RAPPELS 2

Exercice 1 (Convergences). Soit $\{X_i\}_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1,+1\}$. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}[|X_1+\cdots+X_n|]$ lorsque $n\to\infty$.

On sait par le TCL que $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+\cdots+X_n)$ converge en loi vers une variable $N(0,1)$. Par ailleurs comme la variance converge aussi, il est facile de voir que $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[|X_1+\cdots+X_n|]$ converge vers $\mathbb{E}|N|$ où N est une variable $N(0,1)$, ce qui conclue. Une méthode par exemple pour contrôler l'espérance d'une variable à partir de sa variance est l'inégalité $\mathbb{E}(Y^2 1_{|Y|\geq y}) \geq y\mathbb{E}(|Y|1_{|Y|\geq y})$ qui est valable pour toute variable Y et tout réel positif y.

Exercice 2 (Classes monotones). Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{M}=\{A\in\mathcal{A},\ \mathbb{P}(A)=\mathbb{Q}(A)\}$ est une classe monotone.

   Il faut vérifier la stabilité par différence, par union croissante et que Ω est inclus. Pour le premier point, c'est la formule $\mathbb{P}(A\setminus B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)$ si $A\supset B$. Le deuxième point est la continuité croissante des mesures de probas et le dernier point est trivial.

2. En déduire que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur un π-système engendreant $\mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$.

   Si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur un π-système, alors elles coïncident aussi sur la classe monotone engendrée et donc sur la tribus engendrée.

3. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi.

   Les intervalles semi-infinis forment un π-système dont on sait qu'il engendre la tribus borélienne.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, telles que

   $$\forall A\in\mathcal{C},\qquad \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]=\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A],$$

   où $\mathcal{C}$ est un $\pi-$système vérifiant $\Omega\in\mathcal{C}$ et $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}$. Que peut-on conclure ?

   Comme ci-dessus, l'ensemble des A où l'égalité est satisfaite est une classe monotone donc l'égalité doit s'étendre à tout ensemble A mesurable. En particulier on peut prendre $A=1_{X>Y}$ et obtenir que $\mathbb{P}(X>Y)=0$. En raisonnant symétriquement on déduit que $X=Y$ p.s.

5. Soient $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_n$ des $\pi-$systèmes inclus dans $\mathcal{A}$ et contenant l'élément Ω. On suppose que pour tout $(A_1,\ldots,A_n)\in\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n$,

   $$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \quad=\quad \mathbb{P}(A_1)\times\cdots\times\mathbb{P}(A_n).$$

   Montrer que les tribus $\sigma(\mathcal{C}_1),\ldots,\sigma(\mathcal{C}_n)$ sont indépendantes.

   On applique le théorème des classes monotones coordonnée par coordonnée pour étendre l'égalité à tous les $A_i\in\sigma(C_i)$.

Exercice 3 (Marche aléatoire). Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes uniformes sur $\{-1,+1\}$ et soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose $S_0:=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n:=X_1+\cdots+X_n.$$

1. Vérifier que $\{S_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et expliciter son crochet.

   Le fait que c'est une martingale de carré intégrable est trivial. Le calcul du crochet donne $\langle S\rangle_n = n$.

2. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} \colon S_n = a\}$. Pour $a, b > 0$, calculer $\mathbb{E}[T_{-a} \wedge T_b]$ et $\mathbb{P}(T_{-a} < T_b)$. En déduire que presque-sûrement, la marche visite tous les sites.

   Premièrement il est facile de voir que $T_{-a} \wedge T_b$ est fini presque sûrement et a même une queue de distribution exponentielle. Comme S_n est borné jusqu'à $T_{-a} \wedge T_b$ on peut appliquer le théorème d'arrêt et on obtient $0 = -a\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_{-a} < T_n))$ ce qui donne $\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) = \frac{b}{a+b}$. En considérant la martingale $S_n^2 - n$, on montre de manière similaire que $\mathbb{E}(T_{-a} \wedge T_b) = ab$.

3. Construire une martingale à partir de $e^{\lambda S_n}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On peut prendre $M_n = e^{\lambda S_n} / \cosh(\lambda)^n$ et en fait rien n'oblige à garder $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Dans cet exercice on identifie un nombre $x \in [0, 1]$ avec son développement en base 2. On appelle motif une suite finie de 0 et de 1 pour un motif m on note $N(m, x, k)$ le nombre de fois que le motif m apparaît dans les k premières décimales de x. On dit que x est un nombre parfait si pour tout motif

$$\lim_{k\to\infty} N(m, x, k)/k = 2^{-|m|},$$

où $|m|$ est la longueur de m. Montrer qu'il existe un nombre parfait.

Soit X une variable uniforme sur $[0, 1]$. Pour un m fixé, on peut voir $N(m, X, k)$ comme le nombre de fois qu'une chaîne de Markov sur les motifs de longueur $|m|$ est passé par m et le théorème ergodique montre que $\mathbb{P}(\lim_{k\to\infty} N(m, X, k)/k = 2^{-|m|}) = 1$. Comme il y a un nombre dénombrable de motifs, on a donc par borne d'union $\mathbb{P}(\forall m \lim_{k\to\infty} N(m, X, k)/k = 2^{-|m|}) = 1$. Les nombre parfaits ont donc mesure de Lebesgue 1 dans $[0, 1]$ et en particulier il en existe.

Exercice 5 (Implication et contre exemple) Rappeler le tableau d'implication entre convergence L^p pour $p \geq 1$, convergence en probabilité, convergence en loi et convergence ps. Pour chaque implication fausse, donner un contre exemple.

Exercice 6 (Espérance conditionnelle) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\mathbb{E}(X|\ |X|)$.

Tout d'abords, avec un petit abus de notation on va noter la fonction de $|X|$ que l'on cherche sous la forme $\mathbb{E}(X|\ |X| = a)$ pour $x \geq 0$. Ensuite, en réfléchissant quelques instants, on devine facilement qu'on devrait avoir $\mathbb{E}(X|\ |X| = a) = \frac{af(a)+(-a)f(-a)}{f(a)+f(-a)}$.
Pour vérifier cette formule, soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bornée, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Xg(|X|)) &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(|x|)f(x)dx = \int_0^{\infty} a(f(a) - f(-a))g(a)da \\ &= \int_0^{\infty} \frac{af(a) - af(-a)}{f(a) + f(-a)} g(a)(f(a + f(-a)))da\end{aligned}$$

et $f(a) + f(-a)$ est bien la densité de $|X|$.