MOUVEMENT BROWNIEN

Exercice 1 (Quizz). Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues, tel que $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ pour tout $t \geq 0$. Peut-on conclure que B est un mouvement brownien ?

Non, par exemple on peut tirer une seule variable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et poser $B_t = \sqrt{t}X$.

Exercice 2 (Transformations). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. Montrer que $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

   Il faut vérifier la continuité, que $B_0 = 0$ et la loi des marginales de dimensions finies. Comme on part de processus gaussiens et qu'ici on ne fait que des transformations linéaires des valeurs, il suffit de vérifier espérance et covariance. La partie espérance est triviale donc il ne reste qu'à calculer les covariances. Ici par simple bilinéarité, $\mathrm{Cov}\left(\sum_1^n \alpha_i(-B_{t_i}), \sum_{i=1}^n \beta_i(-B_{t_i})\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_1^n \alpha_i B_{t_i}, \sum_{i=1}^n \beta_i B_{t_i}\right)$.

2. Montrer que $\{B_{a+t} - B_a\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\{B_t\}_{0\leq t\leq a}$.

   Même remarque que dans la question précédente mais on peut simplifier en ne considérant que la loi des incréments et la limite en 0. On note $W_t = B_{a+t} - B_a$, on a pour $s \geq t$, $\mathrm{Var}(W_s - W_t) = \mathrm{Var}(B_{s+a} - B_{t+a}) = s - t$. On vérifie ensuite que pour $s \geq t \geq w$, on a $\mathrm{Cov}(B_s - B_t, B_t - B_w)$ en écrivant $\mathrm{Var}(B_s - B_w)$ de deux manière et enfin $\mathrm{Cov}(B_s - B_t, B_w - B_z)$.

3. Montrer que $\left\{\frac{B_{at}}{\sqrt{a}}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

   À nouveau la continuité est triviale. L'indépendance des incréments est aussi triviale donc il suffit de calculer $\mathrm{Var}(\frac{B_{as}}{\sqrt{a}} - \frac{B_{at}}{\sqrt{a}}) = \frac{1}{a}(as - at) = s - t$ pour $s \geq t$.

4. Montrer que $\left\{(1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

   Il n'y a toujours pas de problème de continuité. On a pour $s \geq t$

   $$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}((1+s)B_{\frac{s}{1+s}} - sB_1, (1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1)\\ &\qquad = (1+s)(1+t)\frac{t}{1+t} - (1+s)t\frac{s}{1+s} - s(1+t)\frac{t}{1+t} + st = t.\end{aligned}$$

5. Montrer que $(t+1)B_{\frac{1}{1+t}} - W_1$ est un mouvement brownien.

   Même genre de calculs que précédemment

6. Montrer que $\left\{tB_{\frac{1}{t}}1_{(t>0)}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. (On suppose que la question a un sens, c.a.d que la réponse ne dépend bien que de la loi du mouvement brownien.)

   Toujours les même calculs mais ici il y a une question de continuité en 0. Si on suppose que B_t est obtenue d'après la formule de la question 4, on retombe sur la question 5.

Indication : On pourra dans un premier temps montrer qu'il suffit de contrôler la la covariance entre deux temps (ou la variance d'un incrément) et la continuité.

Exercice 3 (Intégrale d'un processus gaussien). Soit $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues. Montrer que le processus $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ defini par

$$Y_t(\omega) := \int_0^t X_u(\omega)du$$

est encore un processus gaussien dont on précisera les fonctions de moyenne et de covariance, en fonction de celles de X. Qu'obtient-on dans le cas où X est un mouvement brownien ?
Indication : Vous pouvez dans un premier temps chercher une explication intuitive et tenter de deviner la formule, avant de la prouver complètement. Il peut aussi être utile d'utiliser le résultat de l'exercice 5 du TD1 sur une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite de gaussienne.

Notez qu'ici on considère l'intégrale classique d'une fonction continue. Intuitivement on veut considérer l'intégrale comme une somme et c'est pour cela que l'intégrale d'un processus gaussien doit rester un processus gaussien. Aussi, notez que d'après l'équivalence entre convergence en loi de gaussiennes et convergence de la variance et de l'espérance, les fonctions $t \to \mathbb{E}(X_t)$ et $(s,t) \to \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ doivent être continues.
Pour formaliser le fait qu'une intégrale est une somme, on écrit des sommes de Riemann. Soit $Y_t^n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\lfloor nt \rfloor} X_{i/n}$, pour tout t on sait que $Y_t^n \to Y_t$ presque sûrement et en particulier on a convergence en loi pour tout t et même pour toute marginale de dimension finie. Par ailleurs clairement Y_t^n est un processus gaussien pour tout n donc toutes les marginales de dimension finies de Y_t sont gaussiennes comme limites de gaussiennes et Y_t est un processus gaussien.
Comme $t \to \mathrm{Var}(X_t)$ est continue, on a par Cauchy-Schwartz que $\int_0^t \mathbb{E}(|X_u|)du < \infty$ donc par Fubini $\mathbb{E}(Y_t) = \int_0^t \mathbb{E}(X_u)du$. De même on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) &= \mathbb{E}(\int_0^s X_u - \mathbb{E}(X_u)du \int X_v - \mathbb{E}(X_v)dv) \\ &= \int_0^s \int_0^t \mathrm{Cov}(X_u, X_v)dsdt.\end{aligned}$$

Exercice 4 (Pont brownien). Un pont brownien est un processus gaussien $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ centré, à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t - st$.

