nombre de 1 étant égal au rang de la matrice.*

Construction d'une application linéaire à partir d'une base et d'une famille de même cardinal.

Proposition. *Soit E, F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie n et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors pour toute famille de vecteurs $(v_1, ..., v_n)$ de F, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour tout i.*

3) Noyau et rang d'une application linéaire

Définition du noyau, de l'image d'une application linéaire.
Définition du rang : $rang(f) = \dim(Im(f))$.
Rappels sur l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité des applications.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors l'application f est injective si et seulement si $ker(f) = \{0\}$. Elle est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.*

Théorème du rang. *Soit $f : E \to F$ avec E de dimension finie. Alors*

$$rang(f) + \dim(ker(f)) = \dim E.$$

Lemme.
– *L'image d'une famille libre par une application injective est libre.*
– *L'image d'une famille génératrice par une appli surjective est génératrice.*
– *L'image d'une base par une application bijective est une base.*

Corollaire. *S'il existe une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels de dimension finie, alors ils ont même dimension.*

Lien avec les matrices : le noyau comme ensemble des solutions du système linéaire homogène associé, l'image engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice.

Application : démonstration d'un lemme vu plus haut.

Lemme. *Soit E un espace vectoriel, v_1, ..., $v_n \in E$. Alors*

$$\dim(\{(\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum \lambda_i v_i = 0\}) + \dim(vect(v_1, ..., v_n)) = n.$$

Exemple des projections. L'image est l'espace sur lequel on projette, le noyau est l'espace parallèlement auquel on projette.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, E, F deux espaces vectoriels de dimension finie,* **de même dimension**. *Sont équivalents :*
– *f est injective,*
– *f est surjective,*
– *$ker(f) = \{0\}$,*
– *$rang(f) = \dim F$,*
– *f est bijective,*
– *f est inversible,*
– *le déterminant de la matrice associée à f dans toute base est non nul.*

Contre-exemple en dimension infinie avec l'espace vectoriel des polynômes et les applications linéaires $f(P) = xP$ et $f(P) = P'$.

Illustration avec les polynômes de Lagrange.

Théorème. *Soit n un entier, x_1,..., $x_n \in \mathbf{R}$ des réels distincts, y_1,..., y_n des réels. Alors il existe un unique polynôme $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de degré au plus $n - 1$ tel que pour tout i compris entre 1 et n, $P(x_i) = y_i$.*

Attendus du troisième chapitre

• *Déterminer la matrice associée à une application linéaire*

Exemple des projections : projection sur $\mathbf{R}\binom{2}{1}$ parallèlement à $\mathbf{R}\binom{0}{1}$.

$$f(e_1) = e_1 + \frac{1}{2}\,e_2, \quad f(e_2) = 0.$$

Matrice de f dans la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur v de coordonnées $\binom{3}{-2}$ a une image $f(v)$ dont les coordonnées valent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemple des symétries : symétrie axiale d'axe $\mathbf{R}\binom{1}{1}$ parallèlement à $\mathbf{R}\binom{-1}{1}$.

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_1.$$

Matrice de f dans la base canonique : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Image d'un vecteur de coordonnées $\binom{x}{y}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

L'application f permute les coordonnées des vecteurs.

Exemple des rotations : rotation d'angle θ autour de l'origine.

$$f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, \quad f(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2.$$

Matrice de f dans la base canonique : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

• *Composer les applications linéaires, calculer un produit matriciel*

Composition de la projection précédente par la symétrie précédente. On applique d'abord la projection et ensuite la symétrie.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• *Calculer l'inverse d'une matrice* 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

• *Calculer l'inverse d'une matrice carrée*

Exemple : inverse de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

La résolution du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & y_2 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & y_3 \end{array}\right.$ donne

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & -\frac{7}{45}\,y_1 & + & \frac{2}{15}\,y_2 & + & \frac{4}{45}\,y_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{5}\,y_1 & - & \frac{1}{10}\,y_2 & + & \frac{1}{10}\,y_3 \\ x_3 & = & \frac{2}{9}\,y_1 & + & \frac{1}{6}\,y_2 & - & \frac{1}{18}\,y_3 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{45} & \frac{2}{15} & \frac{4}{45} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

• *Exprimer un vecteur dans différentes bases*

Exemple avec B la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $B' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (-1,1)$.

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{B',B} = (P_{B,B'})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si v a pour coordonnées $\binom{x_1}{x_2}$ dans la base B et $\binom{x'_1}{x'_2}$ dans la base B', alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

• *Exprimer une application linéaire dans différentes bases*

Exemple du demi-tour de $\mathbf{R}^3$ autour de l'axe des z.

