

Espaces euclidiens

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$ composé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que l'expression suivante définit un produit scalaire sur cet espace :

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^3 P_1(k)P_2(k).$$

Soit $d \geq 1$ un entier. On se place sur l'espace $\mathbf{R}_d[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à d . Pour quelles valeurs de n l'expression suivante définit-elle un produit scalaire sur cet espace ?

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^n P_1(k)P_2(k).$$

Exercice 2. On se place sur l'espace vectoriel $C^0([a, b], \mathbf{R})$ des fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbf{R}$, à valeurs dans \mathbf{R} . Soit $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que l'expression suivante définit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([a, b], \mathbf{R})$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)h(t) dt.$$

Supposons h strictement positive. Cette expression définit-elle un produit scalaire sur $C^0([a, b], \mathbf{R})$?

Exercice 3. Pour $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot {}^t B)$ (où tr désigne la trace et t la transposée). Montrer que cette expression définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique positive notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La forme quadratique associée est notée $\| \cdot \|^2$. Développer l'expression

$$\left\| \|x\|y\| - \|x\|y\| \right\|^2.$$

En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbf{R}^n muni du produit scalaire standard, montrer

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 6. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbf{R}^5 muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \dots, x_5 \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5|}{\sqrt{55}} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_5^2}.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 7. Soient $a < b$ dans \mathbf{R} et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Pour tout $f \in E$, montrer que

$$\left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? Indication : remarquer que $|f(t)|^2 = f(t)^2$.

Exercice 8. Soit P un polynôme défini sur \mathbf{R} . Montrer l'inégalité

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P(t)^2 dt.$$

Peut-on avoir l'égalité ?

Exercice 9. Soit E un espace euclidien et $x, y, z \in E$. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à trois variables :

$$\|x\|^2 \langle y, z \rangle^2 + \|y\|^2 \langle x, z \rangle^2 + \|z\|^2 \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 + 2 \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle \langle z, x \rangle.$$

On pourra commencer par le cas où x, y, z sont linéairement indépendants et s'intéresser au déterminant de la matrice du produit scalaire dans la base (x, y, z) .

Exercice 10. Soit E un espace euclidien et φ une forme bilinéaire symétrique positive. Montrer que son cône des vecteurs isotropes coïncide avec son noyau.

Exercice 11. Soit V un espace euclidien. On suppose qu'il existe une suite orthonormée $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ dans V , c'est-à-dire telle que

$$(*) \quad \forall p, q \in \mathbf{N}, \quad \langle e_p, e_q \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q \in \mathbf{N}$, on pose $c_q(f) = \langle e_q, f \rangle$.

1. Donner une formule de la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_0, \dots, e_n\}$, on la notera $S_n(f)$.
2. Notons aussi $R_n(f) = f - S_n(f)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que $\langle e_p, R_n(f) \rangle = 0$ pour tout $p = 0, 1, \dots, n$.
3. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^n c_p(f)^2 \leq \|f\|^2.$$

En déduire que la série $\sum_{p=0}^{\infty} c_p(f)^2$ est convergente.

4. Exemple : ici V désigne le \mathbf{R} -espace vectoriel des fonctions continues $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Notons $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2} \cos(2\pi pt)$. Montrer que la suite $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie la condition (*) ci-dessus.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien de dimension finie. Montrer que pour tout $l \in E^*$, il existe un unique $v_l \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $l(x) = \langle x, v_l \rangle$. (On montrera que l'application $v \in E \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in E^*$ est un isomorphisme).