MOUVEMENT BROWNIEN

Exercice 1 (Quizz). Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues, tel que $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ pour tout $t \geq 0$. Peut-on conclure que B est un mouvement brownien ?

Exercice 2 (Transformations). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. Montrer que $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. Montrer que $\{B_{a+t} - B_a\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\{B_t\}_{0\leq t\leq a}$.
3. Montrer que $\left\{\frac{B_{at}}{\sqrt{a}}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
4. Montrer que $\left\{(1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. Montrer que $(t+1)B_{\frac{1}{1+t}} - W_1$ est un mouvement brownien.
6. Montrer que $\left\{tB_{\frac{1}{t}}1_{(t>0)}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. (On suppose que la question a un sens, c.a.d que la réponse ne dépend bien que de la loi du mouvement brownien.)

Indication : On pourra dans un premier temps montrer qu'il suffit de contrôler la la covariance entre deux temps (ou la variance d'un incrément) et la continuité.

Exercice 3 (Intégrale d'un processus gaussien). Soit $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues. Montrer que le processus $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ defini par

$$Y_t(\omega) := \int_0^t X_u(\omega)du$$

est encore un processus gaussien dont on précisera les fonctions de moyenne et de covariance, en fonction de celles de X. Qu'obtient-on dans le cas où X est un mouvement brownien ?
Indication : Vous pouvez dans un premier temps chercher une explication intuitive et tenter de deviner la formule, avant de la prouver complètement. Il peut aussi être utile d'utiliser le résultat de l'exercice 5 du TD1 sur une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite de gaussienne.

Exercice 4 (Pont brownien). Un pont brownien est un processus gaussien $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ centré, à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t - st$.

1. Vérifier que la loi d'un pont brownien est invariante par retournement du temps : si $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ est un pont brownien, alors $\{Z_{1-t}\}_{0\leq t\leq 1}$ aussi.
2. Soit $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien. Que dire du processus $\left\{(1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}\right\}_{t\geq 0}$?
3. Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $0 \leq t \leq 1$ on pose $Z_t := B_t - tB_1$. Montrer que $Z = \{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ est un pont brownien indépendant de B_1.
4. On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que pour toute fonction continue bornée $G\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[G(B)\big||B_1| \leq \varepsilon\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{E}[G(Z)].$$

Exercice 5 (Mouvement brownien multi-dimensionnel). Un processus $\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)\}_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé mouvement brownien $d-$dimensionnel si ses coordonnées

$\{B_t^1\}_{t\geq 0}, \ldots, \{B_t^d\}_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens indépendants. Vérifier que si $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien $d-$dimensionnel alors $\{UB_t\}_{t\geq 0}$ aussi, pour toute matrice $U \in \mathcal{O}(d, \mathbb{R})$.

Exercice 6 (Loi du tout ou rien de Blumenthal). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose

$$\mathcal{F}_{0+} := \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathcal{F}_{0+}$ est indépendante de la tribu $\mathcal{G}_\varepsilon := \sigma(B_t - B_\varepsilon, t \geq \varepsilon)$.
2. En déduire que $\mathcal{F}_{0+}$ est indépendante de $\sigma\left(\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_\varepsilon\right)$.
3. Conclure que $\mathcal{F}_{0+}$ est triviale : pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 7 (Propriétés trajectorielles). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Montrer que p.s.

1. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0\leq t\leq\varepsilon} B_t > 0$ et $\inf_{0\leq t\leq\varepsilon} B_t < 0$;
2. $\sup_{t\geq 0} B_t = +\infty$ et $\inf_{t\geq 0} B_t = -\infty$;
3. pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a := \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\}$ est fini ;
4. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.
5. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 8 (Propriété de Markov forte). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle, et τ un temps d'arrêt presque-sûrement fini. Montrer que le processus $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Exercice 9 (Principe de réflexion). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, et soit $t > 0$. On pose

$$S_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s.$$

1. Soit $a \geq 0$ et $b \leq a$. A l'aide de la propriété de Markov forte, établir l'identité
$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a, B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - b\right).$$
2. En déduire que le couple (S_t, B_t) admet une densité que l'on explicitera.
3. Montrer que S_t a même loi que $|B_t|$.
4. Montrer que $T_a = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\}$ a même loi que $(a/B_1)^2$, puis en déduire sa densité.

Exercice 10 (Non-dérivabilité). Le but de cet exercice est de montrer que presque-sûrement, le mouvement brownien n'est dérivable à droite en aucun point $t \geq 0$.

1. Peut-on se restreindre aux points $t \in [0, 1)$? Et au point $t = 0$?
2. Soit $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On suppose qu'il existe $t \in [0, 1)$ tels que
$$\sup_{0<h\leq 1} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq M.$$
Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $1 \leq k \leq 2^n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 2^n - 1$,
$$\left| f\left(\frac{k+i}{2^n}\right) - f\left(\frac{k+i-1}{2^n}\right) \right| \leq \frac{(2i+1)M}{2^n}.$$
3. Majorer la probabilité d'un tel événement sous la loi du mouvement brownien, et conclure.