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Dans cette base,

$$f(e_1) = -e_1, \quad f(e_2) = -e_2, \quad f(e_3) = e_3.$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple du demi-tour de $\mathbf{R}^3$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $(1,1,1)$

Base du plan orthogonal à $e'_1 = (1,1,1)$: $e'_2 = (1,-1,0)$ et $e'_3 = (1,1,-2)$. Posons $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On fait un changement de base pour se ramener à la base canonique B.

$$M_B(f) = P_{B,B'} M_{B'}(f) (P_{B,B'})^{-1}$$

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (P_{B,B'})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

• *Déterminer le noyau et l'image d'une matrice, d'une application linéaire*

En coordonnées, il s'agit de résoudre un système linéaire.

Exemple : soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques de ces espaces vaut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de A engendrent $Im(f)$ et on a vu que la troisième colonne s'exprime en fonction des deux premières.

$$Im(f) = \text{vect}\Big((1,2,3,1), (-1,2,3,2)\Big)$$

Les éléments $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ du noyau sont solutions de l'équation $A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$, résolue précédemment.

$$ker(f) = \mathbf{R}\,(-3,-1,1)$$

• *Déterminer si une application linéaire est injective, surjective, bijective*

Il faut calculer le noyau et l'image, comme expliqué plus haut.

Exemple : l'application associée à la matrice A précédente n'est pas injective car $ker(f) \neq \{0\}$. Elle n'est pas surjective car $Im(f) \neq \mathbf{R}^4$.

IV - Étude générale des déterminants

On poursuit l'étude du déterminant des matrices qui a été abordé au premier chapitre, avec pour but de généraliser le concept aux applications linéaires définies d'un espace vectoriel dans lui-même.

1) Le déterminant comme forme multilinéaire alternée

Définition du déterminant d'une matrice par récurrence et développement selon la première ligne de la matrice. Déterminant d'une famille de n vecteurs colonnes de $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$).

Définition d'une forme multilinéaire alternée.

Théorème.
– *Le déterminant est une forme multilinéaire alternée qui vaut* 1 *sur la base canonique.*
– *Toute forme multilinéaire alternée* D *est proportionnelle au déterminant. Notons* $(e_1, ..., e_n)$ *la base canonique. Alors pour tout* $v_1, .. \, v_n \in \mathbf{R}^n$ *(ou* $\mathbf{C}^n$*),*

$$D(v_1, ..., v_n) = D(e_1, ..., e_n) \det(v_1, ..., v_n).$$

Preuve par récurrence pour le premier point, développement pour le second.

Corollaire.
– $\det(Av_1, ..., Av_n) = \det(A) \det(v_1, ..., v_n)$*,*
– $\det(AB) = \det(A) \det(B)$*,*
– $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ *si* A *est inversible.*

Corollaire. *Deux matrices conjuguées ont même déterminant.*

Définition du déterminant d'une application linéaire $f : E \to E$.

Propriétés.
– $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$*,*
– *l'application* f *est inversible si et seulement si* $\det(f) \neq 0$ *auquel cas*

$$\det(f^{-1}) = 1/\det(f).$$

2) Développement du déterminant en lignes et colonnes

Développement du déterminant par rapport à une ligne quelconque (c'est une forme multilinéaire alternée, même preuve que pour la première ligne). Pour toute ligne i,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \, a_{i,k} \, \det(\{a_{l,m}\}_{l \neq i, m \neq k})$$

Développement du déterminant en colonne (par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \, a_{k,j} \, \det(\{a_{l,m}\}_{l \neq k, m \neq j})$$

Preuve par récurrence et linéarité ; décomposition de la première colonne sur la base canonique. Remarque : s'il y a une colonne dont tous les coefficients sont nuls, cela découle aussi du fait que la matrice a un rang inférieur strict à n.

Transposée d'une matrice. Transposée d'un produit de matrices.

Corollaire. *Une matrice et sa transposée ont même déterminant.*

Définition de la matrice des cofacteurs, notée $cof(A)$.

$$cof(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\{a_{k,l}\}_{k \neq i, l \neq j})$$

Proposition. $\det(A)\, id = A\, {}^t cof(A) = {}^t cof(A)\, A$.

Preuve : $(cof(A)^t A)_{i,j}$ est le déterminant obtenu en développant par rapport à la $i^{\text{ième}}$ ligne la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par sa $j^{\text{ième}}$ ligne.

Application : inverse d'une matrice 3×3 en terme de déterminants.

