RAPPELS

Exercice 1 (Fonction characteristique, moment, ...)

1. Soit X une gaussienne standard, calculer $\mathbb{E}(X^n)$ et $\mathbb{E}(|X|^n)$ pour tout $n \geq 0$.
2. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ l'espérance $\mathbb{E}(e^{zX})$ a t'elle un sens ? Donner son expression sur cet ensemble.
3. Rappeler l'expression générale de la fonction caractéristique et de la densité d'une loi normale multidimensionnelle.

Exercice 2 (Image linéaire) On considère X une gaussienne de $\mathbb{R}^d$ de covariance K et d'espérance μ.

1. Pour ℓ une application linéaire de matrice M, donner la loi de $\ell(X)$.
2. Montrer qu'on peut écrire $X = \tilde{\ell}(Y) + c$ où $\tilde{\ell}$ est une application linéaire, Y est une gaussienne multidimensionnelle standard et c est un vecteur.

Exercice 3 (Calculs explicites) On considère (X, Y, Z) une gaussienne de moyenne $(1, 2, 1)$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de $(X + Y, X + Z)$ sachant X.
2. Déterminer le support de (X, Y, Z).
3. Écrire (X, Y, Z) comme image linéaire d'un vecteur gaussien standard.
4. Décrire la loi de (X, Y, Z) en utilisant des coordonnées orthogonale sur son support.

Exercice 4 (Intégration par partie gaussienne) Dans cet exercice on se place dans $\mathbb{R}^d$ et on considère $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ à support compact et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance K.

1. Cas $d = 1$: montrer que si f est une fonction réelle et que X est une gaussienne centrée de variance σ^2, alors
$$\mathbb{E}(Xf(X)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(X)).$$

Dans la suite de l'exercice, on prend $d \geq 2$. On suppose dans un premier temps que K est une matrice diagonale.

2. Que pouvez-vous dire des variables $X_1, X_2, \ldots, X_d$ (loi, indépendance) ?
3. Montrer que
$$\forall i,\ \mathbb{E}(X_i f(X)) = K_{ii} \mathbb{E}(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}(X)).$$

4. En déduire que si K est une matrice diagonale, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\big(< v, X > f(X)\big) = \mathbb{E}(< v, K\nabla f >),$$

où on rappelle que ∇f est le vecteur $(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_1}, \dots \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_d})$.

On considère maintenant le cas général.

5. Montrer que la formule de la question 4 est toujours valable.

Exercice 5 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de gaussienne converge en loi.

Exercice 6 (Vrai ou Faux) Donner une preuve ou un contre exemple pour les énoncés suivants.

1. Soit X_n une suite de variables admettant des densités f_n, si X_n converge en loi vers X alors X admet une densité.
2. Si X_n est une suite de variables aléatoires telle que les fonctions de répartition F_{X_n} converge simplement, alors X_n converge en loi.
3. Si X_n est une suite de variable aléatoire avec $X_n > 0$ p.s. et telle que X_n converge en loi vers X, alors $X > 0$ p.s..
4. Si X_n est une suite de variable aléatoire avec $X_n \geq 0$ p.s. et telle que X_n converge en loi vers X, alors $X \geq 0$ p.s..
5. Si X_n converge dans L^2 vers X et si f est une fonction continue, alors $f(X_n)$ converge dans L^2 vers $f(X)$.
6. Si X_n converge dans L^2 vers X, alors $\mathbb{P}(X_n \in [0,1]) \to \mathbb{P}(X \in [0,1])$
7. Si X_n converge dans L^2 vers X, alors $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.
8. Le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y) si et seulement si X_n et Y_n convergent en loi.
9. Le couple (X_n, Y_n) converge L^2 vers (X, Y) si et seulement si X_n et Y_n convergent L^2.