

RAPPELS

Exercice 1 (Fonction caractéristique, moment, ...)

1. Soit X une gaussienne standard, calculer $\mathbb{E}(X^n)$ et $\mathbb{E}(|X|^n)$ pour tout $n \geq 0$.

$\mathbb{E}(X^n) = \prod_{i=1}^p 2i - 1$ pour $n = 2p$ pair. Pour $n = 2p + 1$, $\mathbb{E}(|X|^n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{i=1}^p 2i$. Par intégration par parties successives.

2. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ l'espérance $\mathbb{E}(e^{zX})$ a-t-elle un sens? Donner son expression sur cet ensemble.

Ça a du sens pour tout z car la densité décroît sur-exponentiellement. On a $\mathbb{E}(e^{zX}) = e^{z^2/2}$ On le prouve sur \mathbb{R} en complétant le carré et on étend sur \mathbb{C} par holomorphie.

3. Rappeler l'expression générale de la fonction caractéristique et de la densité d'une loi normale multidimensionnelle.

fonction caractéristique $\exp(i\langle \mu, T \rangle T^t K T / 2)$ ou T est un vecteur. Densité $\frac{1}{(\pi^d \det(K))^{1/2}} \exp(-(X - \mu)^t K^{-1} (X - \mu) / 2)$. On a noté K la matrice de covariance et μ le vecteur moyenne.

Exercice 2 (Image linéaire) On considère X une gaussienne de \mathbb{R}^d de covariance K et d'espérance μ .

1. Pour ℓ une application linéaire de matrice M , donner la loi de $\ell(X)$.

C'est encore un vecteur gaussien par stabilité des applications linéaires par composition. Sa moyenne est $\ell(\mu)$ et sa matrice de covariance est $M K M^t$ ce qu'on vérifie par un calcul direct.

2. Montrer qu'on peut écrire $X = \tilde{\ell}(Y) + c$ où $\tilde{\ell}$ est une application linéaire, Y est une gaussienne multidimensionnelle standard et c est un vecteur.

Comme K est une matrice symétrique, on peut extraire une racine carrée M telle que $K = M M^t$ et appliquer le résultat précédent. On a juste $c = \mu$

Exercice 3 (Calculs explicites) On considère (X, Y, Z) une gaussienne de moyenne $(1, 2, 1)$ et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de $(X + Y, X + Z)$ sachant X .

On sait qu'on cherche une loi gaussienne donc qu'il suffit de trouver espérance et matrice de covariance. On cherche α et β tels que $X + Y + \alpha X$ et $X + Z + \beta X$ soient indépendants de X , ce pour quoi il suffit de vérifier que les covariances sont nulles. On obtient $\alpha = 1$ et $\beta = -2$, d'où

$$\mathbb{E}(X + Y|X) = X + \mathbb{E}(2X + Y) = X + 4, \quad \mathbb{E}(X + Z|X) = \mathbb{E}(-X + Z) = 0$$

et pour les covariances

$$\text{Var}(X + Y|X) = \text{Var}(2X + Y) = 1, \quad \text{Var}(X + Z|X) = 1, \quad \text{Cov}(X + Y, X + Z|X) = 1.$$

2. Déterminer le support de (X, Y, Z) .

Clairement la loi conditionnelle de $X + Y, X + Z$ sachant X a un support unidimensionnel. On a $3X + Y - Z = 4$.

3. Écrire (X, Y, Z) comme image linéaire d'un vecteur gaussien standard.

On a vu que X est indépendant de $2X + Y$ et que les deux ont variance 1, on cherche à compléter en trouvant une combinaison linéaire contenant Z . Pour que $Z + \gamma X + \delta Y$ soit indépendant de (X, Y) , on veut $1 + \gamma - 2\delta = 0$ et $-1 - 2\gamma + 5\delta = 0$ soit $\delta = -1$ et $\gamma = -3$. On calcule la variance de $-3X - Y + Z$ et on trouve $9 + 5 + 2 + 12 - 6 - 2 = 20$ et toutes les espérances. On peut donc poser $A = X - \mathbb{E}(X), B = 2X + Y - \mathbb{E}(2X + Y)$.