3) Formule générale pour le déterminant

Permutations, transpositions. Notation utilisée : $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{smallmatrix}\right)$.
Le groupe des bijections de $\{1, ..., n\}$ est noté S_n.
Signature d'une permutation, définie à partir de la parité du nombre de transpositions nécessaires pour réordonner de manière croissante la suite $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$.

Proposition. *Soit* $(e_1, ..., e_n)$ *la base canonique de* $\mathbf{R}^n$*. Alors*

$$\varepsilon(\sigma) = \det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}).$$

Proposition. *La signature d'une composée de permutations est égale au produit des signatures :* $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\, \varepsilon(\sigma_2)$.

Théorème. *Le déterminant d'une matrice* $n \times n$ *est donné par la formule*

$$\det(\{a_{i,j}\}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} ... a_{n,\sigma(n)}$$

On retrouve les formules habituelles pour $n = 2$ et $n = 3$.

4) Retour sur la résolution des systèmes linéaires

Description de l'algorithme avec la mise sous forme échelonnée des matrices, lien avec l'image et le noyau de l'application linéaire associée. Méthode pour déterminer s'il y a une solution.

5) Complément : diagonalisation des matrices

Polynôme caractéristique d'une matrice : $P_A(X) = \det(Xid - A)$.
Valeurs propres, vecteurs propres.

Théorème. *Toute matrice $n \times n$ dont le polynôme caractéristique possède n racines distinctes est diagonalisable.*

Exemple : mise sous forme diagonale de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique : $P_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2 - X - 1$.

Valeurs propres : $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\ker(A - \lambda_1\, id) = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ker(A - \lambda_2\, id) = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Attendus du quatrième chapitre

• *Calculer le déterminant en développant par rapport à une ligne quelconque*

Exemple en développant par rapport à la seconde ligne

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \times 1 + 2 \times 2 = -1.$$

• *Calculer l'inverse d'une matrice* 3×3 *par les cofacteurs*

Exemple

$$cof \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \\ -8 & 20 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 8 \\ 15 & -2 & -20 \\ -8 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

• *Calculer la transposée d'une matrice*

Exemples

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

• *Calculer la signature d'une permutation*

$$\varepsilon\Big(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Big) = -1$$

car il faut une transposition ($1 \leftrightarrow 2$) pour remettre les indices dans l'ordre.

$$\varepsilon\Big(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Big) = 1$$

car il faut deux transpositions ($3 \leftrightarrow 1$ puis $3 \leftrightarrow 2$) pour remettre les indices dans l'ordre.

$$\varepsilon\Big(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\Big) = -1$$

car il faut sept transpositions ($5 \leftrightarrow 4$, $5 \leftrightarrow 1$, $5 \leftrightarrow 2$, $5 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow 2$ et enfin $4 \leftrightarrow 3$) pour remettre les indices dans l'ordre.

• *Résoudre un système linéaire général*

Exemple : résolution du système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

On place ce système sous forme échelonnée, en effectuant les manipulations vues au second chapitre, pour obtenir

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x_1 & & & + & 3x_3 & = & \frac{1}{2}\,y_1 + \frac{1}{4}\,y_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -\frac{1}{2}\,y_1 + \frac{1}{4}\,y_2 \\ & & & & 0 & = & -\frac{3}{2}\,y_2 + \,y_3 \\ & & & & 0 & = & \frac{1}{2}\,y_1 - \frac{3}{4}\,y_2 + y_4 \end{array}\right.$$

Il n'y a de solutions que si $-\frac{3}{2}\,y_2 + \,y_3 = 0$ et $\frac{1}{2}\,y_1 - \frac{3}{4}\,y_2 + y_4 = 0$.

On peut vérifier que cela est équivalent à

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{vect}\Big((1,2,3,1), (-1,2,3,2)\Big).$$

Les solutions sont alors de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \frac{1}{2}\,y_1 & + & \frac{1}{4}\,y_2 & - & 3\lambda \\ x_2 & = & -\frac{1}{2}\,y_1 & + & \frac{1}{4}\,y_2 & - & \lambda \\ x_3 & = & \lambda & & & & \end{array}\right.$$

pour $\lambda \in \mathbf{R}$. Il y a une infinité de solutions, une pour chaque valeur de λ. Deux solutions diffèrent par un vecteur qui appartient à $\mathbf{R}(-3,-1,1)$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Références

La référence conseillée : le polycopié en ligne du site exo7
`http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf`

Un livre qui porte sur l'ensemble du programme de Licence 1 :
C. Deschamps, A. Warusfeld, *Mathématiques, TOUT-EN-UN, 1ere année, Cours et exercices corrigés*, Dunod.

Tout livre d'algèbre linéaire de première année de licence convient.

Sommaire

Yves Coudène, mars 2018.