

RAPPELS 2

Exercice 1 (Convergences). Soit $\{X_i\}_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1, +1\}$. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}[|X_1 + \dots + X_n|]$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2 (Classes monotones). Soient \mathbb{P} et \mathbb{Q} deux mesures de probabilité sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) .

1. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$ est une classe monotone.
2. En déduire que si \mathbb{P} et \mathbb{Q} coïncident sur un π -système engendrant \mathcal{A} , alors $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.
3. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que

$$\forall A \in \mathcal{C}, \quad \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A],$$

où \mathcal{C} est un π -système vérifiant $\Omega \in \mathcal{C}$ et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Que peut-on conclure ?

5. Soient $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ des π -systèmes inclus dans \mathcal{A} et contenant l'élément Ω . On suppose que pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n).$$

Montrer que les tribus $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ sont indépendantes.

Exercice 3 (Marche aléatoire). Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes uniformes sur $\{-1, +1\}$ et soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

1. Vérifier que $\{S_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et expliciter son crochet.
2. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = a\}$. Pour $a, b > 0$, calculer $\mathbb{E}[T_{-a} \wedge T_b]$ et $\mathbb{P}(T_{-a} < T_b)$. En déduire que presque-sûrement, la marche visite tous les sites.
3. Construire une martingale à partir de $e^{\lambda S_n}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Dans cet exercice on identifie un nombre $x \in [0, 1]$ avec son développement en base 2. On appelle motif une suite finie de 0 et de 1 pour un motif m on note $N(m, x, k)$ le nombre de fois que le motif m apparaît dans les k premières décimales de x . On dit que x est un nombre parfait si pour tout motif

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(m, x, k)/k = 2^{-|m|},$$

où $|m|$ est la longueur de m . Montrer qu'il existe un nombre parfait.

Exercice 5 (Implication et contre exemple) Rappeler le tableau d'implication entre convergence L^p pour $p \geq 1$, convergence en probabilité, convergence en loi et convergence ps. Pour chaque implication fautive, donner un contre exemple.

Exercice 6 (Espérance conditionnelle) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et de densité f strictement positive sur \mathbb{R} . Déterminer $\mathbb{E}(X | |X|)$.