4. Décrire la loi de (X, Y, Z) en utilisant des coordonnées orthogonales sur son support.

On commence par choisir une base du support : par exemple $u = (0, 1, 1)$ et $v' = (1, 0, 3)$. On orthogonalise par exemple en gardant u et en posant $v = (2, -3, 3) = -3u + 2v'$. À nouveau $\langle u | (X, Y, Z) \rangle$ est une gaussienne de variance 5. On calcule aussi la variance de $\langle v | (X, Y, Z) \rangle$ et la covariance et on peut ensuite écrire la densité jointe de (u, v) .

Exercice 4 (Intégration par partie gaussienne) Dans cet exercice on se place dans \mathbb{R}^d et on considère $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 à support compact et $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance K .

1. Cas $d = 1$: montrer que si f est une fonction réelle et que X est une gaussienne centrée de variance σ^2 , alors

$$\mathbb{E}(Xf(X)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'(X)).$$

C'est juste une intégration par partie avec l'expression explicite de la densité.

Dans la suite de l'exercice, on prend $d \geq 2$. On suppose dans un premier temps que K est une matrice diagonale.

2. Que pouvez-vous dire des variables X_1, X_2, \dots, X_d (loi, indépendance) ?

Elles sont indépendantes et de loi normales de variances K_{ii} .

3. Montrer que

$$\forall i, \mathbb{E}(X_i f(X)) = K_{ii} \mathbb{E}\left(\frac{df}{dx_i}(X)\right).$$

On fait une intégration par partie dans l'intégrale multiple.

4. En déduire que si K est une matrice diagonale, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(\langle v, X \rangle f(X)) = \mathbb{E}(\langle v, K \nabla f \rangle),$$

où on rappelle que ∇f est le vecteur $(\frac{df}{dx_1}, \dots, \frac{df}{dx_d})$.

C'est juste la linéarité.

On considère maintenant le cas général.

5. Montrer que la formule de la question 4 est toujours valable.

On a une expression invariante par changement de base et par l'exo 2 on peut toujours trouver une base où la matrice de covariance est diagonale.

Exercice 5 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de gaussienne converge en loi.

Il faut et il suffit que l'espérance et la variance converge. Dans un sens, il suffit de constater que la fonction caractéristique converge grâce à la formule explicite. Dans l'autre sens, il est facile de voir que si l'espérance ou la variance ne sont pas bornés, alors la suite de loi n'est pas tendue.

Exercice 6 (Vrai ou Faux) Donner une preuve ou un contre exemple pour les énoncés suivants.

1. Soit X_n une suite de variables admettant des densités f_n , si X_n converge en loi vers X alors X admet une densité.

Faux, par exemple une suite de gaussienne centrée de variance tendant vers 0

2. Si X_n est une suite de variables aléatoires telle que les fonctions de répartition F_{X_n} converge simplement, alors X_n converge en loi.

Vrai, il suffit que les fonctions de répartition convergent en tout point de continuité.

3. Si X_n est une suite de variable aléatoire avec $X_n > 0$ p.s. et telle que X_n converge en loi vers X , alors $X > 0$ p.s..

Faux, par exemple des variables exponentielles de moyenne tendant vers 0.

4. Si X_n est une suite de variable aléatoire avec $X_n \geq 0$ p.s. et telle que X_n converge en loi vers X , alors $X \geq 0$ p.s..

Vrai, c'est une conséquence de la convergence de la fonction de répartition en tout point de continuité et du fait qu'une fonction croissante a au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.

5. Si X_n converge dans L^2 vers X et si f est une fonction continue, alors $f(X_n)$ converge dans L^2 vers $f(X)$.

Clairement faux.

6. Si X_n converge dans L^2 vers X , alors $\mathbb{P}(X_n \in [0, 1]) \rightarrow \mathbb{P}(X \in [0, 1])$

Faux, par exemple on peut prendre $X \sim B(1/2)$ et $X_n = (1 + 1/n)X$.

7. Si X_n converge dans L^2 vers X , alors $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

vrai (à condition que X ait une espérance bien définie, on peut formellement avoir une distance L^2 finie entre deux variables qui ne sont pas L^2). On applique simplement $\mathbb{E}(|X_n - X|) \leq (\mathbb{E}(X_n - X)^2)^{1/2}$.

8. Le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y) si et seulement si X_n et Y_n convergent en loi.

Faux car les lois marginales ne déterminent pas du tout la loi jointe.

9. Le couple (X_n, Y_n) converge L^2 vers (X, Y) si et seulement si X_n et Y_n convergent L^2 .

Vrai, il suffit d'écrire la distance.