1. Vérifier que la loi d'un pont brownien est invariante par retournement du temps : si $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ est un pont brownien, alors $\{Z_{1-t}\}_{0\leq t\leq 1}$ aussi.

   Même genre de calcul que dans l'exercice 1.

2. Soit $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien. Que dire du processus $\left\{(1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}\right\}_{t\geq 0}$?

   On retrouve un Brownien, c'est similaire au point 4 de l'exercice 1.

3. Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $0 \leq t \leq 1$ on pose $Z_t := B_t - tB_1$. Montrer que $Z = \{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ est un pont brownien indépendant de B_1.

   Toujours similaire à l'exercice 1, il suffit de calculer la covariance.

4. On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que pour toute fonction continue bornée $G\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[G(B) \big| |B_1| \leq \varepsilon\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{E}[G(Z)].$$

D'après la question 3, on peut écrire $B_t = Z_t + tB_1$ où Z_t est indépendant de B_1. Le conditionnement gaussien nous dit donc que $Z_t + tB_1$ est la loi conditionnelle de B_t sachant B_1 et on a donc

$$\mathbb{E}(G(B)||B_1| \leq \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbb{E}(G(Z_t + tx)_{0 \leq t \leq 1}) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(|B_1| \leq \varepsilon)} dx$$

Par continuité de G et convergence dominée (puisque G est bornée), l'espérance converge quand $\varepsilon \to 0$ et il est facile de voir que l'intégrale disparaît dans cette limite.

Exercice 5 (Mouvement brownien multi-dimensionnel). Un processus $\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)\}_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé mouvement brownien $d-$dimensionnel si ses coordonnées $\{B_t^1\}_{t\geq 0}, \ldots, \{B_t^d\}_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens indépendants. Vérifier que si $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien $d-$dimensionnel alors $\{UB_t\}_{t\geq 0}$ aussi, pour toute matrice $U \in \mathcal{O}(d, \mathbb{R})$.

C'est un calcul de covariance comme dans l'exercice 1

Exercice 6 (Loi du tout ou rien de Blumenthal). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose

$$\mathcal{F}_{0+} := \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathcal{F}_{0+}$ est indépendante de la tribu $\mathcal{G}_\varepsilon := \sigma(B_t - B_\varepsilon, t \geq \varepsilon)$.

   Par définition $\mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_\varepsilon$ et par indépendance des incréments $\mathcal{F}_\varepsilon$ est indépendante de $\mathcal{G}_\varepsilon$

2. En déduire que $\mathcal{F}_{0+}$ est indépendante de $\sigma\left(\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_\varepsilon\right)$.

   L'indépendance entre tribu ne demande que l'indépendance de familles finies d'événement, et toute famille finie d'événement de $\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_\varepsilon$ appartient à un certain $\mathcal{G}_\varepsilon$. On sait par ailleurs que l'indépendance se propage à la tribu engendrée.

3. Conclure que $\mathcal{F}_{0+}$ est triviale : pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

   Pour tout $t > 0$, on a $B_t = \lim_{\varepsilon\to 0} B_t - B_\varepsilon$ donc pour tout $t > 0$, B_t est mesurable par rapport à $\sigma(\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_\varepsilon)$. C'est trivialement aussi le cas pour B_0 qui est déterministe donc $\sigma(\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_\varepsilon)$ est la tribu complète. $\mathcal{F}_{0+}$ est donc indépendante d'elle même ce qui conclue.

Exercice 7 (Propriétés trajectorielles). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Montrer que p.s.

1. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0\leq t\leq \varepsilon} B_t > 0$ et $\inf_{0\leq t\leq \varepsilon} B_t < 0$;

On va utiliser l'exercice 6 mais on pourrait aussi le faire à la main par exemple en utilisant l'exercice 4 pour "zoomer" petit à petit sur 0.
Sans perte de généralité, on peut remplacer tout $\varepsilon > 0$ par tout ε rationnel et ainsi on peut librement intervertir presque sûrement et pour tout ε. Aussi comme pour tout t, $\mathbb{P}(B_t = 0)$, presque surement pour tout ϵ au moins l'un des deux entre $\sup B_t$ et $\inf B_t$ doit être non nul. On voit donc par inclusion des intervalles sur lesquels on prend les minimums et maximums que presque sûrement l'une des trois comportement suivant doit se produire

— pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0 \le t \le \varepsilon} B_t > 0$ et $\inf_{0 \le t \le \varepsilon} B_t < 0$;
— pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0 \le t \le \varepsilon} B_t > 0$ et pour ϵ assez petit $\inf_{0 \le t \le \varepsilon} B_t = 0$;
— pour tout $\varepsilon > 0$, $\inf_{0 \le t \le \varepsilon} B_t < 0$ et pour ϵ assez petit $\sup_{0 \le t \le \varepsilon} B_t = 0$;

Par symétrie les points 2 et 3 doivent avoir la même proba donc par la loi du tout ou rien ils doivent avoir proba 0.

2. $\sup_{t \ge 0} B_t = +\infty$ et $\inf_{t \ge 0} B_t = -\infty$;

Il est facile de voir que $\mathbb{P}(B_t \in (-t^{1/4}, t^{1/4})) \to 1$ quand t tends vers l'infini donc presque sûrement au moins l'un des deux entre $\sup_{t \ge 0} B_t = +\infty$ et $\inf_{t \ge 0} B_t = -\infty$. On conclue par la loi du 0-1 et la symétrie.

3. pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a := \inf\{t \ge 0 \colon B_t = a\}$ est fini ;

continuité et la question précédente.

4. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.

Le point 2 de l'exo 2, la question 1 et une union sur les rationnels.

5. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable à droite en 0.

le point 6 de l'exo 2 et la question 5.

Exercice 8 (Propriété de Markov forte). Soit $\{B_t\}_{t \ge 0}$ un mouvement brownien, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ sa filtration naturelle, et τ un temps d'arrêt presque-sûrement fini. Montrer que le processus $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t \ge 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Voir le cours

Exercice 9 (Principe de réflexion). Soit $\{B_t\}_{t \ge 0}$ un mouvement brownien, et soit $t > 0$. On pose

$$S_t := \sup_{0 \le s \le t} B_s.$$

1. Soit $a \ge 0$ et $b \le a$. A l'aide de la propriété de Markov forte, établir l'identité

$$\mathbb{P}(S_t \ge a, B_t \le b) = \mathbb{P}(B_t \ge 2a - b).$$

appliquer Markov fort à la première visite en a et la symétrie pour le Brownien après a.

2. En déduire que le couple (S_t, B_t) admet une densité que l'on explicitera.

Il suffit de dériver en a et en b.

3. Montrer que S_t a même loi que $|B_t|$.

En prenant $b = a$ on obtient exactement $\mathbb{P}(S_t \geq a)$ et on a la densité en dérivant.

4. Montrer que $T_a = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\}$ a même loi que $(a/B_1)^2$, puis en déduire sa densité.

On écrit sous forme intégrale $\mathbb{P}(T_a < t) = \mathbb{P}(S_t < a)$ en utilisant la densité de la question 3.

Exercice 10 (Non-dérivabilité). Le but de cet exercice est de montrer que presque-sûrement, le mouvement brownien n'est dérivable à droite en aucun point $t \geq 0$.

1. Peut-on se restreindre aux points $t \in [0, 1)$? Et au point $t = 0$?

Oui pour le premier et non pour le deuxième car on ne peut faire que des unions dénombrables d'événements.

2. Soit $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On suppose qu'il existe $t \in [0, 1)$ tels que

$$\sup_{0<h\leq 1} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq M.$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $1 \leq k \leq 2^n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 2^n - 1$,

$$\left| f\left(\frac{k+i}{2^n}\right) - f\left(\frac{k+i-1}{2^n}\right) \right| \leq \frac{(2i+1)M}{2^n}.$$

On pose $k = k_n = \lfloor 2^n t \rfloor + 1$. On observe que $\left| f\left(\frac{k+i}{2^n}\right) - f(t) \right| \leq \frac{i+1}{2^n} M$ par hypothèse. On conclue par inégalité triangulaire.

3. Majorer la probabilité d'un tel événement sous la loi du mouvement brownien, et conclure.

Pour k, n et $i < 2^{n/2}$ fixés, on a

$$\mathbb{P}(\left| f\left(\frac{k+i}{2^n}\right) - f\left(\frac{k+i-1}{2^n}\right) \right| \leq \frac{(2i+1)M}{2^n}) \leq (1 - c_M)$$

pour un certain c_M puisqu'on demande à une gaussienne de variance n de rester dans un intervalle de taille $O(2^{-n/2})$.
Pour k fixés, les événements correspondants au différents i sont indépendants donc la proba de l'intersection est $(1 - c_M)^{2^{n/2}}$. Même avec une borne d'union sur k, la proba tends bien vers 0 avec n ce qui conclue.